

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

17 Luglio 2006

Teoria 1.

Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti.

È possibile, a partire dalla funzione di trasferimento $H(z)$, dire se un sistema è asintoticamente stabile?

Si faccia un esempio di un sistema BIBO stabile ma non asintoticamente stabile.

Teoria 2.

Si dia la definizione di serie di Fourier esponenziale per un segnale a tempo continuo $u(t)$, periodico di periodo T .

Dato un sistema LTI a tempo continuo, descritto da una equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{dy^i(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{du^i(t)}{dt^i}, \quad a_n, b_m \neq 0, n \geq m,$$

si ricavi la relazione tra i coefficienti della serie di Fourier del segnale $y(t)$ di uscita (a regime) e i coefficienti di Fourier del segnale di ingresso $u(t)$ (periodico di periodo T come sopra).

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

17 Luglio 2006

Esercizio 1. Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = 100 \frac{(s^2 - 200s + 10000)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 10001)}$$

Esercizio 2.

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - 6k}{2}\right) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - 6k - 3}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T .
- ii) Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $u(t)$.
- iii) Si consideri un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale e sia $y(t)$ l'uscita (in regime permanente) corrispondente all'ingresso $u(t)$ in (1). Con riferimento alla serie esponenziale di Fourier di $y(t)$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t},$$

si determini il valori di a affinché la potenza della componente con $k = 1$ dello sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$ si riduca di un fattore 2 (cioè diventi la metà) rispetto alla corrispondente componente dello sviluppo in serie di $u(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$v(k) + \left(\frac{1}{2} + b\right)v(k-1) + \frac{b}{2}v(k-2) = u(k-1) + au(k-2), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a e b sono due parametri reali.

- i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a e b .
- ii) Fissando $a = b$ si calcoli, nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.
- iii) Si determini, in funzione di a e b , un ingresso $u(k)$ affinché l'uscita forzata del sistema sia

$$v(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ -\frac{1}{2}^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

Cosa succede per $a = b$? Era prevedibile?

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6 pag. 34 e pag. 201 e seguenti.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 paragrafo 5.1, paragrafo 5.4.1 e capitolo 4, paragrafo 4.1.

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = 10^2 \frac{10000}{10001} \cdot \frac{(1 - j\frac{\omega}{100})^2}{(1 + j\omega) \left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{10001}}\frac{1}{\sqrt{10001}}\omega - \frac{\omega^2}{10001}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

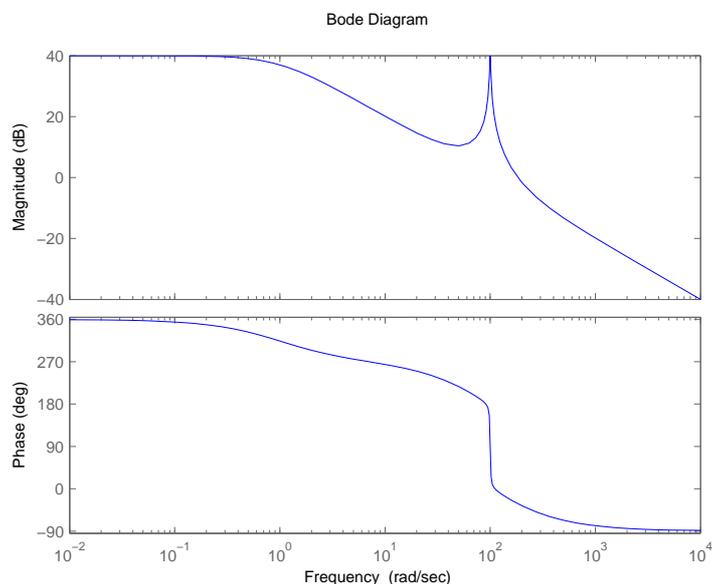


Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [1 punto] Il piú piccolo valore di T per il quale segnale $u(t)$ soddisfa $u(t) = u(t + Tk)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ è $T = 6$, e quindi $u(t)$ è periodico di periodo 6.

ii) [3 punti] Il segnale $u(t)$ si ottiene per ripetizione periodica, con periodo $T = 6$, del segnale

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) - \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

La trasformata di Fourier del segnale dgeneratore $u_g(t)$ si calcola semplicemente usando la trasformata notevole dell'impulso rettangolare e le regole di traslazione e cambio di scala:

$$U_g(f) = 2\text{sinc}(2f) \left(1 - e^{-j2\pi f^3}\right)$$

e di conseguenza la trasformata di Fourier di $u(t)$ risulta

$$\begin{aligned} U(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right) \left(1 - e^{-jk\pi}\right) \delta\left(f - \frac{k}{6}\right) \end{aligned}$$

iii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema é

$$H(s) = \frac{1}{s - a}$$

Il coefficiente di Fourier y_1 si ottiene dalla relazione $y_1 = H(j2\pi f)|_{f=\frac{1}{6}} u_1$ dove $u_1 = \frac{1}{6} U_g\left(\frac{1}{6}\right)$. Affinche la potenza della componente per $k = 1$ si dimezzi deve essere

$$|H(j2\pi f)|_{f=\frac{1}{6}}^2 = \frac{1}{2}$$

cioé

$$|j2\pi f - a|_{f=\frac{1}{6}}^2 = 2$$

da cui $a^2 = 2 - \frac{\pi^2}{9}$ e quindi $a = -\sqrt{2 - \frac{\pi^2}{9}}$ (si ricordi che il sistema deve essere BIBO stabile).

Esercizio 3.

i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema é $z^2 + (b + 1/2)z + b/2 = (z + 1/2)(z + b) = 0$. Le radici sono $z_1 = -1/2$ e $z_2 = -b$. Quindi il sistema é asintoticamente stabile per $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| < 1\}$.

Per verificare la BIBO stabilitá si puo calcolare la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z + a}{(z + 1/2)(z + b)}$$

il sistema é BIBO stabile quando i poli della funzione di trasferimento (cioé le radici del denominatore dopo eventuali cancellazioni) sono in modulo strettamente minore di 1.

Quindi il sistema é BIBO stabile per $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| < 1\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\}$

ii) [3 punti] Per $a = b$ si ha una cancellazione tra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento e quindi il comportamento ingresso uscita é descritto dall'equazione alle differenze di ordine 1

$$v(k) + 1/2v(k-1) = u(k-1)$$

La risposta impulsiva $h(k)$ si ottiene risolvendo

$$h(k) = -1/2h(k-1) + \delta(k-1)$$

con $h(k) = 0, \forall k < 0$.

da cui: $h(0) = -1/2h(-1) + \delta(-1) = 0$, $h(1) = -1/2h(0) + \delta(0) = 1$, $h(k) = 1/2h(k-1) + \delta(k) = -1/2h(k-1)$, $\forall k > 1$. Di conseguenza

$$\begin{cases} h(k) = 0 & k \leq 0 \\ h(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(k-1)} & k \geq 1 \end{cases}$$

iii) [3 punti] Si può procedere nel dominio delle trasformate. La trasformata zeta dell'uscita desiderata $v(k)$ é

$$V(z) = \frac{1}{z + 1/2}$$

Dalla relazione ingresso uscita (forzata) nel dominio delle trasformate si ottiene:

$$U(z) = \frac{V(z)}{H(z)} = \frac{z + b}{z + a}$$

da cui, antitrasformando:

$$u(k) = (-a)^k \delta_{-1}(k) + b(-a)^{k-1} \delta_{-1}(k-1)$$

Nel caso $a = b$ si ottiene

$$u(k) = (-a)^k \delta_{-1}(k) + b(-a)^{k-1} \delta_{-1}(k-1) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k = 0 \\ (-a)^k + a(-1)^{k-1} a^{k-1} = 0 & k > 0 \end{cases}$$

Il risultato era ovviamente prevedibile perché l'uscita desiderata $v(k)$ é proprio la risposta impulsiva nel caso $a = b$.