COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
20 Dicembre 2006

Teoria 1. [5 punti] Si enunci e dimostri il teorema del campionamento ideale; quali sono le considerazioni "pratiche", relative al filtro di ricostruzione, piú rileventi al fine dell'implementazione della formula di ricostruzione del segnale a partire dai suoi campioni?

Teoria 2. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Si discuta il legame tra stabilitá asintotica e BIBO, fornendo una caratterizzazione di quest'ultima in termini di risposta impulsiva. Si illustrino le affermazioni fatte per mezzo di un esempio scelto a piacere.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
20 Dicembre 2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5a^3\frac{dy(t)}{dt} + (1-a^2)y(t) = \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale.

i) **[3 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) **[4 punti]** Si consideri il segnale di ingresso ($t \in \mathbb{R}$):

$$u(t) := \begin{cases} 1 & \exists k \in \mathbb{Z} : |t-k| \leq 1/4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e si indichi con $y(t)$ l'uscita corrispondente. Si determini, se possibile, un valore di a in maniera che il coefficiente di Fourier che pesa la frequenza fondamentale (cioé y_1) dell'uscita $y(t)$ abbia ampiezza minore di $\frac{1}{15}\text{sinc}(1/2)$.

Suggerimento: si verifichi cosa succede per $a = -1$.

Esercizio 2.
Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + \frac{2}{\sqrt{3}}y(k-1) + \frac{2}{3}y(k-2) = u(k-1) + u(k-4) \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

i) **[4 punti]** Si calcoli, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.

ii) **[4 punti]** Si determini un ingresso $u(k)$ in modo che l'evoluzione forzata sia, per ogni $k \geq 0$, di tipo sinusoidale (eventualmente smorzato) con pulsazione (discreta) uguale a $\frac{3}{4}\pi$.

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = 100\frac{s^2 + 990s - 10000}{(s+10)(s^2 + 20s + 10000)}$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5, sezione 5.6.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2 sezioni 2.2.1, 2.4.1.

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 - 5a^3 s + (1 - a^2) = 0,$$

Le radici sono a parte reale negativa se e solo se tutti i coefficienti hanno lo stesso segno, e quindi se $-5a^3 > 0$ e $(1 - a^2) > 0$. Le condizioni sono entrambe verificate se e solo se $a \in (-1, 0)$.

Quindi il sistema é asintoticamente stabile se e solo se $a \in (-1, 0)$.

Per quando riguarda la stabilitá BIBO, il sistema é sicuramente BIBO stabile quando é anche asintoticamente stabile (e quindi per $a \in (-1, 0)$). Per verificare se ci sono altri valori del parametro a per i quali il sistema é BIBO stabile possiamo calcolare la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s}{s^2 - 5a^3 s + (1 - a^2)}.$$

Come noto il sistema é BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a parte reale strettamente negativa. I poli di $H(s)$ sono gli zeri del denominatore a meno di eventuali cancellazioni con il numeratore. L'unica cancellazione possibile é con il fattore s a numeratore, che avviene se $(1 - a^2) = 0$, cioé per $a = \pm 1$.

Per $a = 1$ la funzione di trasferimento risulta $H(s) = 1/(s - 5)$. L'unico polo é in 5 e quindi il sistema non é BIBO stabile.

Per $a = -1$ la funzione di trasferimento risulta $H(s) = 1/(s + 5)$. L'unico polo é in -5 e quindi il sistema é BIBO stabile.

In conclusione in sistema é BIBO stabile se e solo se $a \in [-1, 0)$.

ii) [4 punti]

L'ingresso $u(t)$ si puó anche scrivere nella forma

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - k}{1/2}\right)$$

(infatti questo segnale vale 1 per tutti i valori di t che distano da qualche intero k meno di $1/4$ e zero altrove).

Quindi si tratta di un segnale periodico con periodo $T = 1$. Si puó prendere come generatore il segnale

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{1/2}\right)$$

I coefficienti u_k della serie di Fourier del segnale $u(t)$ si possono calcolare dalla ben nota relazione

$$u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

dove $U_g(f)$ é la trasformata di Fourier del generatore $u_g(t)$. Di conseguenza

$$u_k = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right).$$

Inoltre, come noto, l'uscita $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ di un sistema BIBO stabile (quindi per $a \in [-1, 0)$) al cui ingresso viene applicato un segnale periodico $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ risulta un segnale periodico i cui coefficienti di Fourier si possono calcolare dalla relazione

$$y_k = H(s)_{|s=j\omega_k} u_k \qquad \omega_k = 2\pi\frac{k}{T}.$$

Quindi, per $k = 1$ si ottiene

$$y_1 = \frac{j2\pi}{-4\pi^2 - j5a^3 2\pi + (1-a^2)} \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Usando il suggerimento e ponendo $a = -1$ (si noti che per questo valore di a il sistema é BIBO stabile) si ottiene

$$y_1 = \frac{1}{5 + j2\pi} \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Calcolando il modulo

$$|y_1| = \frac{1}{\sqrt{25 + 4\pi^2}} \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.0623\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) < 1/15\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)$$

che soddisfa alla richiesta del testo. (Si noti che, senza troppi conti, bastava osservare che $25 + 4\pi^2 > 64$ e quindi $\frac{1}{\sqrt{25+4\pi^2}}\frac{1}{2} < 1/16 < 1/15$.)

Quindi il valore suggerito $a = -1$, per il quale il sistema é BIBO stabile, soddisfa alle specifiche richieste.

Esercizio 2. i) [4 punti] L'equazione alle differenze é nella "solita" forma con $n = 2$, $m = 4$. L'equazione caratteristica é

$$z^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3} = 0$$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \pm j\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{\pm j\frac{3}{4}\pi}$.

Quindi la risposta impulsiva si scrive nella forma:

$$h(k) \;=\; d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + d_2\delta(k-2) + \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^k \left[c_1\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi k\right) + c_2\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi k\right)\right]\delta_{-1}(k-3)$$

I coefficienti d_0, d_1, d_2, c_1, c_2 si determinano imponendo i primi $5 = \max(n, m+1)$ valori della risposta impulsiva; questi si calcolano direttamente dall'equazione alle differenze imponendo $u(k) = \delta(k)$ e $h(k) = 0$ per $k < 0$. Si trova: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $h(3) = \frac{2}{3}$, e $h(4) = 1$.

Imponendo queste condizioni si ottiene immediatamente: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $c_1 = -\frac{9}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}\left(4\sqrt{3} + 9\right)$.

ii) [4 punti] Operando nel dominio delle trsaformate zeta, la risposta forzata si scrive nella forma

$$Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{z^3+1}{z^2\left(z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z+\frac{2}{3}\right)}U(z)$$

Si ricordi che i modi del sistema sono di tipo sinusoidale smorzato di pulsazione proprio uguale a $\frac{3}{4}\pi$. Possiamo quindi cercare un ingresso in modo che l'uscita forzata contenga (per $k \geq 0$) solo i modi del sistema, corrispondendi al fattore $z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z+\frac{2}{3}$ a denominatore.

Affinché la $y_f(k)$ risulti una combinazione dei modi $\left(\sqrt{2/3}\right)^k cos(3/4\pi k)$ e $\left(\sqrt{2/3}\right)^k sin(3/4\pi k)$ per tutti i $k \geq 0$) deve risultare

$$Y_f(z) = \frac{\alpha z^2+\beta z}{z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z+\frac{2}{3}}$$

per qualche scelta di α e β. Poiché il sistema contiene un ritardo (la risposta impulsiva é nulla per $k=0$) anche l'uscita forzata deve essere nulla per $k=0$, da cui $\alpha=0$. Si puó poi porre, senza perdita di generalitá, $\beta=1$.

Utilizzando le trasformate zeta si ottiene

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \frac{z^3}{z^3+1}$$

che é una funzione razionale propria.

Per calcolare l'ingresso $u(k)$ desiderato basta antitrasformare ($\mathcal{R}$ indica la parte reale):

$$u(k) = \left[A(-1)^k + 2\mathcal{R}\left(Be^{j\frac{\pi}{3}}\right)\right]\delta_{-1}(k)$$

dove A e B sono i coefficienti dalla espansione in fratti semplici

$$U_1(z) = \frac{U(z)}{z} = \frac{z^2}{z^3+1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-e^{j\frac{\pi}{3}}} + \frac{\bar{B}}{z-e^{-j\frac{\pi}{3}}}.$$

In particolare si ottiene $A=\frac{4}{11}$ e $B=\frac{-1/2+j\sqrt{3}/2}{3/2+j\sqrt{3}/2}$.

Esercizio 3. i) [5 punti]

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10 \cdot \frac{(1-j0.1\omega)(1+j0.001\omega)}{(1+j0.1\omega)(1-0.0001\omega^2+2j0.1\omega 0.01)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

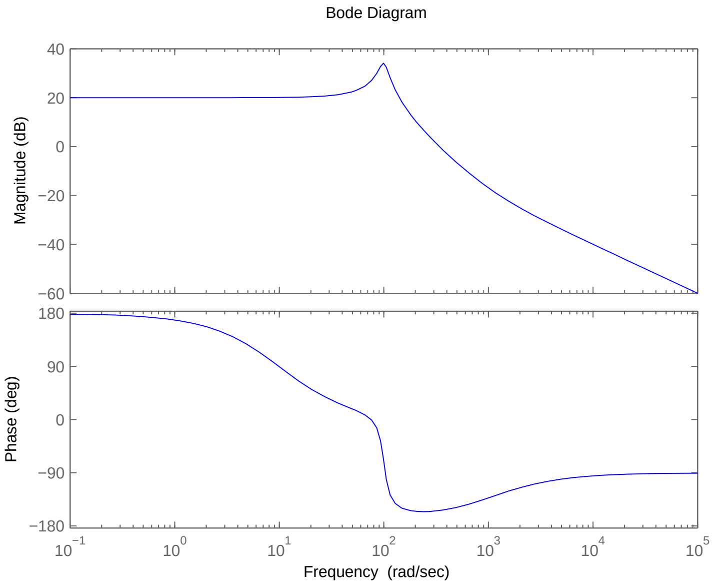

Figura 1. Diagramma di Bode