COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 gennaio 2007

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad sistema lineare descritto da una equazione *differenziale* (lineare a coefficienti costanti) di ordine n, si ricavi esplicitamente, operando del dominio delle trasformate, l'espressione della risposta forzata e dell'evoluzione libera. Si faccia un esempio numerico di un modello non asintoticamente stabile, la cui risposta impulsiva sia assolutamente integrabile.

Teoria 2. [5 punti] Si dia la definizione di trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo e di serie di Fourier per un segnale a tempo continuo periodico. Dato un segnale a tempo continuo periodico si ricavi la relazione tra i suoi coefficienti di Fourier e la trasformata di Fourier di un segnale generatore.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 gennaio 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1-a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} - a\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale.

i) **[3 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) **[4 punti]** Per $a = 2$, si ricavi l'uscita $y(t)$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t) - 2\delta_{-1}(t)$ e alle condizioni iniziali $y(0^-) = 1$, $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$ e $\frac{d^2y(t)}{dt^2}_{|t=0^-} = 0$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-1) = u(k-1) + u(k-2), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

i) **[4 punti]** Si calcoli, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.

ii) **[4 punti]** Si consideri il segnale a tempo continuo ($t \in \mathbb{R}$) $u(t) = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$. Si calcoli la trasformata di Fourier a tempo discreto del segnale di uscita $y(k)$ quando in ingresso viene fornito il segnale $u(k)$, ottenuto campionato $u(t)$ con passo $T = 1$, cioé la successione $u(k) = u(t)_{|t=kT,T=1} = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$.

Suggerimento: si operi nel dominio della frequenza.

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = 100\frac{s^2 + 9s - 10}{s(s^2 + 160s + 10000)}.$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 3, sezione 3.3.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 sezioni 5.1, 5.3 e 5.4.1.

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + (1-a)s^2 - as = s(s-a)(s+1) = 0$$

Poiché l'equazione ha come radice $\lambda = 0$ qualunque sia il valore di a il sistema non é mai asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda la stabilitá BIBO basta calcolare la funzione di trasferimento che risulta:

$$H(s) = \frac{s(s-1)}{s(s-a)(s+1)} = \frac{(s-1)}{(s-a)(s+1)}$$

Come noto il sistema é BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a parte reale strettamente negativa.

I poli di $H(s)$ sono a e -1 per $a \neq 1$, mentre per $a = 1$ si ha una semplificazione: $H(s) = \frac{1}{s+1}$, con un solo polo in -1. Di conseguenza il sistema é BIBO stabile per $a < 0$ e per $a = 1$.

ii) [4 punti]

L'uscita cercata si puó scrivere come somma dell'evoluzione libera e della risposta forzata:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t).$$

Ponendo $a = 2$ l'evoluzione libera si scrive nella forma:

$$y_l(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

da cui, imponendo le condizioni $y_l(0^-) = y(0^-) = 1$, $\frac{dy_l(t)}{dt}_{|t=0^-} = \frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$ e $\frac{d^2y_l(t)}{dt^2}_{|t=0^-} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}_{|t=0^-} = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ -c_2 + 2c_3 &= 1 \\ c_2 + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione é data da: $c_1 = 3/2$, $c_2 = -2/3$, $c_3 = 1/6$.

Per quanto riguarda la risposta forzata conviene operare nel dominio delle trasformate. La trasfromata di Laplace dell'ingresso é data da

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right](s) = 1 - \frac{2}{s} = \frac{s-2}{s}$$

Di conseguenza la trasformata di Laplace dell'uscita risulta:

$$Y_f(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right](s) = H(s)U(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}\frac{s-2}{s} = \frac{s-1}{s(s+1)}$$

La risposta forzata nel dominio del tempo si puó trovare dalla scomposizione in fratti semplici

$$Y_f(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1}$$

antitrasformado termine a termine:

$$y_f(t) = \left[-1 + 2e^{-t}\right] \delta_{-1}(t).$$

L'uscita del sistema $y(t)$ all'ingresso dato $u(t)$ con le condizioni iniziali assegnate $y(0^-) = 1$, $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$ e $\frac{d^2y(t)}{dt^2}_{|t=0^-} = 0$ risulta quindi

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \left[-1 + 2e^{-t}\right] \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] L'equazione alle differenze é nella "solita" forma con $n = 1$, $m = 2$. L'equazione caratteristica é

$$z - 0.5 = 0$$

l'unica radice é $\lambda_1 = 0.5$.

Quindi la risposta impulsiva si scrive nella forma:

$$h(k) \quad = \quad d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + c_1\,(0.5)^k\,\delta_{-1}(k-2)$$

I coefficienti d_0, d_1, c_1, si determinano imponendo i primi $3 = \max(n, m+1)$ valori della risposta impulsiva; questi si calcolano direttamente dall'equazione alle differenze imponendo $u(k) = \delta(k)$ e $h(k) = 0$ per $k < 0$. Si trova: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = \frac{3}{2}$.

Imponendo queste condizioni si ottiene immediatamente: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $c_1 = 6$.

ii) [4 punti] Conviene fare i calcoli nel dominio delle trasformate di Fourier.

La trasformata di Fourier del segnale $u(t)$ é data da:

$$U(f) = \Pi\left(\frac{f}{1/2}\right).$$

Ricordando che al campionamento ideale nel dominio del tempo

$$u_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\delta(t-k)$$

corrisponde la ripetizione periodica in frequenza si ottiene:

$$U_c(f) = \mathcal{F}\left[u_c(t)\right](f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(f-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{f-k}{1/2}\right).$$

Per quanto riguarda il segnale e tempo discreto $u(k) = u(t)_{|t=kT, T=1} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, la trasformata di Fourier a tempo discreto é data da:

$$U_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)e^{-j2\pi fk}$$

Si noti che

$$U_c(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\delta(t-k)e^{-j2\pi ft}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)e^{-j2\pi fk} = U_d(f)$$

Usando ora il fatto che la trasformata di Fourier dell'uscita si puó scrivere come prodotto della trasformata di Fourier dell'ingresso per la risposta in frequenza del sistema si ottiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)e^{-j2\pi fk} = Y_d(f) = H(f)U_d(f) = \frac{e^{j2\pi f}+1}{e^{j2\pi f}(e^{j2\pi f}-0.5)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{f-k}{1/2}\right)$$

Esercizio 3. i) [5 punti]

$$H(s) = 100\frac{s^2+9s-10}{s(s^2+160s+10000)}.$$

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -0.1 \cdot \frac{(1+j0.1\omega)(1-j\omega)}{j\omega(1-0.0001\omega^2+2j0.8\omega 0.01)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

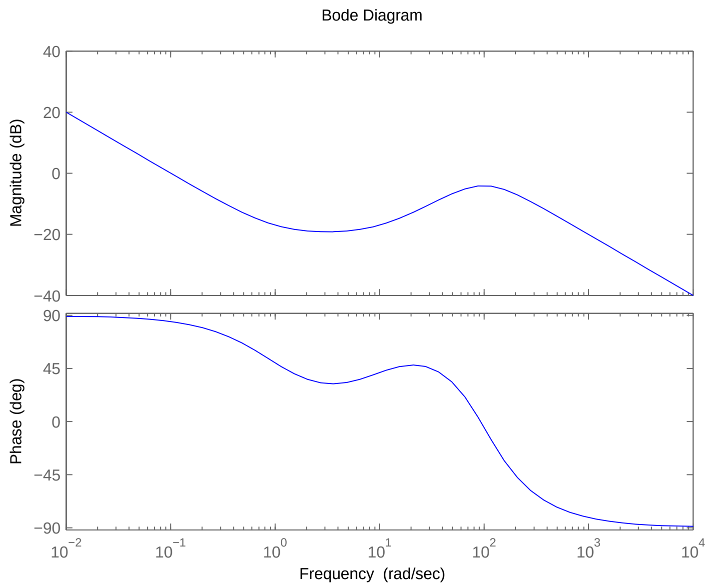

Figura 1. Diagramma di Bode