COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 dicembre 2007

Teoria 1.[5 punti]

Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Si faccia un esempio di un sistema BIBO stabile ma non asintoticamente stabile. Indicando con $h(t)$ la risposta impulsiva del sistema, si dimostri che la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$$

implica la stabilità BIBO.

Teoria 2.[5 punti]

Si dia la definizione di serie di Fourier esponenziale per un segnale a tempo continuo $u(t)$, periodico di periodo T.

Si dimostri che se il segnale $u(t)$ é pari (cioé $u(t) = u(-t)$), allora i coefficienti di Fourier u_k sono reali.

Si descrivano le proprietà dell'approssimazione del segnale $u(t)$ tramite il troncamento della serie di Fourier

$$u_L(t) := \sum_{k=-L}^{L} u_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

nelle vicinanze di un eventuale punto di discontinuità del segnale u(t).

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 dicembre 2007

Esercizio 1.[5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = 100\frac{(s^2 - 20s + 100)}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 10000)}$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{a}{6}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{a^2}{6}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) **[3 punti]** Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 6$:

ii) **[3 punti]** si determini, se possibile, un ingresso limitato in corrispondenza del quale l'uscita forzata risulta limitata.

iii) **[3 punti]** si determini la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) - 0.9y(k - 1) = au(k) + bu(k - 1) \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a e b sono due parametri reali.

i) **[3 punti]** Si calcoli la risposta impulsiva e la risposta in frequenza del sistema.

ii) **[3 punti]** Si trovino valori di a e b affinché la risposta a regime permanente del sistema sia in modulo minore di 1/2 per l'ingresso $u_1(k) = \delta_{-1}(k)$ e in modulo maggiore di 1 per l'ingresso $u_2(k) = (-1)^k\delta_{-1}(k)$.

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 paragrafo 5.1.

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(s) = 100\frac{(s^2 - 20s + 100)}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 10000)}$$

$$H(j\omega) = 10\frac{(1 - j\frac{\omega}{10})^2}{(1 + j\omega 10)\left(1 + 2\frac{1}{100}\frac{\omega}{100} - \frac{\omega^2}{10000}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

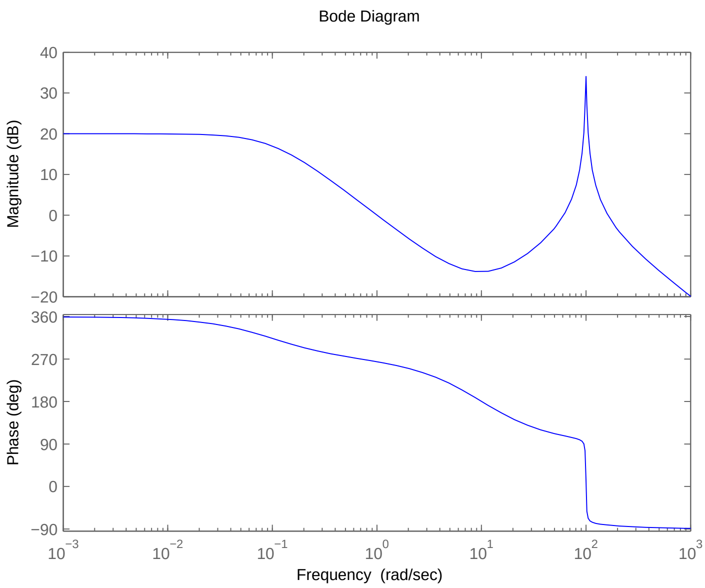

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il polinomio caratteristico risulta $s(s + a/2)(s - a/3)$, le cui radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a/3$ e $\lambda_3 = -a/2$. Avendo una radice in zero il sistema non é mai asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda la BIBO stabilità conviene calcolare la funzione di trasferimento, che risulta

$$H(s) = \frac{s - 1}{(s - a/3)(s + a/2)}$$

$H(s)$ ha sempre almeno un polo a parte reale maggiore o uguale a zero, a meno che non risulti $a/3 = 1$, cioé per $a = 3$ oppure $a = -2$, nel qual caso $H(s)$ diventa, rispettivamente

$$H(s) = \frac{1}{s + 3/2}$$

e

$$H(s) = \frac{1}{s + 2/3}.$$

Entrambi corrispondono a sistemi BIBO stabili.

In conclusione il sistema non é mai asintoticamente stabile, ed é BIBO stabile solo se $a = 3$ oppure $a = -2$.

ii) [3 punti] Per $a = 6$ il sistema non é BIBO stabile. La funzione di trasferimento risulta

$$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+3)}$$

Per ottenere un'uscita limitata é sufficiente scegliere un ingresso che sia limitato e la cui trasformata di Laplace abbia uno zero che cancelli il polo instabile in 2.

Ad esempio

$$U(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

fa al caso nostro.

Infatti, $Y(s)$ risulta

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{s-1}{s(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s}$$

la cui antistraformata di Laplace é

$$y(t) = \left[Ae^{-3t} + Be^{-2t} + C\right]\delta_{-1}(t)$$

che é certamente limitato. L'ingresso cercato, nel dominio del tempo, risulta:

$$u(t) = \left[3e^{-t} - 2\right]\delta_{-1}(t)$$

iii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema é

$$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+3)}$$

Conviene operare nel dominio delle trasformate, espandendo $H(s)$ in frazioni parziali:

$$H(s) = \frac{1}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{4}{5}\frac{1}{s+3}$$

ottendno la risposta impulsiva $h(t)$ per antitrasformazione

$$h(t) = \left[\frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t}\right]\delta_{-1}(t)$$

Esercizio 3.

i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema é $z - 0.9$, di conseguenza la risposta impulsiva ha la forma:

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1(0.9)^k\delta_{-1}(k-1)$$

Calcolando i primi due valori della risposta impulsiva, che soddisfa

$$h(k) - 0.9h(k-1) = a\delta(k) + b\delta(k-1)$$

con condizioni "iniziali" $h(k) = 0$, $k < 0$, si ottiene $h(0) = a$ e $h(1) = 0.9a + b$; di conseguenza i coefficienti sono $d_0 = a$ e $d_1 = \frac{0.9a+b}{0.9}$, cioé:

$$h(k) = a\delta(k) + (0.9a+b)(0.9)^{k-1}\delta_{-1}(k-1)$$

La risposta in frequenza del sistema si ottiene valutando la funzione di trsaferimento $H(z)$ sul cerchio unitario, cioé per $z = e^{j\theta}$. Si ottiene

$$H(e^{j\theta}) = \frac{ae^{j\theta} + b}{e^{j\theta} - 0.9}$$

ii) [3 punti] Le condizioni date sono sulla risposta a regime permanente (il sistema é BIBO stabile) ai segnali

$$u_1(k) = \delta_{-1}(k) = e^{j0k}\delta_{-1}(k)$$

e

$$u_2(k) = (-1)^k\delta_{-1}(k) = e^{j\pi k}\delta_{-1}(k)$$

Utilizzando le proprietà della risposta in frequenza, le risposte a regime permanente sono rispettivamente:

$$y_{1rp}(k) = H(e^{j0})u_1(k) = \frac{a+b}{1-0.9}u_1(k)$$

e

$$y_{2rp}(k) = H(e^{j\pi})u_2(k) = \frac{-a+b}{-1-0.9}u_2(k)$$

Basta quindi trovare a e b in modo che $|10(a+b)| < 1/2$ e $|\frac{b-a}{1.9}| > 1$. Ad esempio $a = -b = 1$ risolvono il problema.