# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
# 9 gennaio 2008

**Teoria 1.[5 punti]** Si enunci e si dimostri il Teorema del Campionamento ideale.

**Teoria 2.[5 punti]** Si dia la definizione di risposta impulsiva per un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto. Si dica quali proprietà del sistema possono essere dedotte dalla risposta impulsiva e si enuncino i relativi criteri.

Si ricavi l'espressione generale della risposta impulsiva per un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
# 9 gennaio 2008

**Esercizio 1.[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(s^2 - 2s + 100)}{s(s^2 + 50s + 1000000)}$$

**Esercizio 2.** Si consideri il segnale a tempo continuo $u(t)$, periodico di periodo $T = 3$, definito nell'intervallo $[0, 3]$ come segue:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \cup [2,3] \\ 2 & t \in (1,2) \end{cases}$$

i) **[2 punti]** Si calcolino i coefficienti di Fourier della serie esponenziale di $u(t)$.

ii) **[3 punti]** Si calcoli la potenza (media) dell'errore che si commette approssimando il segnale $u(t)$ troncando la serie di Fourier al primo termine, cioè utlizzando

$$\hat{u}_1(t) = \sum_{k=-1}^{1} u_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

iii) **[3 punti]** Con riferimento al sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2a\frac{dy(t)}{dt} + a^2 y(t) = u(t),$$

si trovi un valore di $a$ in modo che le componenti del segnale $u(t)$ a frequenza maggiore di $\frac{1}{3}$ $Hz$ siano attenuate (dal sistema lineare) di almeno un fattore 10.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) + (1-a)y(k-1) - ay(k-2) = u(k) + u(k-1) \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove $a$ é un parametro reale.

i) **[2 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) **[2 punti]** Si calcoli, la risposta impulsiva del sistema.

iii) **[3 punti]** Si trovino, se possibile, un ingresso $u(k)$ e condizioni iniziali opportune in modo che $y(k) = (-1)^k$, per $k \geq 0$.

# SOLUZIONI

**Teoria 1.** [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5, paragrafo 6.

**Teoria 2.** [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6 paragrafi 6.3.2, 6.4 e 6.5.

**Esercizio 1.**

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{10000} \frac{\left(1 - j2\frac{1}{10}\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}{j\omega\left(1 + j2\frac{1}{40}\frac{\omega}{1000} - \frac{\omega^2}{1000000}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

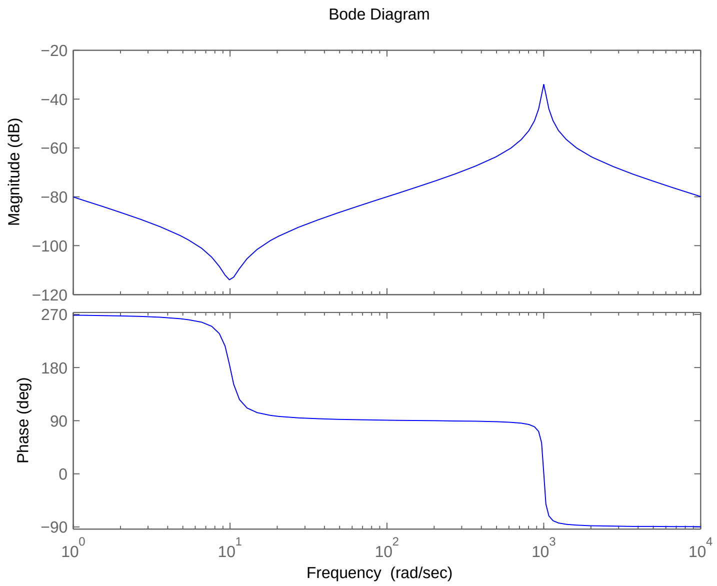


**Figura 1.** Diagramma di Bode.

**Esercizio 2.**

i) [2 punti]

Il segnale $u(t)$ si può scrivere nella forma

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_g(t - 3k)$$

dove il segnale generatore

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

Di conseguenza, indicando con $u_k$ i coefficienti di Fourier della serie esponenziale, e utilizzando la relazione

$$u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

si ottiene

$$u_k = \frac{1}{3} 4\text{sinc}\,(4f)_{|f=\frac{k}{3}} = \frac{4}{3}\text{sinc}\left(\frac{4k}{3}\right)$$

ii) [3 punti] La potenza media del segnale errore $e_1(t) := u(t) - \hat{u}_1(t)$ si può calcolare, usando la relazione

$$\mathcal{P}_{e_1} = \mathcal{P}_u - \mathcal{P}_{u_1}$$

dove si è sfruttata l'ortogonalità (in potenza) dei segnali $\hat{u}_1(t)$ ed $e_1(t)$.

Le due potenze sono facili da calcolare, e si ottiene:

$$\mathcal{P}_u := \frac{1}{3}\int_0^3 |u(t)|^2\, dt = \frac{1+4+1}{3} = 2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{u_1} &= |u_{-1}|^2 + |u_0|^2 + |u_1|^2 \\ &= \tfrac{16}{9}\left[\text{sinc}^2\left(\tfrac{-4}{3}\right) + \text{sinc}^2\,(0) + \text{sinc}^2\left(\tfrac{4}{3}\right)\right] \\ &= \tfrac{16}{9}\left[1 + 2\text{sinc}^2\left(\tfrac{4}{3}\right)\right] \simeq 1.9298\end{aligned}$$

Di conseguenza la potenza dell'errore è

$$\mathcal{P}_{e_1} = \mathcal{P}_u - \mathcal{P}_{u_1} \simeq 0.0702$$

iii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema é

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

e la risposta in frequenza é

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{(j2\pi f - a)^2}$$

Il sistema é BIBO stabile per $a < 0$. Sotto questa ipotesi, i coefficienti di Fourier $y_k$ dell'uscita sono dati, come noto, dalla relazione

$$y_k = H(j2\pi f_k)u_k \quad f_k = \frac{k}{3}$$

Le componenti a frequenza maggiore di $\frac{1}{3}$, cioè $|f_k| > \frac{1}{3}$ sono quelle che corrispondono a $|k| \geq 2$.

Di conseguenza dobbiamo garantire che $u_k$ venga attenuato di almeno $1/10$ per $|k| \geq 2$. Questo succede se $|H(j2\pi f_k)| < 1/10\ \forall k : |k| \geq 2$. Poiché $|H(j2\pi f)|$ é, per frequenze positive, una funzione monotona decrescente della frequenza, basta verificare che questo succeda per $k = 2$ (il modulo é una funzione pari della frequenza).

Di conseguenza basta imporre che

$$\left|H\left(j2\pi\frac{2}{3}\right)\right| < \frac{1}{10}$$

cioé

$$\frac{1}{4\pi^2\frac{4}{9} + a^2} < \frac{1}{10}$$

e quindi

$$a^2 > 10 - 4\pi^2 \frac{4}{9}$$

Ovviamente questa condizione é verificata per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Quindi qualunque valore di $a$ per cui il sistema é BIBO stabile soddisfa alle specifiche richieste.

**Esercizio 3.**

i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema é $z^2+(1-a)z-a = (z+1)(z-a) = 0$. Le radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = a$. Di conseguenza il sistema NON é asintoticamente stabile per ogni scelta di $a$.

La funzione di trasferimento risulta

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{(z+1)(z-a)} = \frac{z}{(z-a)}$$

Il sistema é BIBO stabile se e solo se i poli di $H(z)$ sono in modulo strettamente minore di 1, e quindi se e solo se $|a| < 1$.

ii) [2 punti] La funzione di trasferimento del sistema, calcolata al punto precedente, é

$$H(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Si riconosce immediatamente che $H(z)$ é la trasformata zeta della sequenza

$$h(k) = a^k \delta_{-1}(k)$$

che quindi é la risposta impulsiva del sistema.

iii) [3 punti]

Una possibile soluzione di può trovare osservando che l'uscita desiderata ha trasformata zeta

$$Y(z) = \frac{z}{z+1}$$

Di conseguenza scegliendo come ingresso $u(k)$ una sequenza la cui trasformata zeta é

$$U(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z}{z+1}\frac{z-a}{z} = \frac{z-a}{z+1}$$

e come condizioni iniziali $y(-1) = y(-2) = 0$ si ottiene l'uscita desiderata per $k \geq 0$.

L'ingresso desiderato si ottiene facendo l'antitrasformata zeta di $U(z)$ come segue.

Si definisce

$$U_1(z) := \frac{1}{z}U(z) = \frac{z-a}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$$

con $A = -a$, $B = a+1$, cioé

$$U(z) = -a + (a+1)\frac{z}{z+1}$$

Quindi la sequenza $u(k)$ ha la forma:

$$u(k) = -a\delta(k) + (a+1)(-1)^k \delta_{-1}(k)$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'evoluzione libera del sistema ha la forma generale:

$$y_\ell(t) = c_1(-1)^k + c_2 a^k \quad \text{se} \quad a \neq -1$$

e

$$y_\ell(t) = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k \quad \text{se} \quad a = -1$$

In entrambi i casi, imponendo le condizioni iniziali

$$y(-1) = -1 \quad y(-2) = 1$$

si ottiene $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$.

Di conseguenza, scegliendo $u(k) = 0$ con condizioni iniziali $y(-1) = -1$, $y(-2) = 1$ si ottiene l'uscita desiderata $y(k) = (-1)^k$.