PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO

Si basa sulle conoscenze a priori di alcune caratteristiche dei segnali di disturbo, w, e del segnale di riferimento, r.

I casi più comuni sono
1) riferimento e disturbo costanti (controllo integrale)
2) " " " sinusoidali

Modello

non necessariamente $B=G$

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^p,\ \underbrace{w \in \mathbb{R}^d}_{\text{disturbo}},\ y \in \mathbb{R}^e,\ \underbrace{r \in \mathbb{R}^e}_{\text{riferimento}}$$

$$y = Cx$$

vogliamo inseguire riferimento $r(t)$, cioè $y(t) \equiv r(t)$ a regime

Definiamo $e \triangleq y - r = Cx - r$ errore di inseguimento

sappiamo inoltre che r e w soddisfano le seguenti eq. diff:

$$(1)\quad r^{(m)} + \alpha_{m-1} r^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 r = 0$$

$$(2)\quad w^{(m)} + \alpha_{m-1} w^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 w = 0$$

stessi coefficienti!

se $\dot{r} + 0 \cdot r = 0 \Rightarrow r = \text{cost}$
$\dot{w} + 0 \cdot w = 0 \Rightarrow r = \text{cost}$

se $\ddot{r} + \omega_m^2 r = 0 \Rightarrow r = A \sin(\omega_m t + \phi)$
$\ddot{w} + \omega_m^2 r = 0 \Rightarrow w = B \sin(\omega_m t + \varphi)$

ampiezze e fasi sconosciute

Dalle definizione di errore e si ha

$$e^{(m)} = y^{(m)} - r^{(m)} = Cx^{(m)} - r^{(m)} \Rightarrow \quad (3)\quad \begin{aligned} r^{(m)} &= Cx^{(m)} + e^{(m)} \\ r^{(m-1)} &= Cx^{(m-1)} + e^{(m-1)} \end{aligned}$$

Se sostituiamo (3) in (1) otteniamo

$$C\underbrace{\left(x^{(m)} + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 x\right)}_{\triangleq\, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ nuovo stato}} - \left(e^{(m)} + \alpha_{m-1} e^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 e\right) = \underbrace{r^{(m)} + \alpha_{m-1} r^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 r}_{=0 \text{ per } (1)}$$

$$\boxed{\xi \triangleq x^{(m)} + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 x}$$

Quindi

$$\dot{\xi} = x^{(m+1)} + \alpha_{m-1} x^{(m)} + \dots + \alpha_0 x^{(1)} = \left(Ax^{(m)} + Bu^{(m)} + Gw^{(m)}\right) + \alpha_{m-1}\left(Ax^{(m-1)} + Bu^{(m-1)} + Gw^{(m-1)}\right) + \dots + \alpha_0\left(Ax + Bu + Gw\right)$$

$$= A\underbrace{\left(x^{(m)} + \alpha_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 x\right)}_{=\xi \text{ per definizione}} + B\underbrace{\left(u^{(m)} + \alpha_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 u\right)}_{\triangleq\, u_\xi \in \mathbb{R}^p} + G\underbrace{\left(w^{(m)} + \alpha_{m-1} w^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 w\right)}_{=0 \text{ per } (2)}$$

$$\boxed{u_\xi \triangleq u^{(m)} + \alpha_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 u} \qquad \text{Quindi} \quad \boxed{\dot{\xi} = A\xi + Bu_\xi}$$

il disturbo w è scomparso!

Consideriamo il nuovo stato aumentato $z = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \hline \xi \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \\ \\ \\ \\ p \end{array} \end{array} \in \mathbb{R}^{(m+n)}$

Quindi

$$\dot{z} = A_z z + B_z u_\xi$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(m)} \\ \hline \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \cdots 0 & \\ 0\ 0\ 1\ 0 \cdots 0 & 0 \\ O \quad\quad 1 & \\ -\alpha_0 \cdots -\alpha_{m-1} & C \\ \hline O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \hline \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline B \end{bmatrix} u_\xi$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \cdots 0 & \\ O \quad\quad 0 & 0 \\ 0 \cdots 0\ 1 & \\ -\alpha_0 \cdots -\alpha_{m-1} & C \\ \hline O & A \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \\ \\ \\ \\ n \end{array}$$

$$B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline B \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \\ n \end{array}$$

se (A_z, B_z) controllabile $\exists\ K_z$ tale che $u_\xi = -K_z z$ rende il sistema in catena chiusa $\dot{z} = (A_z - B_z k_z) z$ stabile (esponenzialmente) quindi $z \to 0$. Se $z \to 0$ allora anche $e \to 0 \Rightarrow e = y(t) - r(t) \to 0$

$z = \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\boxed{\begin{array}{c} y(t) \to r(t) \\ \text{asintoticamente} \end{array}}$

Quando è (A_z, B_z) controllabile? Quando rango $[sI - A_z | B_z] = n + m \quad \forall s$

ovvero quando rango $\begin{bmatrix} s\ 1\ 0 \cdots & & \\ \quad\quad 0 & 0 & 0 \\ \quad\quad 1 & & \\ \alpha_0 \cdots \alpha_{m-2}\ s+\alpha_{m-1} & -C & 0 \\ \hline O & Is - A & B \end{bmatrix} = m + n$

Condizioni necessarie e sufficienti sono 1) (A, B) controllabile

2) radici di $s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \alpha_0 s = 0$ non sono zeri di (A, B, C)

Come trovo $u(t)$ da u_ξ e e una volta determinato K_Z?

$$u_\xi = -[\underbrace{k_0 \cdots k_{m-1}}_{\in\mathbb{R}^m} \,|\, \underbrace{K_\xi}_{\mathbb{R}^n}] \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \xi \end{bmatrix}$$

dalla definizione di u_ξ

dalla definizione di ξ

$$u^{(m)} + \alpha_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 u = -k_0 e - \dots - k_{m-1}e^{(m-1)} - K_\xi\left(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 x\right)$$

Quindi

$$\Rightarrow (\underbrace{u + K_\xi x}_{K_\xi \in\mathbb{R}^{1\times m}})^{(m)} + \alpha_{m-1}(u+K_\xi x)^{(m-1)} + \dots + \alpha_0(u+K_\xi x) = -k_0 e - \dots - k_{(m-1)}e^{(m-1)}$$

Definiamo $u' \triangleq u + K_\xi x$ ($\in\mathbb{R}^p$) e facciamo le trasformate di Laplace di
cioe $U'(s) = \mathcal{L}[u'(t)]$ $\quad E(s) \triangleq \mathcal{L}[e(t)]$

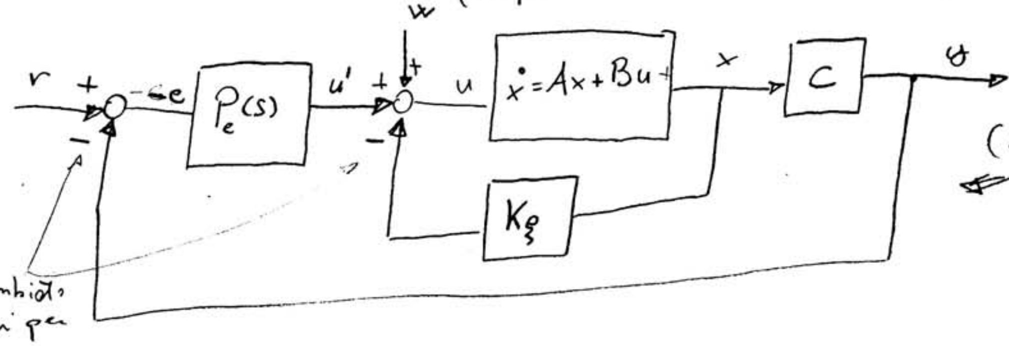
$$\Rightarrow U'(s) = -\underbrace{\frac{k_{m-1}s^{m-1} + \dots + k_0}{s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \dots + \alpha_0}}_{\triangleq P_e(s)} E(s) = -P_e(s)E(s)$$

$P_e(s)$ funzione trasferim. da errore e a ingresso $u'(t)$.

ma $u(t) = u' - K_\xi x$ quindi schema a blocchi del sistema di controllo è

e $e(t) = y - r$

w (in questo caso abbiamo $G = B$ ma non necessario)



(nel caso SISO)

cambiato segni per non avere $-P_e(s)$ e $-K_\xi$

(Nota: Vedere Franklin 7.9.2 per ulteriori esempi)