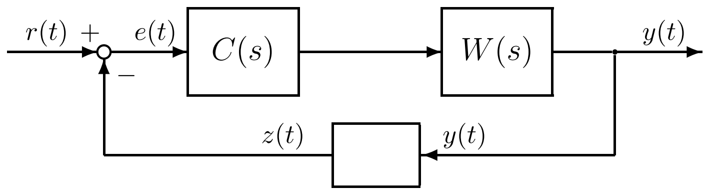
Corso di laurea in Ingegneria INFORMATICA
Compitino di Controlli Automatici I
8 Giugno 2002

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e di ogni calcolo fornire una traccia.

Esercizio 1–[punti 15]

Si consideri il sistema retroazionato



$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

a. Sia $C(s) = \frac{1}{s+2}$. Si tracci il diagramma di Nyquist di $C(s)W(s)$ determinando le eventuali intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti.

b. Sia $C(s) = \frac{K}{s+2}$, dove $K > 0$, e supponendo inoltre che $z(t) = y(t)$, determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa e' BIBO stabile, utilizzando il criterio di Nyquist.

c. Si supponga ora $C(s) = 1$ che $z(t) = h(y(t))$, dove $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(0) = 0$ e $1 < h(y)/y < 2$ per $y \neq 0$. Utilizzando il criterio del cerchio verificare se il sistema in catena chiusa e' asintoticamente stabile.

c'.(Facoltativo: da fare al posto di c.) Si supponga ora $C(s) = K$, $K > 0$, che $z(t) = h(y(t))$, dove $h(\cdot)$ è una funzione tale che $h(0) = 0$ e $1 < h(y)/y < 2$ per $y \neq 0$. Utilizzando il criterio del cerchio, determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa e' asintoticamente stabile.

d. Si supponga infine che $C(s) = \sqrt{20}$ e che $z(t) = y(t - T)$, dove $T \geq 0$. Determinare per quali valori di T il sistema in catena chiusa e' BIBO stabile.

Esercizio 2–[punti 8]

Si consideri lo schema precedente dove $z(t) = y(t)$ e

$$W(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

a. Determinare $C(s)$ tale che il sistema in catena chiusa abbia tutti i poli in -1.

b. Determinare inoltre $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia tutti i poli in -1 e che l'errore a regime in risposta al gradino sia nullo (in questo caso si richiede solo di impostare le equazioni).

Esercizio-3 [7 pt]

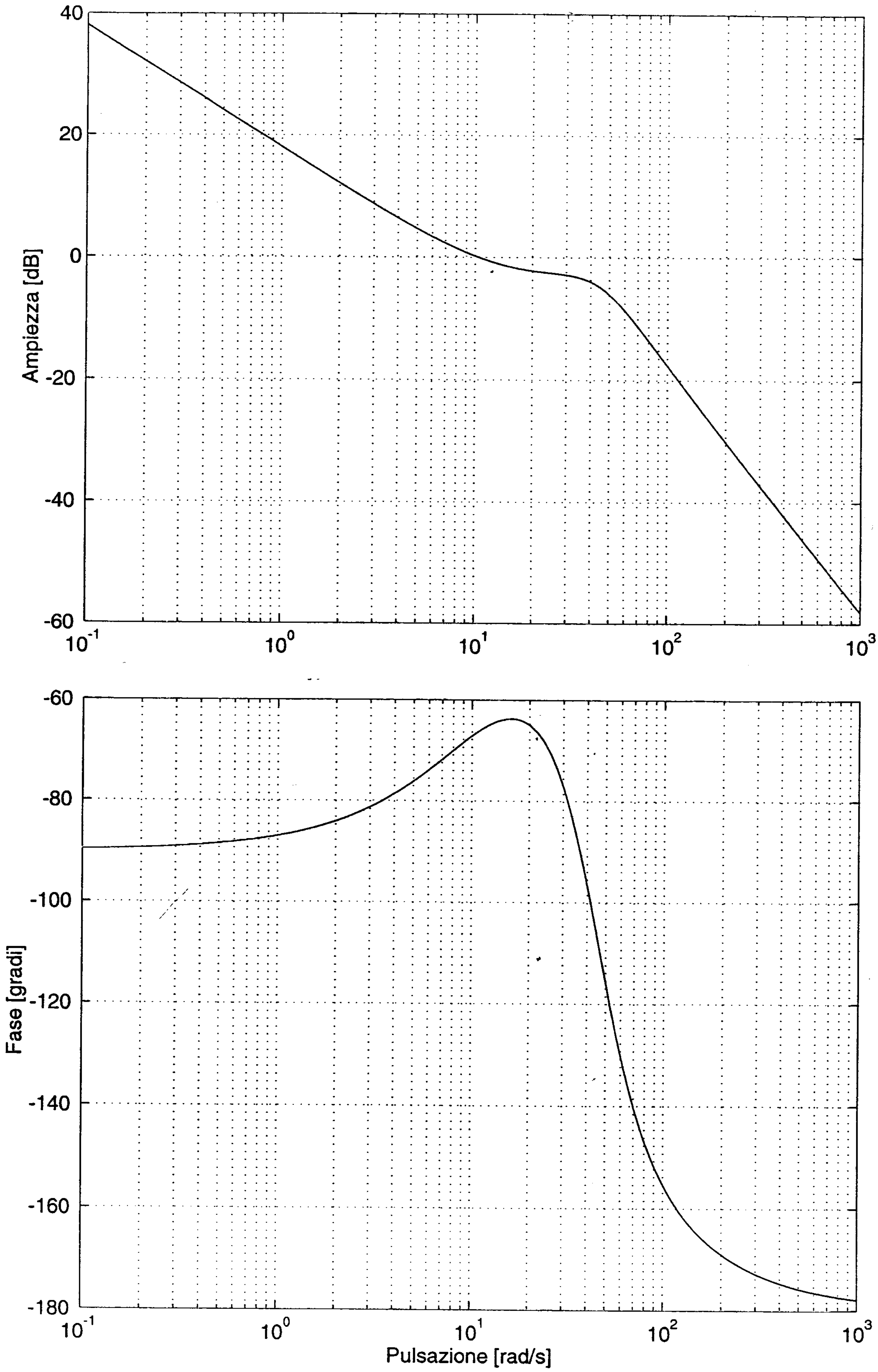
Si consideri un sistema avente diagramma di Bode mostrato in figura. Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

a. errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,02$;

b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 60$ rad/s;

c. margine di fase $m_\varphi = 40^o$.

Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.


40
20
0
-20
-40
-60
Ampiezza [dB]
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
Fase [gradi]
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Pulsazione [rad/s]

$\boxed{\text{ES 1}}$

a) $C(s)W(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s(s^2+3s+2)}$

$s = j\omega$

$$= \frac{1}{j\omega(2-\omega^2+3j\omega)} = \frac{2-\omega^2-3j\omega}{j\omega[(2-\omega^2)^2+9\omega^2]}$$

$$Re = -\frac{3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

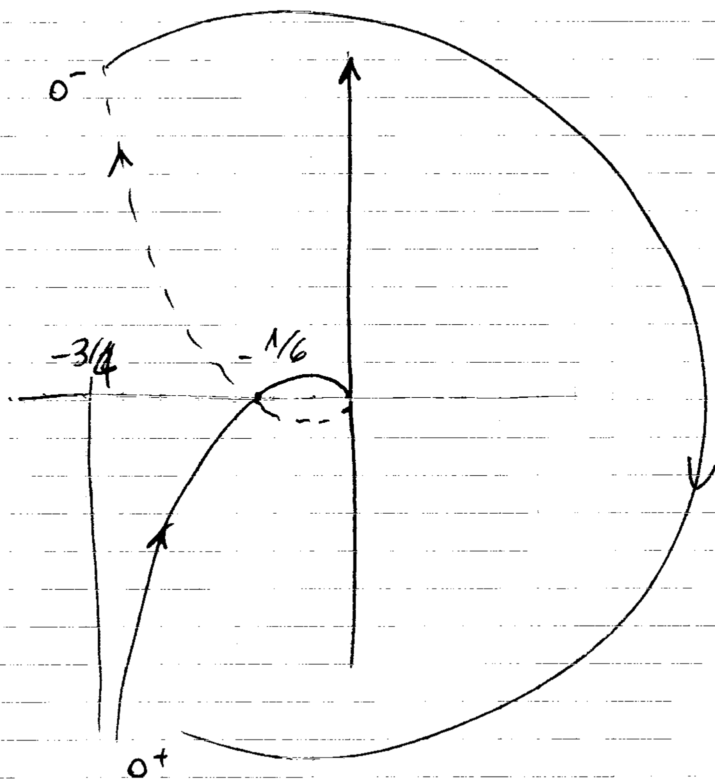
$$Im = -\frac{2-\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

$\omega = \sqrt{2}$ $\quad Im = 0$

$\quad Re = -\dfrac{3}{9 \cdot 2} = -\dfrac{1}{6}$

$\omega = 0^+$ $\quad Im = -\infty$

$\quad Re = -\dfrac{3}{4}$



b) Stabilità $\quad P = 0$

$\quad Z = -N$

$-\dfrac{1}{k} < -\dfrac{1}{6} \rightarrow N = 0 \rightarrow Z = 0$ stabile $\quad 0 < k < 6$

$-\dfrac{1}{6} < -\dfrac{1}{k} < 0 \rightarrow N = -2 \rightarrow Z = 2$ instabile $\quad k > 6$

c) $F(s) = \dfrac{1+k_2 CW}{1+k_1 CW} = \dfrac{1+2\frac{k}{s(s+1)}}{1+\frac{k}{s(s+1)}} = \dfrac{s^2+s+2k}{s^2+s+k}$ $\quad k \geq 0$

Dobbiamo verificare per quali valori di k $F(s)$ è Positiva reale
$F(s)$ ha poli in $Re\, s < 0$. Basta verificare che $Re\, F(j\omega) \geq 0$ $\forall \omega$.

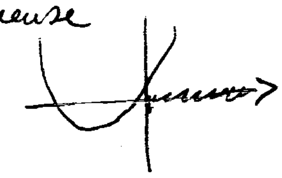
$$F(j\omega) = \frac{(2k-\omega^2)+j\omega}{(k-\omega^2)+j\omega} = \frac{(2k-\omega^2)(k-\omega^2)+\omega^2+j(\text{—})}{\underbrace{(k-\omega^2)^2+\omega^2}_{\leftarrow \text{ positivo}}}$$

$$Re\, F(j\omega) \geq 0 \iff \underbrace{(2k-x)(k-x)+x}_{f(x)} \geq 0 \quad \forall x = \omega^2 \geq 0$$

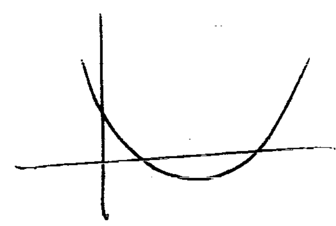
$f(x) = x^2 + (1-3k)x + 2k^2 \geq 0 \qquad \forall x \geq 0$

Distinguiamo due casi

(i) Se $0<k<1/3$ in $f(x)$ ci sono due permanenze
quindi se $f(x)$ ha zeri reali, questi sono negativi
e quindi per $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$



(ii) Se $k > 1/3$, consideriamo il discriminante dell'equazione
di II grado $\Delta = (1-3k)^2 - 8k^2 = k^2 - 6k + 1$
Questo è ~~positivo~~ negativo in $[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$
e quindi lì la parabola è sempre positiva
Fuori dall'intervallo $[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$ l'equazione
ha due radici reali che sono positive
dato che abbiamo in questo caso 2 variazioni
e quindi $f(x)$ non è $\geq 0 \quad \forall x$.



In conclusione $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ se

$$k \in [0, \tfrac{1}{3}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}] = [0, 3+\sqrt{2}]$$

c) $k=1$ appartiene all'intervallo $[0, 3+\sqrt{2}]$.
Infatti in questo caso $f(x) = x^2 - 2x + 2$
che è facile verificare è $\geq 0 \quad \forall x \geq 0$

d) Sappiamo che vale la formula

$T \leq \frac{m_\varphi}{\omega_a}$ dove m_φ margine fase
e ω_a pulsazione att. di $C(s)W(s)$

$|C(j\omega_a)W(j\omega_a)|^2 = 1 \qquad \frac{20}{\omega_a^2(1+\omega_a^2)} = 1 \qquad \omega_a^4 + \omega_a^2 - 20 = 0$

$\omega_a^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases} \qquad \omega_a = 2$

$m_\varphi = \pi + \angle C(j\omega_a)W(j\omega_a) = \pi - \frac{\pi}{2} - \angle(1+2j) = 0.46$

$\boxed{T \leq 0.23}$

Es 2

a) $W(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)} = \dfrac{1}{s^2-2s+1}$ strettamente proprio

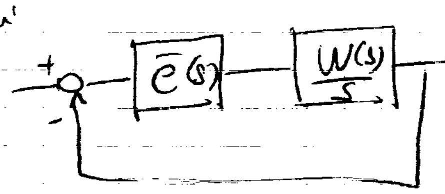
$n = \text{grado}(a(s)) = 2$

Il denominatore della catena chiusa ha grado $2n-1$ con zeri in -1 ed è quindi $(s+1)^3 = s^3+3s^2+3s+1$

$$C(s) = \frac{x_1 s + x_0}{y_1 s + y_0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C(s) = \frac{12s-4}{s+5}$$

b) Se vogliamo avere errore nullo allo [illegible] e gradino dobbiamo avere ~~[illegible]~~ polo nell'origine in $C(s)W(s)$.
$W(s)$ non ha poli nell'origine. Quindi
$C(s) = \dfrac{\bar{C}(s)}{s}$ e lo schema diventa



Applichiamo la solita tecnica alla funzione di trasferimento

$\dfrac{W(s)}{s} = \dfrac{1}{s^3-2s^2+s}$ $\qquad n = 3 \qquad 2n-1 = 5$

il denominatore è quindi
$(s+1)^5 = s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1$

$$C(s) = \frac{x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -18 \\ 49 \\ 23 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$C(s) = \frac{1}{s}\,\frac{49s^2-18s+1}{23s^2+7s+1}$$

ES 3

Dal diagramma di Bode si desume che $G_p(s)$ ha un polo nell'origine (pendenza iniziale di -20 db/dec) e che il guadagno di Bode è circa 20 db

$$G_p(s) = \frac{\hat{G}_p(s)}{s} \qquad \hat{G}_p(0) \cong 20db \Rightarrow \hat{G}_p(0) \cong 10$$

Inoltre si può notare che $|G_p(60j)| \simeq -10db = 0.32$

$$\angle G_p(60j) \simeq -130°$$

Quindi poiché si richiede $h=1$ poli complessivi nell'origine, si ha

$$h_c = h - h_p = 0$$

$$k_c = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\hat{G}(0)} = 5 \qquad \Rightarrow \hat{W}(s) = 5\, G_p(s)$$

$$|\hat{W}(j60)| = 5 \cdot 0.32 \simeq 1.6 \qquad c = \frac{1}{1.6} \simeq 0.6 < 1$$

attenuare

$$\angle \hat{W}(j60) = \angle G_p(j60) = -130°$$

$$m_\varphi^\circ = 180° + \angle \hat{W}(j60) = 50° \qquad \Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = -10°$$

ritardare

Serve una rete ritardatrice che la funzione di trasferimento

$$C_r(s) = \frac{1+sT}{1+s m T} \qquad \begin{matrix} T>0 \\ m>1 \end{matrix}$$