Prova Scritta di Controlli Automatici del 2.7.2002
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ______________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio-1 [7 pt]

Sia

$$W(s) = \frac{Ks}{(s-1)^2(s+p)}$$

la trasferenza della catena diretta di un sistema a catena chiusa con retroazione unitaria.

1. Tracciate il luogo delle radici al variare di $K \geq 0$ supponendo che $p = 10$ (Calcolare eventuali punti doppi, asintoti e intersezioni asse immaginario).
2. Tracciate il luogo delle radici al variare di $p \geq 0$ supponendo che $K = 1$ (Calcolare angoli di uscita dai poli e zeri).
3. Calcolare i valori di $p > 0$ tale per cui il luogo delle radici ha un punto triplo.

Esercizio-2 [6 pt]

Sia

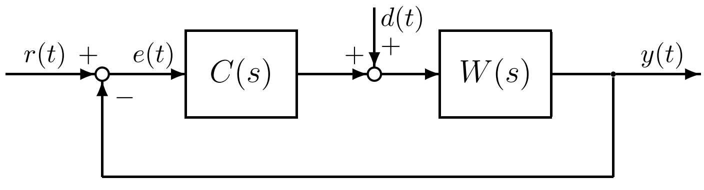
$$W(s) = K\frac{s-1}{s(s^2+3s+9)}$$

la trasferenza della catena diretta di un sistema a catena chiusa con retroazione unitaria.

1. Tracciate il diagramma di Bode di $W(s)$ per $K = 1$ (Calcolare le coordinate dei punti di spezzamento).
2. Tracciate il diagramma di Nyquist di $W(s)$ per $K = 1$ (calcolare eventuali asintoti e le intersezioni con gli assi).
3. Impiegando il criterio di Nyquist, determinare il numero di poli instabili del sistema a catena chiusa al variare di K.

Esercizio-3 [6 pt]

Si consideri lo schema



dove

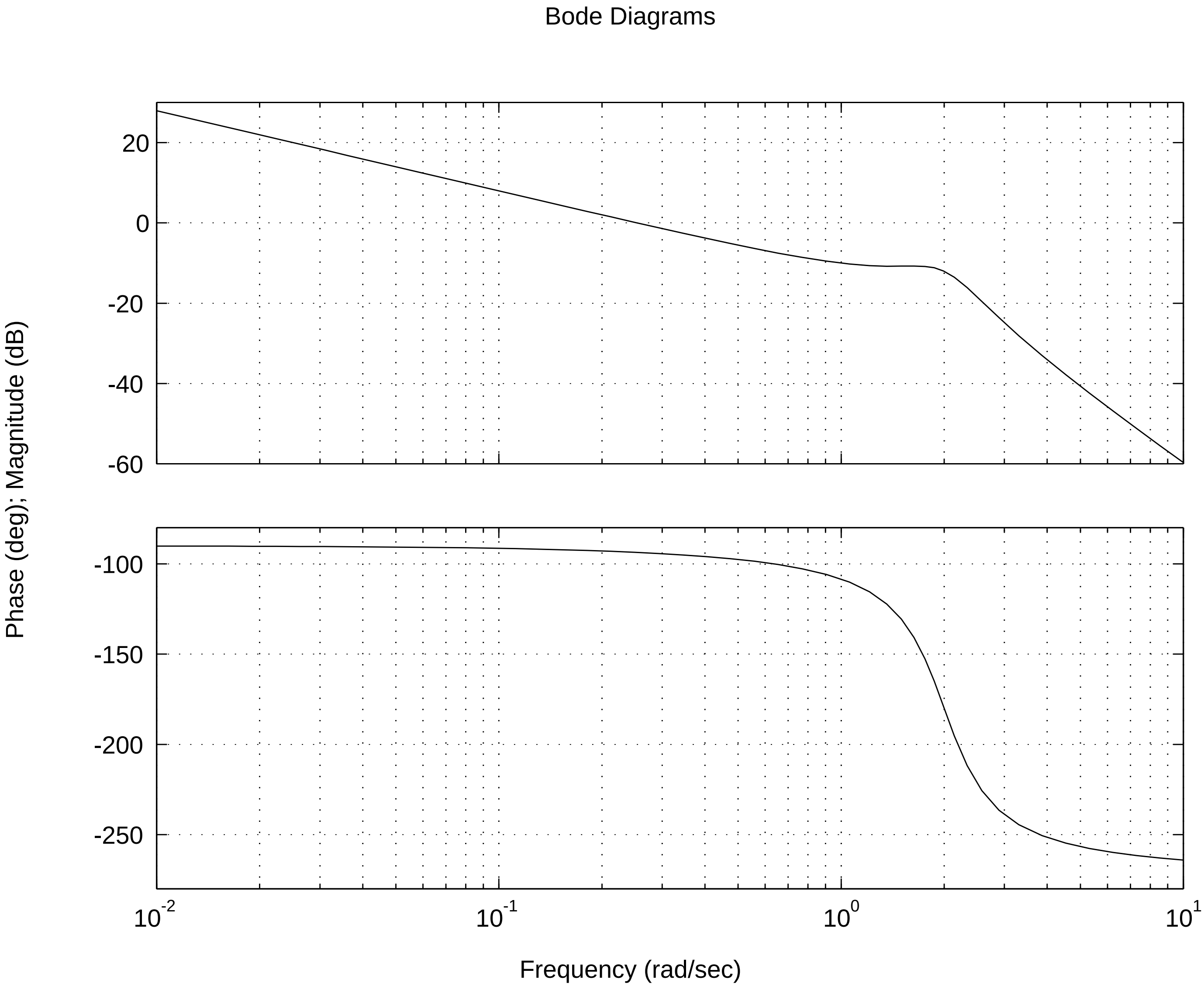
$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad W(s) = \frac{s^2+s+12}{s^2+a}$$

e dove H e K sono due parametri reali.

1. Si determini il valore del parametro a sapendo che la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ contiene il modo $\sin(3t)$.
2. Determinare il valore di K che il sistema retroazionato reagisca a un segnale di ingresso $d(t) = \cos(3t)$ con un'uscita a regime $y(t) = \cos(3t + \frac{\pi}{2})$.
3. Si supponga ora che K sia variabile. Supponiamo inoltre che $r(t) = 5$ e $d(t) = t$, $\forall t \geq 0$. Determinare l'uscita a regime $y(t)$ corrispondente, al variare di $K \geq 0$.

Esercizio-4 [6 pt]

Si consideri un sistema avente diagramma di bode mostrato in figura



Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore $C(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

a. errore a regime nullo in risposta al gradino unitario ed errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,4$;

b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 2$ rad/s;

c. margine di fase $m_\varphi = 45^o$.

Si richiede di determinare il tipo di rete compensatrice (ritardatrice, anticipatrice, a sella) riportandone la funzione di trasferimento senza calcolarne esplicitamente i parametri.

Esercizio 5–[punti 5]

Si consideri lo schema a blocchi precedente dove

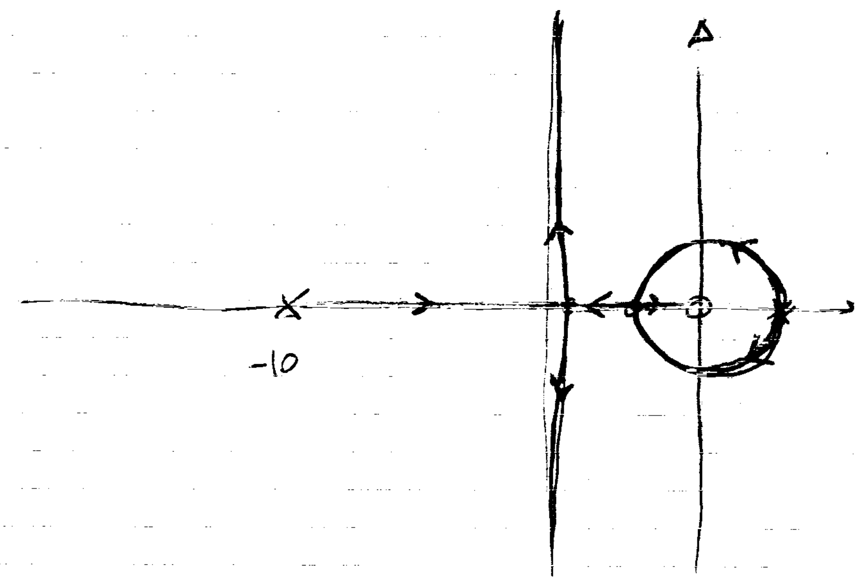
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2}.$$

1. Determinare un compensatore $C(s)$ tale che il sistema a catena chiusa abbia poli in -1.
2. Determinare un compensatore $C(s)$ tale che il sistema a catena chiusa abbia poli in -1 e tale che nel sistema a catena chiusa l'errore a regime in risposta al gradino sia nullo (E' sufficiente impostare i calcoli).

ES.1

1) $(s-1)^2(s+10)+ks=0$

$s^3+8s^2-19s+10+ks=0$



Asintoti: $\theta_a = \pm\frac{\pi}{2}$

$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -4$

Punti doppi:

$$\begin{cases} (s-1)^2(s+10)+ks=0 \\ 2(s-1)(s+10)+(s-1)^2+k=0 \end{cases}$$

$K=-(s-1)[3s+19]$

$(s-1)^2(s+10)-(s-1)(3s+19)s=0$

$(s-1)[s^2+9s-10-3s^2-19s]=0$

$(s-1)(-2s^2-10s-10)=0$

$s_{12} = -3{,}6\ ,\ -1{,}4$

Intersezione asse immaginario

tabella ROUTH

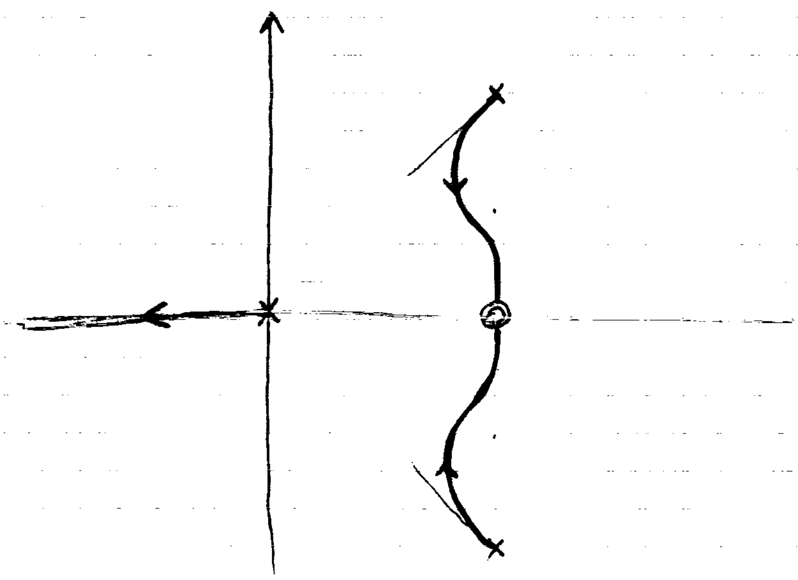
1	$k-19$
8	10
$k-\frac{43}{2}$	
10	

$k=\frac{43}{2} \rightarrow 8s^2+10=0$

$s_{12}=\pm j\,1{,}1$

2) $(s-1)^2(s+p)+s = (s^2-2s+1)(s+p)+s = (s^2-2s+2)s + (s-1)^2 p = 0$

$s_{1,2} = 1 \pm j$



Angolo uscita da $p_k = 1+j$

$$\beta_k = \sum_{i \neq k} \angle p_k - p_i - \sum_i \angle p_k - z_i + \pi$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

3) Punto triplo è soluzione del sistema

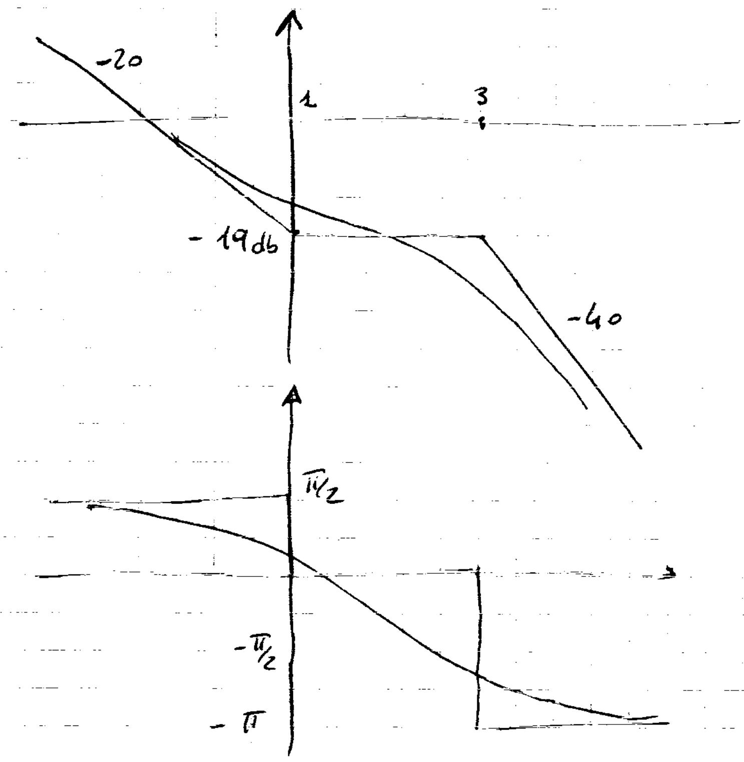
$$\begin{cases} (s-1)^2(s+p) + ks = 0 \\ 2(s-1)(s+p) + (s-1)^2 + k = 0 \\ 4s + p - 1 + 2s - 2 = 0 \end{cases} \qquad p = -6s+3$$

$$\begin{cases} (s-1)(-5s+3) + ks = 0 \\ (s-1)(-9s+5) + k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k = (s-1)(9s-5) \\ (s-1)(4s^2+3s-3) = 0 \end{array}$$

$s_1 = 1 \qquad s_2 = 0.56 \qquad s_3 = -1.3$

$p_1 = -3 \qquad p_2 = -0.4 \qquad \boxed{p_3 = 11}$ unico positivo.

$\boxed{ES.2}$



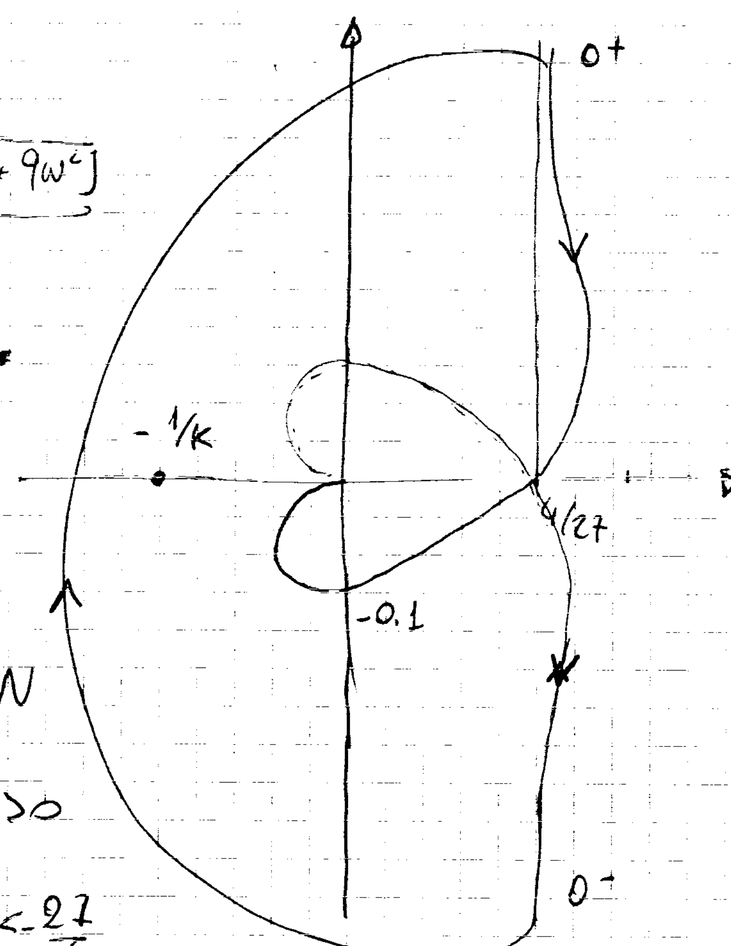
1) $W(s) = -\frac{1}{9}\,\frac{1-s}{s\left(1+\frac{1}{3}s+\frac{s^2}{9}\right)}$

$\omega_n = 3$ $\qquad |K_{Bode}| = \left|\frac{1}{9}\right|_{db} = -19$

$T = 1$

2) $W(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega\left[(9-\omega^2)^2+9\omega^2\right]}$

$= \underbrace{\frac{12-\omega^2}{(9-\omega^2)^2+9\omega^2}}_{Re} + j\,\underbrace{\frac{9-4\omega^2}{\omega\left[(9-\omega^2)^2+9\omega^2\right]}}_{Im}$



$Im = 0 \qquad \omega = \frac{3}{2} \qquad Re = \frac{4}{27}$

$Re = 0 \qquad \omega = \sqrt{12} \qquad Im = -0.1$

$\omega = 0^+ \qquad Re = \frac{12}{81} = \frac{4}{27} = 0.15$

3) Si noti che $P = 0 \Rightarrow Z = -N$

$-\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$, $K > 0$

$0 < -\frac{1}{k} < \frac{4}{27} \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$, $K < -\frac{27}{4}$

$-\frac{1}{k} > \frac{4}{27} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$, $-\frac{27}{4} < K < 0$

$\boxed{\text{Es. 3}}$

1) modo $\sin 3t$ $\Rightarrow$ poli $= \pm 3j$ $\Rightarrow$ den $= s^2+9$

2) $T_{dy}(s) = \dfrac{W}{1+CW} = \dfrac{s(s^2+s+12)}{s(s^2+9)+k(s^2+s+12)}$

$|T_{dy}(3j)| = 1$ $\quad \left| \dfrac{3j(12-9+3j)}{\cancel{3j(-9+9)} + k(12-9+3j)} \right| = \left| \dfrac{3j}{k} \right| = 1 \quad k = \pm 3$

$\angle T_{dy}(3j) = \dfrac{\pi}{2} \qquad \angle \dfrac{3j}{k} = \pi/2 \qquad k > 0 \quad \Rightarrow k = 3$

3) Stabilità $\quad s^3 + 9s + k(s^2+s+12) = 0$

1	9+k
k	12k
k-3	
12k	

$\boxed{k > 3}$

$T_{ry}(s) = \dfrac{CW}{1+CW} = \dfrac{k(s^2+s+12)}{s(s^2+9)+k(s^2+s+12)}$

Sovrapposizione degli effetti

$r(t) = 5,\ d(t) = 0 \qquad y(t) = T_{ry}(0)\,5 = 5$

$r(t) = 0,\ d(t) = t \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\, T_{ry}(s) \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{12}{12k} = \dfrac{1}{k}$

$y(t) = 5 + \dfrac{1}{k}$

$\boxed{\text{ES. 4}}$ Il sistema ha già un polo nell'origine $h_p = 1$
e guadagno di Bode $\hat{G}_p(0) \cong -10\,db = 0,3$

$h = 1 \Rightarrow h_c = h - h_p = 0$

$$K_c = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{G_p(0)} = \frac{10}{4}\,\frac{10}{3} = 8.3$$

$|G_c(2j)| \cong -10\,db = 0,3$
$\angle G_c(2j) \cong -180°$

$\hat{W}(s) = K_c\, G_c(s) = 8.3 \cdot G_c(s)$

$|\hat{W}(2j)| = 8.3\,|G_c(2j)| = 2.5$

$c = \frac{1}{|\hat{W}(2j)|} = 0.4 < 1$ attenuare

$m_\varphi^\circ = 180° + \angle \hat{W}(2j) = 0$

$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = 45° > 0$ anticipare

Abbiamo bisogno di una rete a sella

$\boxed{\text{ES 5}}$ 1) Si tratta di un compensatore a 1 parametro

$n = 2$ $\qquad Q(s) = s^2+2$

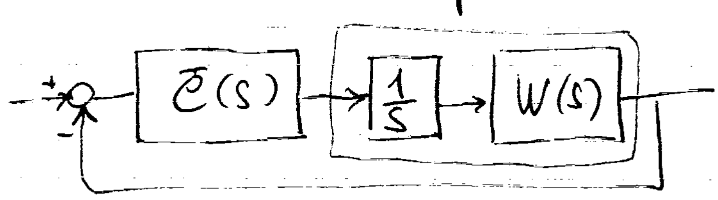
$\qquad\qquad b(s) = 1$

Il denominatore della funzione di trasferimento a catena chiusa deve avere grado $2n-1 = 3$ $\Rightarrow (s+1)^3 = s^3+3s^2+3s+1$

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad \text{con} \quad X(s) = x_1 s + x_0, \quad Y(s) = y_1 s + y_0$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C(s) = \frac{s-5}{s+3}$$

2) Dobbiamo imporre un polo nell'origine nel compensatore $C(s) = \frac{\bar{C}(s)}{s}$



$$\bar{W}(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s^3+2s}$$

$n = 3$ $\qquad 2n-1 = 5$ $\qquad (s+1)^5 = s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C(s) = \frac{-11s+1}{s^2+5s+8}$$