Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- II Compitino e I appello di Fondamenti di Automatica del 7/12/2006

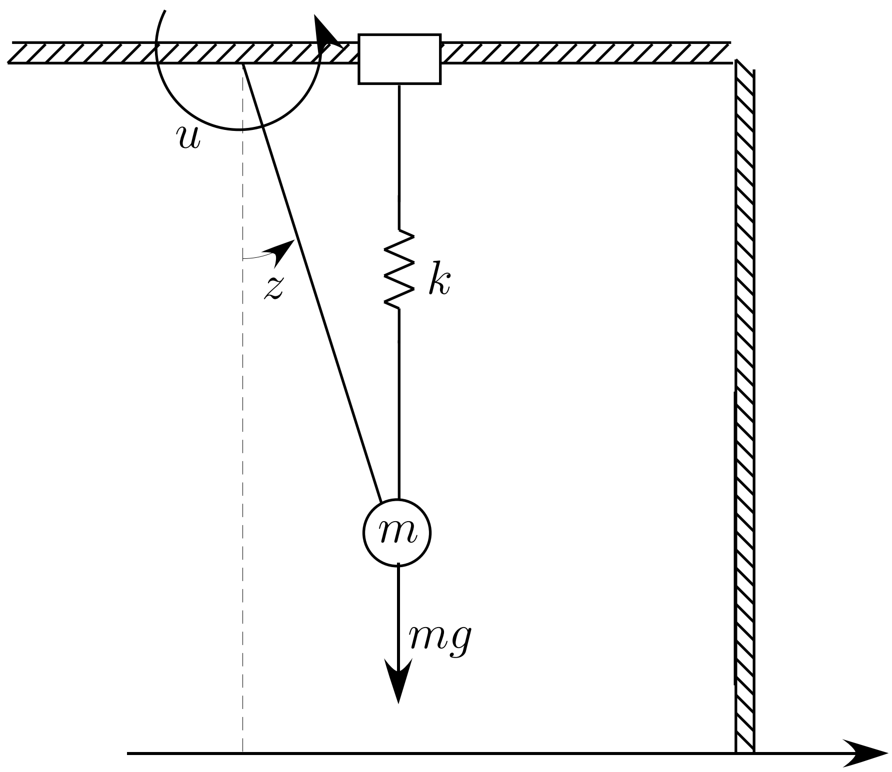
Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 3,4,5) tempo: 2 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4,5) tempo: 3 ore

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.

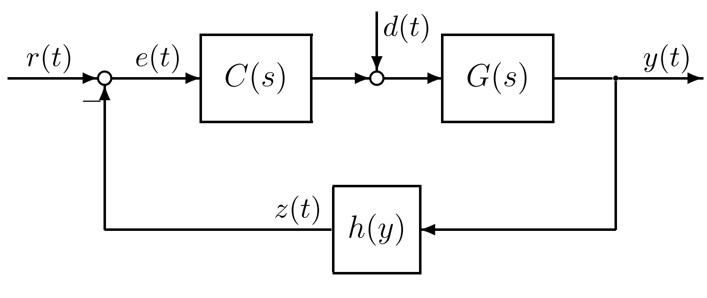


Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incenierato in un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso b. Sia z la posizione angolare, m la massa dell'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'. Si suppone che il pendolo sia incernierato a una molla (con lunghezza a riposo nulla e costante di elasticita' k) la cui altra estremita' scorre orrizontalmente in maniera tale che la molla sia sempre verticale.

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo. Determinare k in modo tale che in condizioni di equilibrio ($u = 0$) si abbia $z(t) = 45^o$ per tutti i t.

2. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) := z(t) - 45^o$ sotto l'ipotesi che sia $u(t)$ che $y(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi Si consideri lo schema della figura seguente



in cui

$$C(s) = K\frac{1}{s-a} \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2} \qquad h(y) = y$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che -2 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, angoli di uscita, intersezione asse immaginario.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove $C(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}\,.$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$;

2. Supponendo che $h(y) = y$, studiare (tramite il criterio di Nyquist) la stabilitá del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

3. Supponendo che $0 < h(y)/y < 1$ e $h(0) = 0$, studiare (tramite il criterio del cerchio) la stabilitá del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+100)} \qquad h(y) = y$$

1. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

   (a) errore a regime in risposta al gradino ≤ 0.1;

   (b) margine di fase $m_\phi \geq 60^0$;

   (c) pulsazione di attraversamento $\omega_A = 5$.

2. Attraverso la sintesi diretta si determini un compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia modi del tipo $t^i e^{-t}$.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s(1+s)} \qquad C(S) = K \qquad z(t) = y(t-T)$$

Si determini per quali valori di $K > 0$ e $T > 0$ il sistema in catena chiusa e' stabile.

$\boxed{\text{ES 1}}$

equazioni del moto

$$-J\ddot{z} - b\dot{z} - mg\underbrace{l \sin z}_{\text{braccio}} + k\underbrace{l \cos z}_{\substack{\text{Forza}\\ \text{elastica}}}\underbrace{l \sin z}_{\text{braccio}} + u = 0$$

$z(t) = 45° \quad \forall t$

$u(t) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow -mgl \sin 45° + k l^2 \cos 45 \sin 45 = 0$$

$$k = \frac{mg\,\sqrt{2}/2}{l\ 1/2} = \frac{mg}{l}\sqrt{2}$$

$y(t) = z(t) - 45°$

$$\sin z \simeq \sin 45° + \frac{d}{dz}\sin z\Big|_{z=45}(z-45) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$\cos z \sin z \simeq \cos z \sin z\Big|_{z=45} + \frac{d}{dz}\cos z \sin z\Big|_{z=45}(z-45)$$

$$= \frac{1}{2} + (\cos^2 z - \sin^2 z)_{z=45}\, y = \frac{1}{2}$$

$\dot{y} = \dot{z}$

$\ddot{y} = \ddot{z}$

$$-J\ddot{y} - b\dot{y} - mgl\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + kl^2\frac{1}{2} + u = 0$$

$$-J\ddot{y} - b\dot{y} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}y - \cancel{mgl\frac{\sqrt{2}}{2} + kl^2\frac{1}{2}} + u = 0$$

$$\left(Js^2 + bs + mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Y = U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{Js^2 + bs + mgl\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ES 2

Si tratti di tracciare il luogo di

$$(s-a)(s+1)^2+k(s^2+1)=0$$

Punti doppi

$$\begin{cases}(s-a)2(s+1)+(s+1)^2+2ks=0\\(s-a)(s+1)^2+k(s^2+1)=0\end{cases}$$

$$K=-\frac{(s+1)[2s-2a+s+1]}{2s}$$

$$(s-a)(s+1)^{\cancel{2}}+\frac{\cancel{(s+1)}(3s-2a+1)}{2s}(s^2+1)=0$$

$a=-\frac{17}{6}$

$$\left(s+\frac{17}{6}\right)\underbrace{(s+1)^2}_{s^2+2s+1}+k(s^2+1)=0$$

$$s^3+\left(\frac{17}{6}+2\right)s^2+\left(\frac{17}{3}+1\right)s+\frac{17}{6}+k(s^2+1)$$

$$s^3+\left(\frac{29}{6}+k\right)s^2+\frac{20}{3}s+\left(\frac{17}{6}+k\right)=0$$

3	1	$20/3$
2	$\frac{29}{6}+k$	$17/6+k$
1	$\frac{449}{18}+\frac{17}{3}k$	
0	$17/6+k$	stabile $\forall k>0$

$$2s^3+2(1-a)s^2-2as-3s^3-(1-2a)s^2-3s-1+2a=0$$

$$-s^3+s^2(2-\cancel{2a}-1+\cancel{2a})+s(-2a-3)-1+2a=0$$

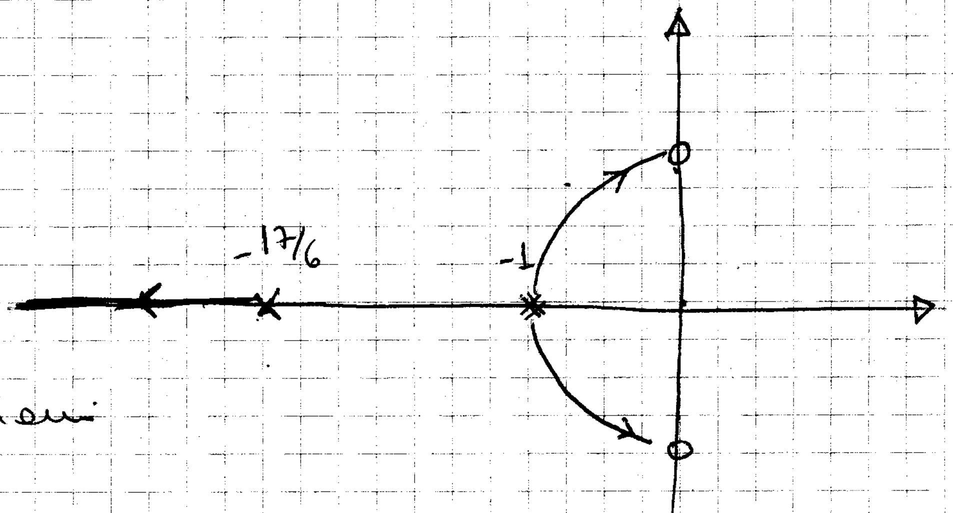
$$s^3-s^2+(2a+3)s+(1-2a)=0$$

$s=-2$ è punto doppio e quindi è soluzione

$$-8-4-4a-6+1-2a=0$$

$$a=-\frac{17}{6}$$

il punto doppio -2 appartiene al luogo negativo



Altri punti doppi

$$s^3-s^2+(2a+3)s+(1-2a)$$

$a=-17/6$

$$=s^3-s^2-8/3\,s+20/3$$

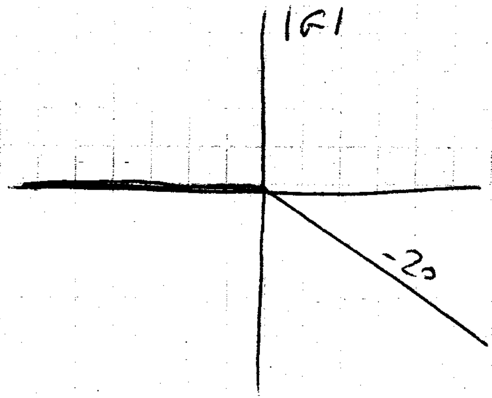
Divisione di tale polinomio con $s+2$ risulta

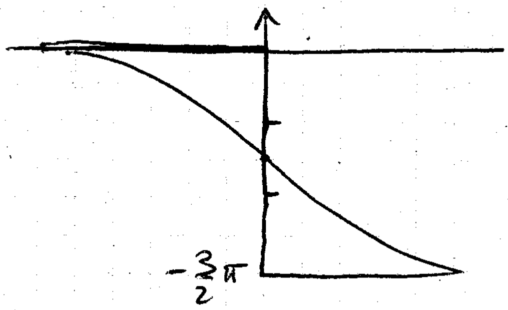
$$s^2-3s+\frac{10}{3}\qquad s_{12}=\frac{3\pm\sqrt{9-40/3}}{2}$$

complessi coniugati quindi non ci sono altri punti doppi

ES 3

1) Bode





Nyquist

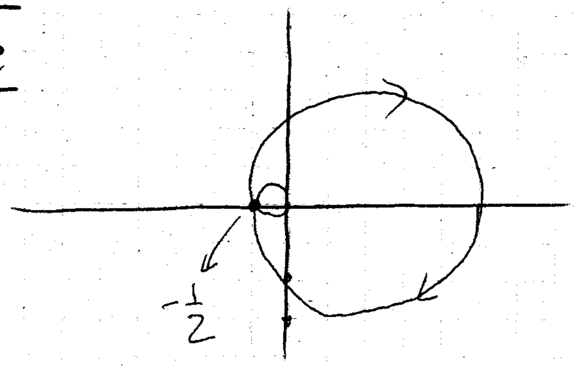
$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega}{(1-\omega^2)+2j\omega} =$$

$$= \frac{(1-\omega^2-2\omega^2)+j\omega(-1+\omega^2-2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Re = \frac{1-3\omega^2}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Im = \frac{\omega(\omega^2-3)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

ω	Re	Im
0	1	0
$1/\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}/2$
$\sqrt{3}$	$-1/2$	0



2.) $P=0$ $\quad Z=-N$

$-1/k < -\frac{1}{2}$	$N=0$	$Z=0$	$0<k<2$
$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{k} < 0$	$N=-2$	$Z=2$	$k>2$
$0 < -\frac{1}{k} < 1$	$N=-1$	$Z=1$	$k<-1$
$-\frac{1}{k} > 0$	$N=0$	$Z=0$	$-1<k<0$

3.) Dobbiamo calcolare il minimo di $Re\, G(j\omega) = \frac{1-3\omega^2}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$

$x=\omega^2 \quad f(x) = \frac{1-3x}{(1-x)^2+4x}$

$$f'(x) = \frac{-3[(1-x)^2+4x]-(1-3x)[\overbrace{2(x-1)+4}^{2x+2}]}{[(1-x)^2+4x]^2} \geq 0$$

$$= \frac{-3x^2+\cancel{6x}-3-\cancel{12x}-2x-2+6x^2+\cancel{6x}}{[(1-x)^2+4x]^2} \geq 0 \qquad 3x^2-2x-5 \geq 0$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{3} \begin{cases} -1 \\ +5/3 \end{cases}$$

$-3 \quad 0 \quad 5/3$

$x_{min} = 5/3$

$\omega = \sqrt{5/3}$

$Re|_{\omega=\sqrt{5}} = -\frac{9}{16} \quad \beta = \frac{9}{16}$

Per il centro del cerchio abbiamo stabilità per

$0<k<\frac{1}{\beta} = \frac{16}{9}$

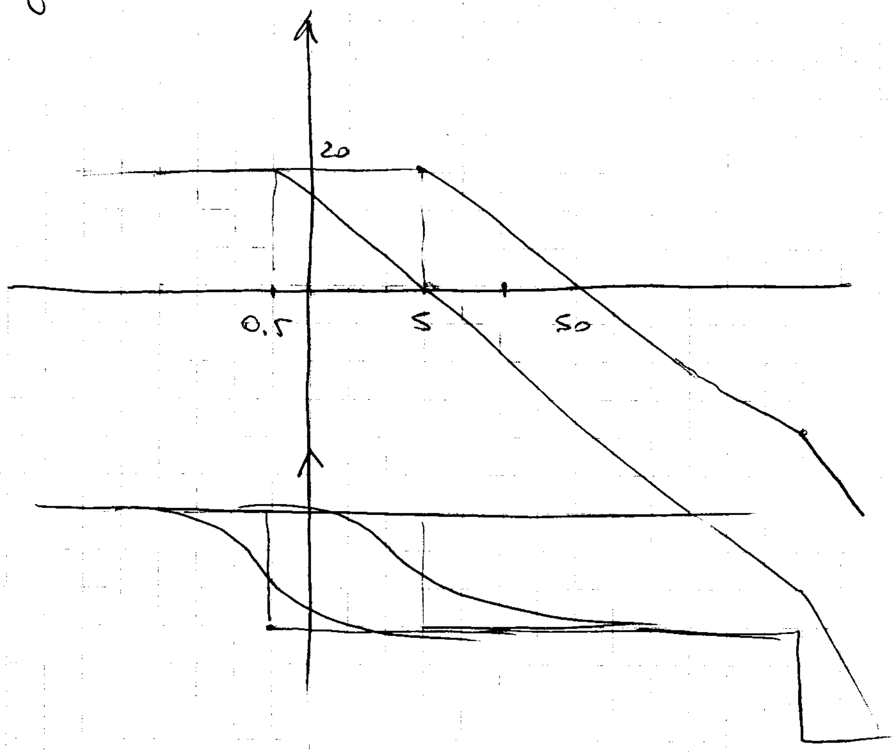
$\boxed{ES\,4}$

1) $G(s) = \dfrac{1/500}{\left(1+\frac{s}{5}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$ $\quad K_G = 1/500$

$h = 0 \qquad 1/\varepsilon = 10$

$K_c = \dfrac{1/\varepsilon}{K_G} = 5000$

$\hat{W} = \dfrac{10}{\left(1+\frac{s}{5}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$



serve una rete ritardatrice

$\bar{C}(s) = \dfrac{1+sT_2}{1+sT_1}$

$T_1 = \dfrac{1}{0.5} \qquad T_2 = 1/5$

$\bar{C}(s) = \dfrac{1+s/5}{1+2s}$

2) $d(s) = (s+1)^3$

$b(s) = 1$

$a(s) = s^2 + 105s + 500$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 1 & 105 & 500 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 105 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51001 \\ 10213 \\ -102 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \frac{10213\,s + 51001}{s - 102}$$

ES 5

$k > 0$

Il sistema è stabile se e solo se il margine di fase complessivo è > 0

La funzione di trasferimento complessiva è

$$G(s)\,C(s)\,e^{-sT}$$

per la presenza del ritardo

$$z(t) = y(t-T)$$

$$Z(s) = e^{-sT}\,Y(s)$$

$$m_\varphi = \pi + \angle G(j\omega_A)\,C(j\omega_A)\,e^{-j\omega_A T}$$

dove ω_A è tale che

$$\left| G(j\omega_A)\,C(j\omega_A)\,e^{-j\omega_A T} \right| = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| G(j\omega_A)\,C(j\omega_A) \right| = K \frac{\cancel{|1-j\omega_A|}}{|j\omega_A|\,\cancel{|1+j\omega_A|}} = \frac{K}{\omega_A} = 1$$

$$\omega_A = K$$

$$m_\varphi = \pi + \angle G(j\omega_A) + \angle C(j\omega_A) + \angle e^{-j\omega_A T}$$

$$= \pi + \angle 1-j\omega_A - \angle j\omega_A - \angle 1+j\omega_A + \angle K - \omega_A T$$

$$= \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\omega_A - \pi/2 - \omega_A T > 0 \qquad \omega_A = k$$

$$\boxed{2\,\mathrm{arctg}\,K + KT < \pi/2}$$