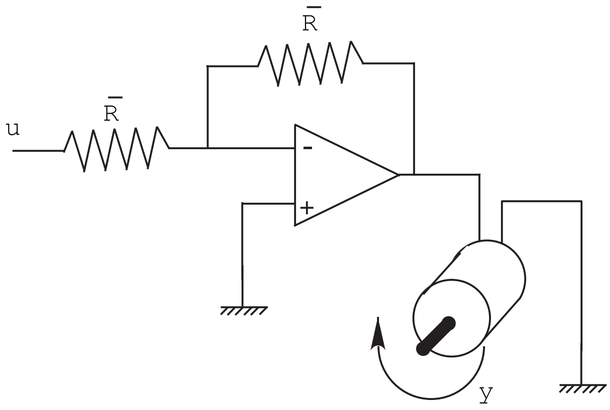
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 20/11/2008

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

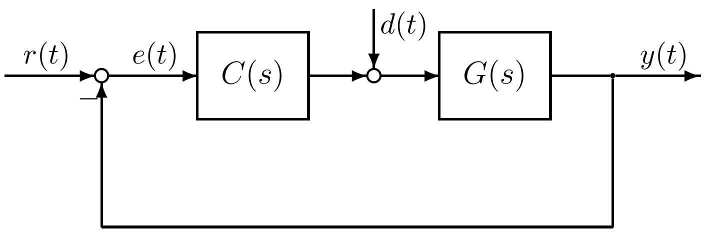
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettromeccanico



Si tratta di un motore in continua alimentato da un amplificatore operazionale. Siano J il momento di inerzia e b la costante di attrito del motore, R la resistenza e L l'induttanza del motore e H la costante elettromeccanica. Supponiamo inoltre che l'amplificatore operazionale abbia amplificazione A.

1. Determinare la funzione di trasferimento tra la tensione di ingresso u dell'amplificatore e la velocita' di rotazione y dell'asse del motore.
2. Determinare per quali valori di A la funzione di trasferimento e' BIBO stabile.
3. Determinare la stessa funzione di trasferimento nel caso in cui $A \to +\infty$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

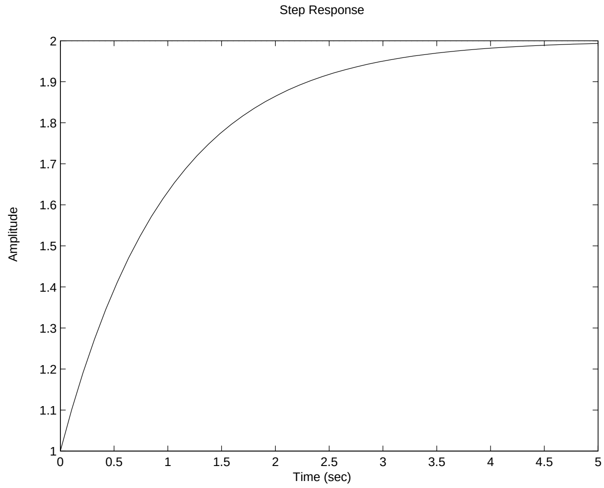


Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s+1} \qquad G(s) = \frac{s+a}{s+b}$$

dove $a \geq 0$.

1. Determinare a e b sapendo che se $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$ (segnale a gradino) e $K = 0$ (catena aperta) si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



Supponiamo ora che a e b siano dati dai valori calcolati al punto precedente (altrimenti porre $a = 4$ e $b = 1$).

2. Determinare i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

3. Determinare la funzioni di trasferimento $T(s)$ dagli ingressi r all'uscita y e la funzione sensibilita' di T rispetto alle variazioni del parametro b. Determinare i valori di K tali che a una variazione $\Delta b/b = 20\%$ corrisponda una variazione del quandagno in continua minore o uguale a 10%.

4. Determinare i valori di K per i quali nel sistema in catena chiusa il segnale di disturbo $d(t) = sin(t)$ risulta attenuato in uscita y di un fattore $\sqrt{5}/4$ (cioe' l'ampiezza dell'uscita sara' $\leq$ dell'ampiezza dell'ingresso moltiplicata per $\sqrt{5}/4$). Nel caso di $a = 4$ e $b = 1$ sostituire il fattore $\sqrt{5}/4$ con $\sqrt{34}/5$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

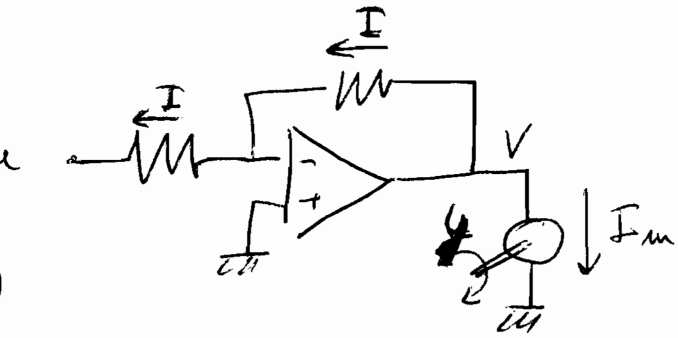
$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$$

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, punti doppi e intersezioni con l'asse immaginario.

2. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha solo modi esponenziali non oscillatori.

3. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo $e^{-\frac{1}{2}t}$. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

ES. 1



Amplificatore

$$V_- = U + \bar{R} I = V - \bar{R} I$$

$$I = \frac{V-U}{2\bar{R}} \qquad V_- = U + \frac{1}{2}(V-U) = \frac{V+U}{2}$$

$$V = -A V_- = -\frac{A}{2} V - \frac{A}{2} U$$

$$\left(1+\frac{A}{2}\right) V = -\frac{A}{2} U \qquad V = \frac{-A/2}{1+A/2} U = \frac{-A}{2+A} U$$

Motore

sia I_m corrente del motore

$$\begin{cases} L s I_m(s) + R I_m(s) = V(s) - H Y(s) \\ J s Y(s) + b Y(s) = H I_m(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Ls+R) I_m = \frac{-A}{2+A} U - H Y \\ (Js+b) Y = H I_m \end{cases}$$

$$(Ls+R)(Js+b)\frac{Y}{H} = \frac{-A}{2+A} U - HY$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{H}{(Ls+R)(Js+b)+H^2} \cdot \frac{-A}{2+A}$$

È stabile per ogni A. Per $A \to \infty$

$$\frac{Y}{U} = -\frac{H}{(Ls+R)(Js+b)+H^2}$$

$\boxed{\text{ES 2}}$

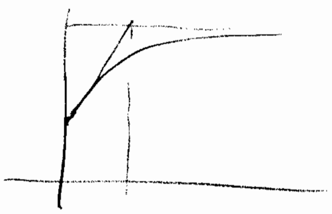
1) Si noti che $G(s) = \frac{s+b-b+a}{s+b} = 1 + \frac{a-b}{s+b}$

Quindi la risposta al gradino è data da

$$y(t) = 1 + (a-b)(1-e^{-bt})$$

Dal valore $y(\infty) = 2$ dalla figura si ricava $a-b=1$

la costante di tempo $\tau = 1/b$ si deduce tracciando la tangente a $t=0$ da cui si deduce che $\tau = 1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2$



2) Stabilità in catena chiusa

$$T_{ry}(s) = T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{K(s+2)}{(s+1)^2}}{1+\frac{K(s+2)}{(s+1)^2}} = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2+K(s+2)}$$

$$= \frac{K(s+2)}{s^2+(2+K)s+(1+2K)}$$

Per la regola di Cartesio abbiamo stabilità se e solo se $\boxed{K > -1/2}$

Nel caso di $a=4$ e $b=1$ si ottiene

$$T(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)^2+K(s+4)} = \frac{K(s+4)}{s^2+(2+K)s+(1+4K)} \qquad \boxed{K > -\frac{1}{4}}$$

3) $$S_b^T = \frac{b}{T}\frac{\partial T}{\partial b} = b\left[\frac{K(s+a)}{(s+1)\cancel{(s+b)+K(s+a)}}\right]^{-1} \frac{-\cancel{K(s+a)}(s+1)}{[(s+1)(s+b)+K(s+a)]^{\cancel{2}}}$$

$$T(s) = \frac{K(s+a)}{(s+1)(s+b)+K(s+a)}$$

$$= \frac{-(s+1)b}{(s+1)(s+b)+K(s+a)} = \frac{-(s+1)}{(s+1)^2+K(s+2)}$$

Per avere che $\Delta b/b = 20\%$ produca $\Delta T/T(0) \leq 10\%$ bisogna che $|S_b^T(0)| \leq 1/2 \Rightarrow \left|\frac{-1}{1+2K}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\boxed{K \geq 1/2}$

Nel caso $a=4$ e $b=1$ si ottiene

$$S_b^T(s) = \frac{-(s+1)}{(s+1)^2+k(s+4)} \qquad S_b^T(0) = \frac{-1}{1+4k} \qquad |S_b^T(0)| \le \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow \quad \boxed{k \ge 1/4}$$

4) Calcolare $T_{dy}(s) = \dfrac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \dfrac{\frac{s+a}{s+b}}{1+\frac{k(s+a)}{(s+b)(s+1)}} = \dfrac{(s+a)(s+1)}{(s+b)(s+1)+k(s+a)}$

$$= \frac{(s+2)(s+1)}{(s+1)^2+k(s+2)}$$

$$|T_{dy}(j)|^2 = \frac{|j^2+3j+2|^2}{|\cancel{j^2}+2j+\cancel{1}+k(j+2)|^2} = \frac{|1+3j|^2}{|2k+j(k+2)|^2} = \frac{10}{4k^2+(k+2)^2}$$

$$\frac{10}{4k^2+(k+2)^2} \le \frac{5}{16} \qquad 32 \le 4k^2+(k+2)^2$$

$$5k^2+4k-28 \ge 0 \qquad k_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+140}}{5} \begin{cases} 2 \\ -14/5 \end{cases}$$

$$k \le -14/5 \quad \text{e} \quad k \ge 2$$

Per condizioni di stabilità resta $\boxed{k \ge 2}$

Nel caso $a=4$ e $b=1$ si ottiene

$$T_{dy}(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)^2+k(s+4)}$$

$$|T_{dy}(j)|^2 = \frac{|j^2+5j+4|^2}{|\cancel{j^2}+2j+\cancel{1}+k(j+4)|^2} = \frac{|3+5j|^2}{|4k+j(k+2)|^2} = \frac{34}{16k^2+(k+2)^2}$$

$$\frac{34}{16k^2+(k+2)^2} \le \frac{34}{25} \qquad 16k^2+(k+2)^2 \ge 25$$

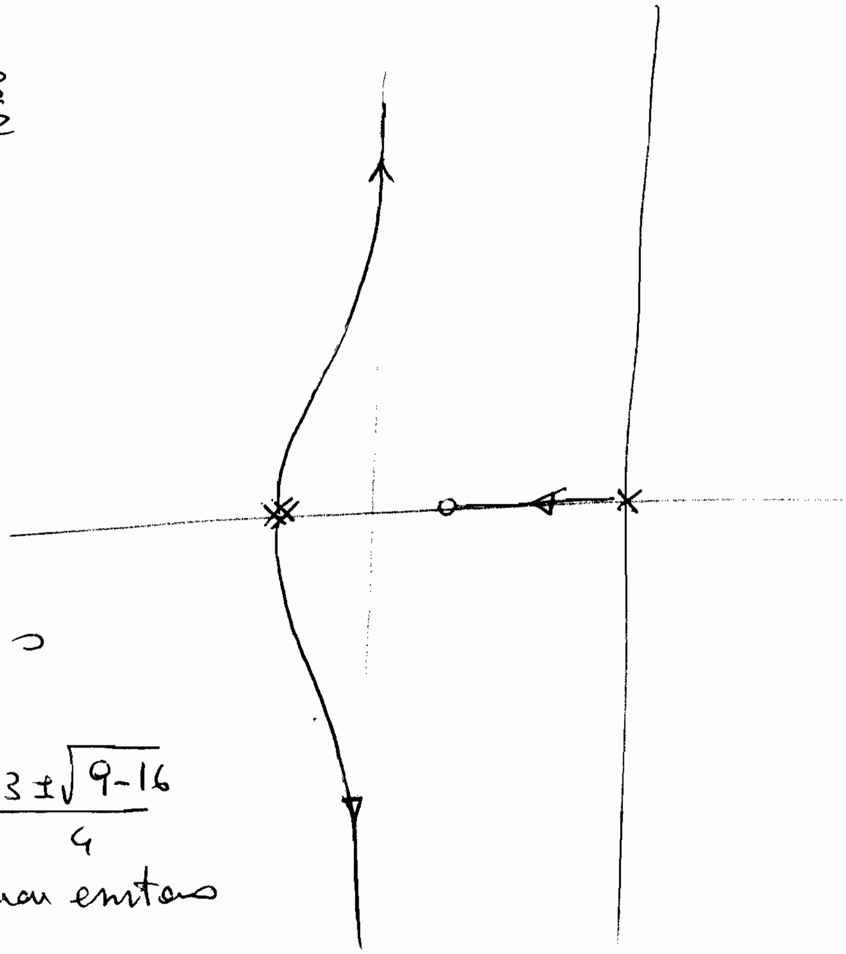
$$17k^2+4k-21 \ge 0 \qquad k_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+17\cdot 21}}{17} = \frac{-2 \pm 19}{17} \begin{cases} 1 \\ -21/17 \end{cases}$$

$$k \le -21/17 \qquad k \ge 1$$

Il vincolo di stabilità impone che sia $\boxed{k \ge 1}$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1) $\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-2-2+1}{2} = -\frac{3}{2}$



Punti doppi

$$\begin{cases} s(s+2)^2 + k(s+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2s(s+2) + k = 0 \end{cases}$$

$k = -(s+2)(3s+2)$

$s(s+2)^{\cancel{2}} - \cancel{(s+2)}(3s+2)(s+1) = 0$

$s^2 + \cancel{2s} - 3s^2 - 3s - \cancel{2s} - 2 = 0$

$2s^2 + 3s + 2 = 0 \qquad s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{4}$

Soluzioni non reali ⇒ non esistono punti doppi

Intersezioni asse immaginario

$s^3 + 4s^2 + (k+4)s + k$

la prima colonna della tabella di Routh ha elementi tutti >0 per $k>0$

tabella di Routh

3	1	$k+4$
2	4	k
1	$\frac{3k+16}{4}$	
0	k	

2) il sistema ha sempre modi oscillatori

3) il modo $e^{-\frac{1}{2}t}$ è presente se e solo se $s=-1/2$ è soluzione e quindi

$s(s+2)^2 + k(s+1)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 0$

$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2 + k\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 0$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{k}{2} = 0 \qquad k = \frac{9}{4}$

per $k = 9/4$ il polinomio diventa

$s^3 + 4s^2 + \frac{25}{4}s + \frac{9}{4}$

$$\begin{array}{l|l} s^3 + 4s^2 + \frac{25}{4}s + \frac{9}{4} & s+\frac{1}{2} \\ \hline s^3 + \frac{1}{2}s^2 & s^2 + \frac{7}{2}s + \frac{9}{2} \\ \hline \frac{7}{2}s^2 + \frac{25}{4}s + \frac{9}{4} & \\ \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{4}s & \\ \hline \frac{18}{4}s + \frac{9}{4} & \\ \frac{18}{4}s + \frac{9}{4} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le radici di $s^2 + \frac{7}{2}s + \frac{9}{2}$ sono $-\frac{7}{4} \pm j\frac{\sqrt{23}}{4}$ e quindi i modi $e^{-\frac{7}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)$