Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- II Compitino e I appello di Fondamenti di Automatica del 7/12/2006

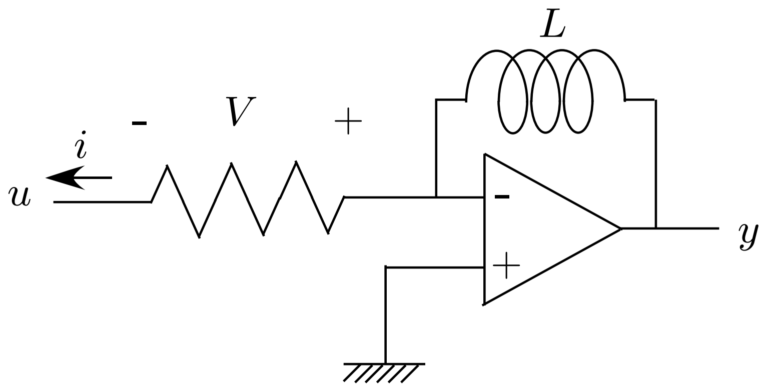
Cognome e nome: ________________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

| Secondo compitino (Esercizi 3,4,5) tempo: 2 ore | Primo appello (Esercizi 1,2,3,4,5) tempo: 3 ore |
|---|---|

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema elettrico




Sia $u$ la tensione di ingresso, $y$ la tensione di uscita e $i$ la corrente che attraversa la resistenza.

1. Determinare la funzione di trasferimento dall'ingresso $u$ all'uscita $y$ sapendo che il resistore e' ideale con resistenza $R$ e che l'amplificatore e' descritto dall'equazione

$$V_0 = A(V_+ - V_-)$$

dove $V_0$ e' la tensione di uscita dell'amplificatore, $V_+, V_-$ sono le tensioni in ingresso ai due morsetti e sapendo che l'amplificatore ha impedenza di ingresso infinita.

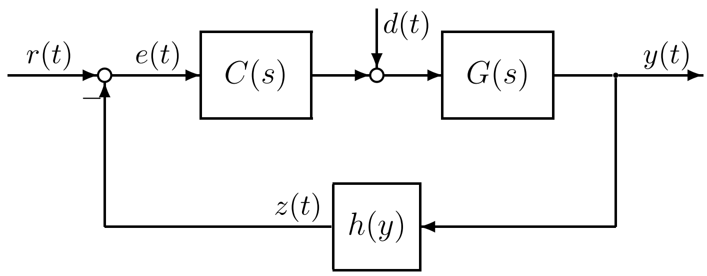
2. Supponiamo ora che la il resistore sia non lineare e che la tensione ai suoi capi sia data dalla formula

$$V = |i|i$$

Si noti che e' una funzione dispari con rami parabolici. Sapendo che l'ingresso $u(t) = \bar{u}$ sia costante, determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ e $i(t) = \bar{i}$.

3. Siano $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$, $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ e $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}$. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$ sapendo che $\tilde{u}(t), \tilde{y}(t), \tilde{i}(t)$ sono piccoli.

**Esercizio 2.** Si consideri lo schema a blocchi Si consideri lo schema della figura seguente




in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s-3}{(s+6)(s^2 - s + a)} \qquad h(y) = y$$

1. Si determini il valore di $a$, sapendo che 0 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario.

**Esercizio 3.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s+1}\,.$$

1. Supponendo che $C(s) = \frac{K}{s^2}$ e che $h(y) = y$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale $K$ (negativo e positivo);
2. Supponendo che $C(s) = \frac{K}{s}$ e che $0 < h(y)/y < 1$ e $h(0) = 0$, studiare tramite il criterio del cerchio la stabilitá del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$.

**Esercizio 4.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{2}{5s+1} \qquad h(y) = y$$

1. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
   (a) errore a regime in risposta al gradino $\leq 0.01$;
   (b) margine di fase $m_\phi \geq 40^0$;
   (c) pulsazione di attraversamento $\omega_A = 2$.
2. Attraverso la sintesi diretta si determini un compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia errore nullo in risposta al gradino e che abbia modi del tipo $t^i e^{-2t}$.

**Esercizio 5.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1+s}{s^2} \qquad C(S) = K \qquad z(t) = y(t-T)$$

Si determini per quali valori di $K > 0$ e $T > 0$ il sistema in catena chiusa e' stabile.

CS.1

1) Si noti che $V_R = RI \qquad V_L = sLI$

Inoltre $V_- = U + V_R = Y - V_L$ da cui si ricava

$$U + RI = Y - sLI \Rightarrow I = \frac{Y-U}{R+sL}$$

Quindi si ricava che

$$Y = A(V_+ - V_-) = -AV_- = -A(U+V_R) = -AU - AR\frac{(Y-U)}{R+sL}$$

$$(R+sL)Y + ARY = -A(R+sL)U + ARU = -sLAU$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-sLA}{(A+1)R+sL}$$

2) Riscriviamo le relazioni precedenti in forma differenziale

$$\begin{cases} u + V(i) = y - L\dot{i} \\ y = -A(u+V(i)) \end{cases}$$

$\dot{i}$ è la derivata di $i$

Se $u(t) = \bar{u}$ $\;y(t) = \bar{y}$ e $i(t) = \bar{\imath}$ costanti allora $\dot{i}(t) = 0$

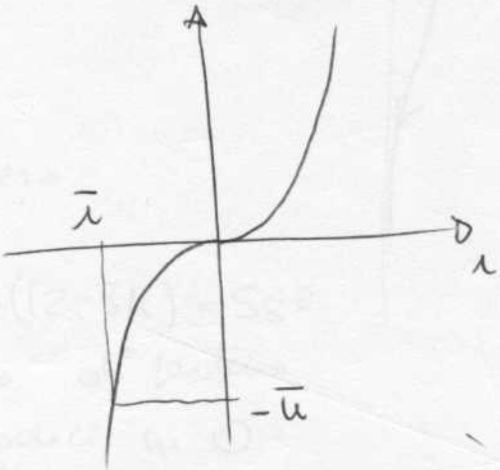
e quindi

$$\begin{cases} \bar{u} + V(\bar{\imath}) = \bar{y} \\ \bar{y} = -A(\bar{u} + V(\bar{\imath})) \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = -A\bar{y} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = -V(\bar{\imath}) \end{array}$$

$y = V(x) = |x|x$

$x = V^{-1}(y) = \mathrm{sign}(y)\sqrt{|y|}$

$= \frac{y}{\sqrt{|y|}}$



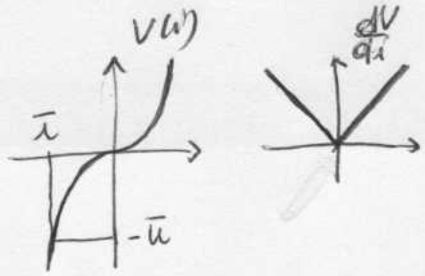

$V(\bar{\imath}) = \bar{u}$

$\bar{\imath} = V^{-1}(-\bar{u})$

$= -V^{-1}(\bar{u})$

$= -\frac{\bar{u}}{\sqrt{|\bar{u}|}}$

$$\begin{cases} \bar{u} + \tilde{u}(t) + V(\bar{i} + \tilde{i}(t)) = \bar{y} + \tilde{y}(t) - L\frac{d}{dt}(\bar{i} + \tilde{i}(t)) \\ \bar{y} + \tilde{y}(t) = -A(\bar{u} + \tilde{u}(t)) + V(\bar{i} + \tilde{i}(t)) \end{cases}$$



$$V(\bar{i} + \tilde{i}(t)) \cong V(\bar{i}) + \overbrace{\left.\frac{dV}{di}\right|_{\bar{i}}}^{|\bar{i}|} \tilde{i}(t) = V(\bar{i}) + |\bar{i}|\,\tilde{i}(t)$$

$$\begin{cases} \cancel{\bar{u}} + \tilde{u}(t) + \cancel{V(\bar{i})} + |\bar{i}|\,\tilde{i}(t) \cong \cancel{\bar{y}} + \tilde{y}(t) - L\frac{d}{dt}\tilde{i}(t) \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y}(t) \simeq -\cancel{A\bar{u}} - A\tilde{u}(t) + \cancel{AV(\bar{i})} - A|\bar{i}|\,\tilde{i}(t) \end{cases}$$

$$|\bar{i}| = -\frac{|\bar{u}|}{\sqrt{|u|}} = -\sqrt{|u|}$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$\begin{cases} \tilde{U}(s) + |\bar{i}|\,\tilde{I}(s) = \tilde{Y}(s) - sL\,\tilde{I}(s) \\ \tilde{Y}(s) = -A\tilde{U}(s) - A|\bar{i}|\,\tilde{I}(s) \end{cases} \qquad \tilde{I} = \frac{\tilde{Y} - \tilde{U}}{|\bar{i}| + sL}$$

Stesse equazioni visto prima con $R = |\bar{i}|$ e quindi

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{-sL}{(A+1)|\bar{i}| + sL} = \frac{-sL}{-(A+1)\sqrt{|u|} + sL}$$

$\boxed{\text{ES 2}}$

1) $\begin{cases} (s+6)(s^2-s+a)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+a+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases}$ deve avere soluzione in $s=0$

$\begin{cases} 6a-3k=0 \\ a-6+k=0 \end{cases}$ $\quad k=2a \quad a=2 \qquad k=4$

2) <u>Asintoti</u>

$s^2-s+2=0 \qquad s_{12}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sigma_0=\frac{\sum P_i-\sum z_i}{2}=\frac{1/2+j\cancel{\sqrt{7}/2}+1/2-j\cancel{\sqrt{7}/2}-6-3}{2}=-4$

<u>punti doppi</u>

$\begin{cases} (s+6)(s^2-s+2)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+2+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases} \qquad k=-(3s^2+10s-4)$

$s^3+5s^2-4s+12-(3s^3+10s^2-4s-9s^2-3s+12)=0$

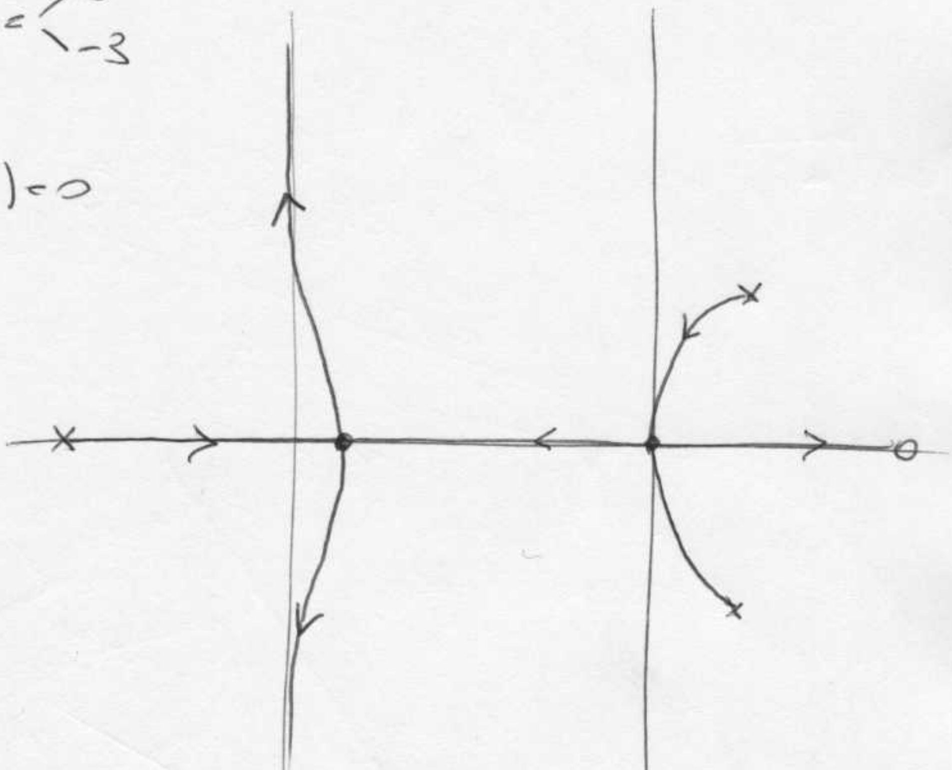
$-2s^3+4s^2+30s=0$

$s^2-2s-15=0 \qquad s_{12}=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$

<u>Intersezione assi</u>

$s^3+5s^2+(k-4)s+(12-3k)=0$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $1$ | $k-4$ |
| 2 | $5$ | $12-3k$ |
| 1 | $\frac{8k-32}{5}$ | |
| 0 | $12-3k$ | |

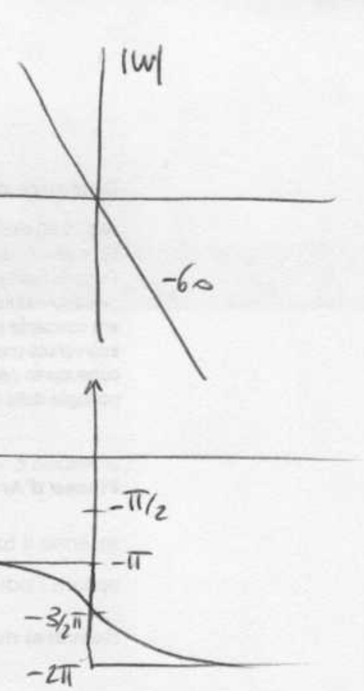


lo secondo rigo e lo terzo si annullano per $k=4$
in tal caso $5s^2+(12-3k)=5s^2$
dividere il polinomio di partenza
che presenta due radici in 0
Quindi il luogo attraversa asse immaginario per $k=4$ nell'origine

## ES 3

1) tracciamo il diagramma di Bode di

$$W(s) = \frac{1-s}{s^2(1+s)}$$




e poi il diagramma di Nyquist

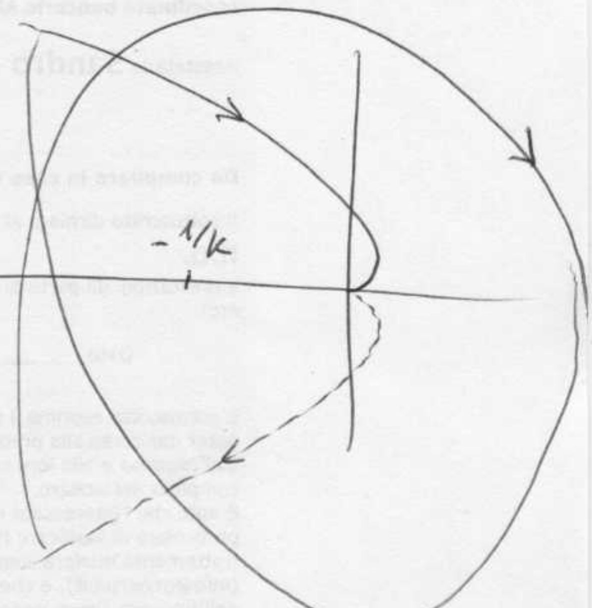
$$W(j\omega) = \frac{1-j\omega}{-\omega^2(1+j\omega)} = \frac{(1-j\omega)^2}{-\omega^2(1+\omega^2)}$$

$$Re = -\frac{1-\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)} \qquad Im = \frac{2}{\omega(1+\omega^2)}$$

Per $\omega \simeq 0$ $\quad Re \simeq -\frac{1}{\omega^2}$ $\quad Im \simeq \frac{2}{\omega}$

andamento parabolico

Per $\omega = 1$ $\quad Re = 0$ $\quad Im = 1$




Applichiamo il criterio di Nyquist

$P = 0$

Per $k > 0$ $\left(-\frac{1}{k} < 0\right)$ $N = -2$

e quindi $Z = 2$ (2 instabili)

Per $k < 0$ $\left(-\frac{1}{k} > 0\right)$ $N = -1$

e quindi $Z = 1$ (1 instabile)

2) Applichiamo il criterio del Cerchio

$$F = \frac{1+kW(s)}{1+0W(s)}$$ deve essere Positivo reale

$$F = \frac{s^2+(1-k)s+k}{s^2+s}$$ Allora $num + den = 2s^2 + (2-k)s + k$ deve essere stabile e quindi $0 < k < 2$

Inoltre $Re\, F(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$ reale

$$Re\, F(j\omega) = \frac{\omega^2+1-2k}{\omega^2+1} \geq 0 \quad \forall \omega$$

$$\omega^2 + 1 - 2k \geq 0 \quad \forall \omega$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - 2k \geq 0 \qquad \boxed{k \leq 1/2}$$

## $\boxed{\text{ES 4}}$

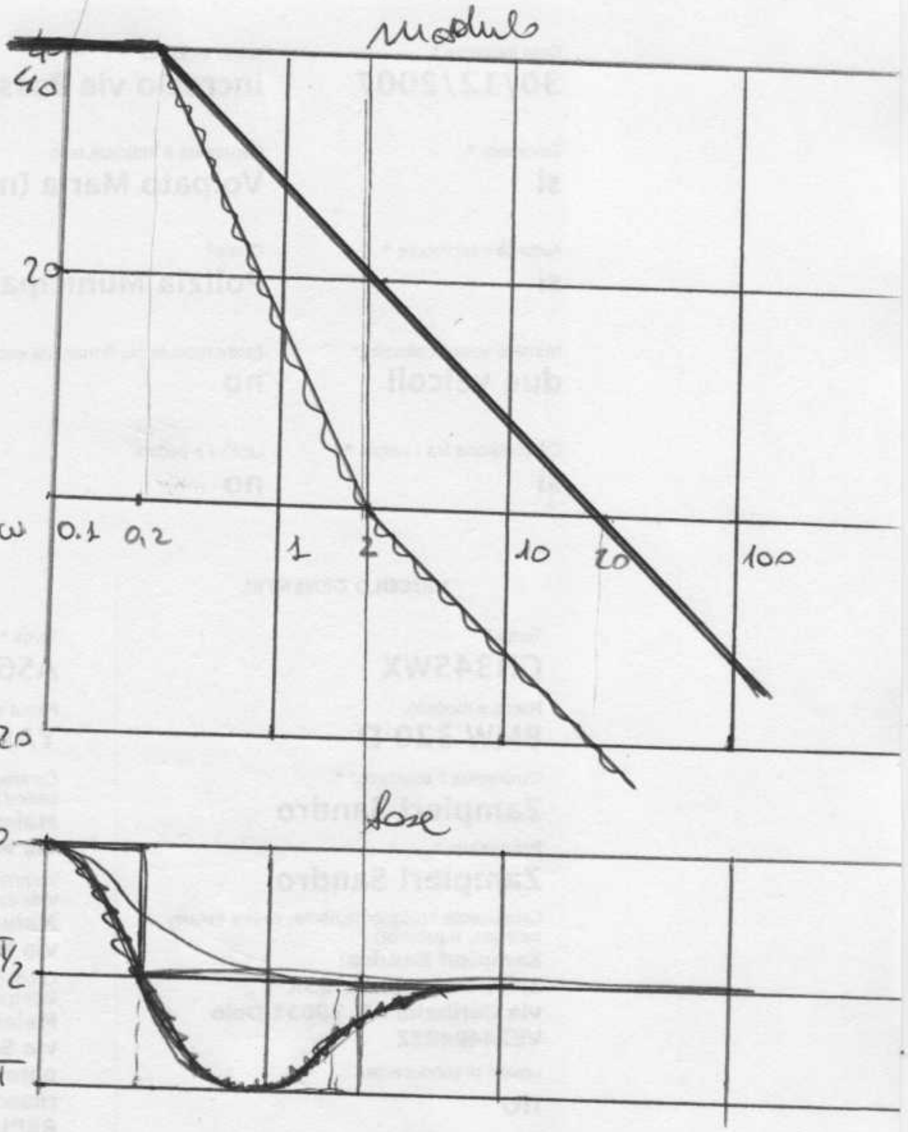
1) $K_c K_G \geq \frac{1}{0{,}01} = 100$

$K_G = 2 \quad K_c = 50 \quad h_c = h - h_G = 0$

$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} \quad G(s) = \frac{100}{1+5s}$

$T = 5$

punto di spezzamento $\frac{1}{T} = 0{,}2$




Introduco un polo in 0,2
e uno zero in 2

$\hat{C}(s) = \frac{1+0{,}5s}{1+5s}$

$C(s) = 50\,\frac{1+0{,}5s}{1+5s}$

2) Dobbiamo introdurre un polo nell'origine

$C(s) = \frac{\bar{C}(s)}{s} \quad \bar{C}(s)$ da determinare

$G(s)C(s) = \frac{G(s)}{s}\,\bar{C}(s) \qquad \frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s(5s+1)}$

Dobbiamo allocare i poli in catena chiusa in $-2$

$d(s) = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$X_0 = 4$

$X_1 = 271/50$

$Y_0 = \frac{29}{25}$

$Y_1 = \frac{1}{5}$

$\boxed{ES.5}$

Usiamo il fatto che il sistema in questione è stabile se e solo se il margine di fase è > 0

$$W(s) = G(s)C(s)e^{-sT}$$

$$|W(j\omega_A)| = 1 \qquad \left|k\frac{1+j\omega_A}{-\omega_A^2}\right|^2 = 1 \qquad k^2\frac{1+\omega_A^2}{\omega_A^4} = 1$$

$$\omega_A^4 - k^2\omega_A^2 - k^2 = 0 \qquad \omega_A^2 = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4+4k^2}}{2} \qquad \omega_A = \sqrt{\frac{k^2+\sqrt{k^4+4k^2}}{2}}$$

$$\text{Margine di fase} = \pi + \angle W(j\omega_A) > 0$$

$$\pi + \angle k\frac{1+j\omega_A}{-\omega_A^2} - \omega_A T > 0$$

$$\cancel{\pi} + \angle 1+j\omega_A - \cancel{\pi} - \omega_A T > 0$$

$$T < \frac{\angle 1+j\omega_A}{\omega_A} = \frac{\operatorname{artg}\omega_A}{\omega_A} = \frac{\operatorname{artg}\sqrt{\frac{k^2+\sqrt{k^4+4k^2}}{2}}}{\sqrt{\frac{k^2+\sqrt{k^4+4k^2}}{2}}}$$