

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

25 gennaio 2023 (Primo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \exp\left(\frac{2}{\log(4-x^2)}\right)$ .

(1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f(x)$ .

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**N.B.**  $\exp(u) := e^u$ ; lo studio della convessità non è richiesto.

**Esercizio 2.** Studiare, per  $\beta > 0$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $a \in \mathbb{R}$ , e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a \sqrt{x^2 - 9}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , l'ordine di infinito di  $f_a(x)$  in 3 da destra.

(3.b) Determinare per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $f_a(x)$  è un infinitesimo in  $+\infty$ ; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di  $f_a(x)$  in  $+\infty$ .

(3.c) Studiare la convergenza di  $\int_3^{+\infty} f_a(x) dx$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .

(3.d) Calcolare  $\int_3^{+\infty} f_1(x) dx$ .

**Esercizio 4.** Calcolare per ogni  $b \in \mathbb{R}$  il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})}{(e^x - 1)x^b}.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 5$ .

(5.b) Enunciare uno dei teoremi del confronto per i limiti.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

25 gennaio 2023 (Primo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \exp\left(\frac{2}{\log(3-x^2)}\right)$ .

(1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f(x)$ .

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**N.B.**  $\exp(u) := e^u$ ; lo studio della convessità non è richiesto.

**Esercizio 2.** Studiare, per  $\beta > 0$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{n+3} - \sqrt[4]{n}}{n^\beta}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $a \in \mathbb{R}$ , e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a \sqrt{x^2 - 1}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , l'ordine di infinito di  $f_a(x)$  in 1 da destra.

(3.b) Determinare per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $f_a(x)$  è un infinitesimo in  $+\infty$ ; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di  $f_a(x)$  in  $+\infty$ .

(3.c) Studiare la convergenza di  $\int_1^{+\infty} f_a(x) dx$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .

(3.d) Calcolare  $\int_1^{+\infty} f_1(x) dx$ .

**Esercizio 4.** Calcolare per ogni  $b \in \mathbb{R}$  il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})}{x^b \sin x}.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$ .

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Analisi Matematica 1 - Imp. Chimica e L  
CANALE A Materiali

Primo Appello del 25/01/2023

Risoluzione Fila A

Esercizio 1 Studio di  
 $f(x) = e^{\frac{2}{\lg(4-x^2)}} = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right)$

1a)  $D_f : \left\{ \begin{array}{l} \lg(4-x^2) \neq 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 4-x^2 \neq 1 \\ x^2 < 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^2 \neq 3 \\ x^2 < 4 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow D_f = (-2, 2) \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

PARITÀ:  $D_f$  è simmetrico rispetto a 0; inoltre

$$f(-x) = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-(-x)^2)}\right) = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) = f(x)$$

$\forall x \in D_f \Rightarrow f$  è PARI.

Segno:  $f(x) > 0$ : la funzione più estesa è un'esponente di base immaginaria  $\in (0, +\infty)$ .

1b) Per punti di  $f$  in  $h$ , se esistono, che 2

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} f(x) = \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} f(x) = \textcircled{3}$$

dato che i punti di acc. di  $D_f$  sono  $-2$  (da destra)  
 $-\sqrt{3}$  (bilatero),  $\sqrt{3}$  (bilatero),  $2$  (da sinistra).

Calcolo  $\textcircled{1}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{2}{u}\right) = 1^- \end{aligned}$$

$\downarrow 0^+ \rightarrow -\infty$   
 $\downarrow 0^- \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{2}{u}\right) = 0^+ \end{aligned}$$

$\downarrow 4^- \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right)$$

$\downarrow 4^+ \rightarrow 0^+$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{2}{\frac{1}{n}}\right) = +\infty$$

3

L'ultimo limite implica che f NON ha MASSIMO GLOBALE.

Inoltre la retta  $x = \sqrt{3}$  è asintoto verticale sinistro mentre  $x = -\sqrt{3}$  è asintoto verticale destro

Non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

1c)  $f$  è composizione di  $f$ . continua in  $D_f \Rightarrow$   
 $f$  è continua dove definita.

$f$  è composizione di  $f$ . derivabili in  $D_f \Rightarrow$   
 $f$  è derivabile dove definita.

Sia  $x \in D_f$ : calcoliamo  $f'(x)$ : si ha che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \cdot \left[2 (\lg(4-x^2))^{-1}\right]' \\ &= \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \cdot 2 \cdot (-1) (\lg(4-x^2))^{-2} \cdot \frac{1}{4-x^2} \cdot (-2x) \\ &= \frac{4x}{(4-x^2)(\lg(4-x^2))^2} \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{> 0 \ \forall x \in D_f}$

Quindi  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} kx > 0 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$  <sup>(4)</sup>

e  $f'(0) = 0$ . Pertanto 0 è l'unico punto critico di  $f$ . Inoltre

$f$  è strettamente crescente  $\forall x \in (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

$f$  è " " decrescente  $\forall x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0)$

Di conseguenza: 0 è punto di minimo locale e  $f(0) = \exp\left(\frac{2}{\log 4}\right) = \exp\left(\frac{1}{\log 2}\right)$  è MINIMO locale.

Siccome  $f(0) = \exp\left(\frac{1}{\log 2}\right) > 0 = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} f(x)$

abbiamo che 0 non è di MINIMO GLOBALE.

In particolare,  $f$  non ha minimo globale:

in fatti in  $f$  ( $\text{Im}(f) = 0$  (teo. limiti

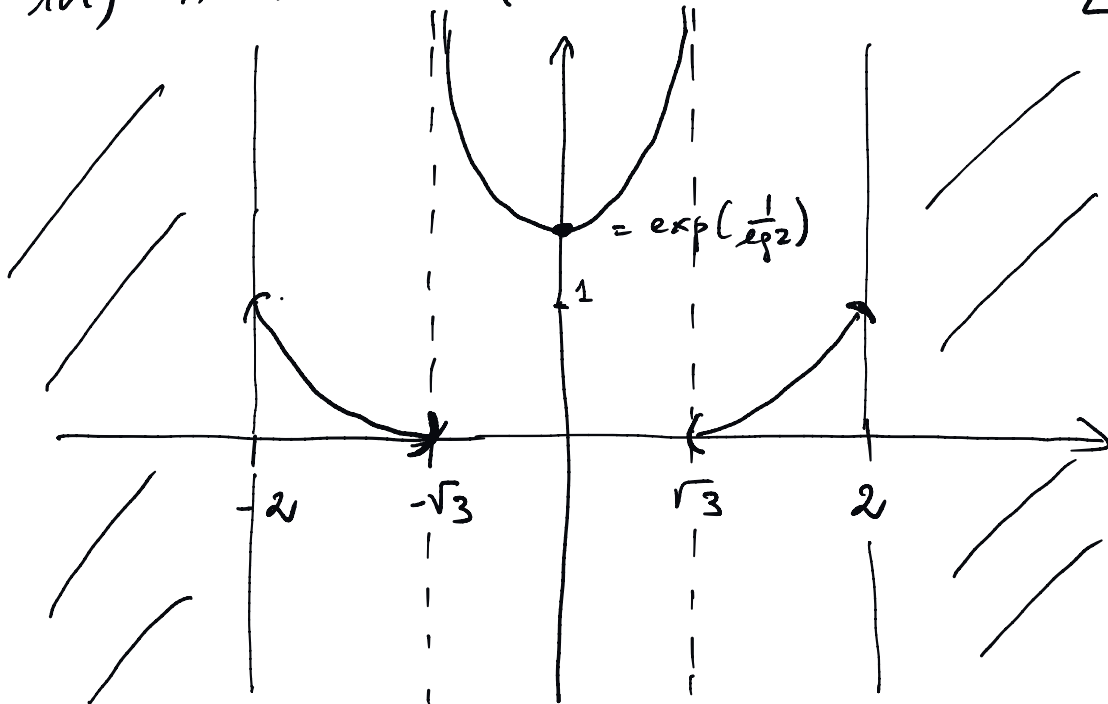
funzione monotone) ma

$$\nexists \bar{x} \in D_f / f(\bar{x}) = 0$$

a causa del segno di  $f$  ( $f(x) > 0 \forall x \in D_f$ ; punto 1a).

1d) Andamento (non in scala)

5



Esercizio 2) Studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0).$$

Differenza che  $\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n(1+\frac{2}{n})} - \sqrt[3]{n}$

$$= \sqrt[3]{n} \left( \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1 \right) = \sqrt[3]{n} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Maclaurin  $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$   
 $x \rightarrow 0^+$

$$= \frac{2}{3 n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty. \quad \lfloor 6$$

Quindi

$$(*) \quad \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta} = \frac{2}{3 n^{\beta+2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{\beta+2/3}}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta} = 0 \quad \forall \beta > 0 \quad (\text{cond. necessaria di conv. è vera})$$

$$\text{Siccome } a_n = \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\text{e } a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{di ordine } \beta + \frac{2}{3}$$

[segue da (\*)], il criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie ci permette di concludere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta} \text{ converge } (\Leftrightarrow) \beta + \frac{2}{3} > 1$$

$$(\Leftrightarrow) \beta > \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3)  $a \in \mathbb{R}$  e  $f_a(x) = \frac{1}{x^a \sqrt{x^2-9}}$  | 7

3a) ordine di infinito per  $x \rightarrow 3^+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f_a(x)}{\frac{1}{(x-3)^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)^\alpha}{x^a \sqrt{x^2-9}} \quad \alpha > 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^a} \frac{(x-3)^\alpha}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^a} \frac{1}{\sqrt{x+3}} (x-3)^{\alpha-1/2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha > 1/2 \\ \frac{1}{3^a \sqrt{6}} (\neq 0) & \alpha = 1/2 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Quindi  $f_a(x) \rightarrow +\infty$  di ordine  $\frac{1}{2}$  per  $x \rightarrow 3^+$

3b) Per quali  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$ ?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a \sqrt{x^2(1-9/x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a |x| \sqrt{1-9/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{a+1}} \frac{1}{\sqrt{1-9/x^2}} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \boxed{8}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a < -1 \\ 1 & \text{se } a = -1 \\ 0 & \text{se } a > -1 \end{cases}$$

Quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a > -1$ .

Da quanto sopra: ( $a > -1$ )  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^{a+1}} \frac{1}{\sqrt{1-9/x^2}} \rightarrow 1$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > a+1 \\ 1 & \text{se } \alpha = a+1 (> 0) \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < a+1 \end{cases}$$

Pertanto  $f_a(x)$  è infinitesimo per  $x \rightarrow +\infty$  se e solo se  $a+1 > 0$ ; in tal caso, il suo ordine è  $a+1$ .

3c) si noti che  $f_a(x) > 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$

che  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f_a(x) = +\infty$  di ordine  $\frac{1}{2}$ ;

che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$  di ordine  $a+1$ .

Pertanto: il criterio dell'ordine di infinito 3  
 implica che  $\int_3^4 f_a(x) dx$  converge  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,

mentre il criterio dell'ordine di infinito 2  
 implica che  $\int_4^{+\infty} f_a(x) dx$  converge se e solo se  
 $a+1 > 1$ ; cioè  $a > 0$ .

Combinando tali risultati si ha che

$$\int_3^{+\infty} f_a(x) dx \text{ converge se e solo se } a > 0.$$

3d) Calcolare  $\int_3^{+\infty} f_1(x) dx$

$f_1(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^2-9}}$ ; unico la sost. consigliata

$t = \sqrt{x^2-9} - x$ ;  $t > 3$  da cui segue che

$x = -\frac{1}{2} \frac{t^2+9}{t} =: g(t)$ . Per il teorema di

$$g'(t) = -\frac{1}{2} t - \frac{9}{2} \frac{1}{t}$$

sostituzione, si ha che

$$g'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} t^{-2}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}} = \int \frac{-2t}{t^2+9} \cdot \frac{2t}{t^2-9} \frac{\sqrt{9-t^2}}{2t^2} dt = \frac{-t^2+9}{2t^2}$$

in cui abbiamo usato anche

$$\sqrt{x^2-9} = t+x = t - \frac{t}{2} - \frac{9}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{9}{2t} = \frac{t^2-9}{2t} \quad \left| 10 \right.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} &= -2 \int \frac{9-t^2}{(t^2+9)(9-t^2)} dt \quad \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{x^2-9} \\ k = t/3 \\ t = 3u \end{array} \right\} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = 2 \int \frac{du}{9((t/3)^2+1)} \\ &= \frac{2}{9} \cdot 3 \int \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(u) + c = \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + c \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}(\sqrt{x^2-9}-x)\right) + c; c \in \mathbb{R} \\ &= F(x) \quad x \in (3, +\infty) \end{aligned}$$

Per definizione

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} f_1(x) dx &= \int_3^5 f_1(x) dx + \int_5^{+\infty} f_1(x) dx \\ &= \lim_{z \rightarrow 3^+} \int_z^5 f_1(x) dx + \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_5^w f_1(x) dx \\ &= \lim_{z \rightarrow 3^+} (F(5) - F(z)) + \lim_{w \rightarrow +\infty} (F(w) - F(5)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{z \rightarrow 3^+} F(z) + \lim_{w \rightarrow +\infty} F(w) \quad \boxed{11} \\
&= -\lim_{z \rightarrow 3^+} \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{z^2 - 9} - z \right) \right) + \\
&\quad + \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{w^2 - 9} - w \right) \right) \\
&= -\frac{2}{3} \left( -\frac{\pi}{4} \right) + \\
&\quad + \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{-9}{\sqrt{w^2 - 9} + w} \right) \\
&= \frac{\pi}{6} + \underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{=0} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 | Calcolare ( $b \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})}{x^b (e^x - 1)}$$

Sia  $N(x) := \sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})$

Abbiamo (continuità di  $\log$  e di  $\operatorname{arctg}$ ) che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N(x) = N(0) = 0. \quad \boxed{12}$$

Usando la f. di MacLaurin si ha

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \quad y \rightarrow 0^+$$

$$\tan(g) = y + \frac{y^3}{3} + o(y^4), \quad g \rightarrow 0^+$$

e quindi  $(x > 0)$

$$N(x) = \cancel{x^{1/3}} - \frac{x}{6} + o(x^{4/3}) - \left( \cancel{x^{1/3}} + \frac{x}{3} + o(x^{4/3}) \right)$$

$$= -x \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + o(x^{4/3}) = -\frac{x}{2} + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

Quindi  $N(x) \rightarrow 0$  di ordine 1 per  $x \rightarrow 0^+$ .

Dobbiamo studiare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N(x)}{x^b(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{x^b(e^x - 1)}$$

Se  $b=0$  : si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{e^x - 1}$

$$\begin{array}{ccc} = & \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{x}{e^x - 1} = -\frac{1}{2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{pr. sost.} & & \text{limite notevole} \\ \text{infinitesimi} & & \end{array}$$

Se  $b > 0$ : Si noti che  $x^b (e^x - 1) \rightarrow 0$   $\left. \vphantom{x^b (e^x - 1)} \right|_{x \rightarrow 0^+}$  13  
di ordine  $1+b$

Pertanto, siccome,  $N(x) \rightarrow 0$  di ordine  $z$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N(x)}{x^b (e^x - 1)} = -\infty$$

Se  $b < 0$ : Va risolto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-b} (x/2 + o(x))}{e^x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^{1-b}}{2} + o(x^{1-b})}{e^x - 1} = 0 \end{aligned}$$

perché il numeratore è ora infinitesimo di ordine  $1-b > 1$  ( $b < 0 \Rightarrow -b > 0$ )

e il denominatore lo è di ordine 1

$$\left( \text{limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$$

□

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno  
 Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

---



---

**PER LA COMMISSIONE D'ESAME**

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = (3 - |x|) \exp(\frac{1}{x+3})$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.
- (1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto;  $\exp(u) := e^u$ .

**Esercizio 2.** (2.a) Determinare tutte le primitive di  $f(x) = \frac{\arctan x}{(x-2)^2}$ .

- (2.b) Studiare la convergenza di  $\int_0^2 f(x) dx$  e di  $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ . Nel caso in cui tali integrali impropri convergano, se ne calcoli il valore.

**Esercizio 3.** Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2}.$$

**Esercizio 4.** Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'(x) = \frac{(y(x)-3)^2}{x^2+9}; \quad y(0) = 4.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

- (5.b) Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Dimostrare che se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $I$  e  $f'(x) < 0$  per ogni  $x \in I$  allora  $f$  è strettamente decrescente in  $I$ .

---

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

---

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno  
 Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

---



---

**PER LA COMMISSIONE D'ESAME**

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = (2 - |x|) \exp(\frac{1}{x+2})$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.
- (1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto;  $\exp(u) := e^u$ .

**Esercizio 2.** (2.a) Determinare tutte le primitive di  $f(x) = \frac{\arctan x}{(x-4)^2}$ .

- (2.b) Studiare la convergenza di  $\int_2^4 f(x) dx$  e di  $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ . Nel caso in cui tali integrali impropri convergano, se ne calcoli il valore.

**Esercizio 3.** Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2-4}.$$

**Esercizio 4.** Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'(x) = \frac{(y(x)-2)^2}{x^2+4}; \quad y(0) = 3.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Enunciare il teorema del differenziale.

- (5.b) Dimostrare il teorema di unicità del limite.

---

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

---

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno  
 Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

---



---

**PER LA COMMISSIONE D'ESAME**

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = (4 - |x|) \exp(\frac{1}{x+4})$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.
- (1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto;  $\exp(u) := e^u$ .

**Esercizio 2.** Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-3)^2}.$$

**Esercizio 3.** Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}.$$

**Esercizio 4.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$ .

**Esercizio 5.** (5.a) Enunciare il teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni.

---

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

---

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno  
 Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

---



---

**PER LA COMMISSIONE D'ESAME**

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	$s/n$	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = (3 - |x|) \exp(\frac{1}{x+3})$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.
- (1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto;  $\exp(u) := e^u$ .

**Esercizio 2.** Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-4)^2}.$$

**Esercizio 3.** Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+3}.$$

**Esercizio 4.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$ .

**Esercizio 5.** (5.a) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

- (5.b) Dimostrare che se  $f$  è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio  $I$ ,  $I$  intervallo, allora  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in I$ .

---

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

---

Analisi Matematica 1, course A  
II affello, 21/02/2023

1

Primo Esercizio Studio di  $f(x) = (3 - |x|) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$

Per il dominio di  $f$  è sufficiente imporre  $x+3 \neq 0 \Rightarrow$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ . Siccome  $D_f$  non è simmetrico rispetto a 0, si ha che  $f$  non è né pari né dispari.

Segno di  $f$ : siccome  $\exp(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}$ , si ha che

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - |x| > 0 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 3 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$$

Inoltre  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ;  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Limiti: I punti di accumulazione sono:  $-\infty, (-3)^-, (-3)^+, +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (x < 0)}} (3+x) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right) = -\infty$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{1} \\ \downarrow 0^- \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x > 0)}} (3-x) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right) = -\infty$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{1} \\ \downarrow 0^+ \end{matrix}$

[ $\Rightarrow f$  non ha MINIMO GLOBALE]

[ $\Rightarrow f$  non ha asintoti orizzontali]

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (3 - |x|) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right) = 0$$

$\begin{matrix} \downarrow 0 \\ \downarrow 0^- \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (3 - |x|) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right) = ???$$

$\begin{matrix} \downarrow 0 \\ \downarrow 0^+ \end{matrix}$

$$= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (3+x) \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$$

$n = \frac{1}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow (-3)^+} +\infty$   
 (gerarchia degli infiniti fatta a lezione).

$\Rightarrow$  f non ha MASSIMO GLOBALE; La retta  $x = -3$  è ASINTOTO verticale destro.

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3-x}{x} \right) e^{\frac{1}{x+3}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) e^{\frac{1}{x+3}} - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \left( e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right) + \underbrace{3 e^{\frac{1}{x+3}}}_{\downarrow 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+3} \left( \frac{e^{\frac{1}{x+3}} - 1}{\frac{1}{x+3}} \right) + 3 e^{\frac{1}{x+3}}$$

(limite notevole)

$$= -1 + 3 = 2$$

limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$

Quindi  $y = -x + 2$  è ASINTOTO OBLIQUO a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x}{x} e^{\frac{1}{x+3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3+x) e^{\frac{1}{x+3}} - x$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x (e^{\frac{1}{x+3}} - 1) + 3e^{\frac{1}{x+3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{x}{x+3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\left( \frac{e^{\frac{1}{x+3}} - 1}{\frac{1}{x+3}} \right)}_{\rightarrow 1} + 3e^{\frac{1}{x+3}} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{array} \right\} 3
 \end{aligned}$$

$$\uparrow \quad 1 + 3 = 4$$

limiti  
notevoli

$$\frac{e^n - 1}{n} \rightarrow 1 \quad n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow y = x + 4$  è asintoto obliquo  
a  $-\infty$

Continuità e derivabilità:  $f$  è continua perché comp. di funzioni

continue.  $f$  è derivabile tranne in 0 in cui  $|x|$  non è derivabile in 0.

$$D_{\text{der}} = D_f - \{0\} = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

Sia  $x > 0$ :  $f(x) = (3-x)e^{\frac{1}{x+3}}$

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+3}} + (3-x)e^{\frac{1}{x+3}} \left( -\frac{1}{(x+3)^2} \right)$$

$$= -e^{\frac{1}{x+3}} \left( 1 + \frac{3-x}{(x+3)^2} \right) = -e^{\frac{1}{x+3}} \left( \frac{x^2 + 9 + 6x + 3 - x}{(x+3)^2} \right)$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} \underbrace{(x^2 + 5x + 12)}_{> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$\Rightarrow f$  è strett. decrescente in  $(0, +\infty)$

Sia  $x < 0, x \neq -3$ :  $f(x) = (3+x)e^{\frac{1}{x+3}}$

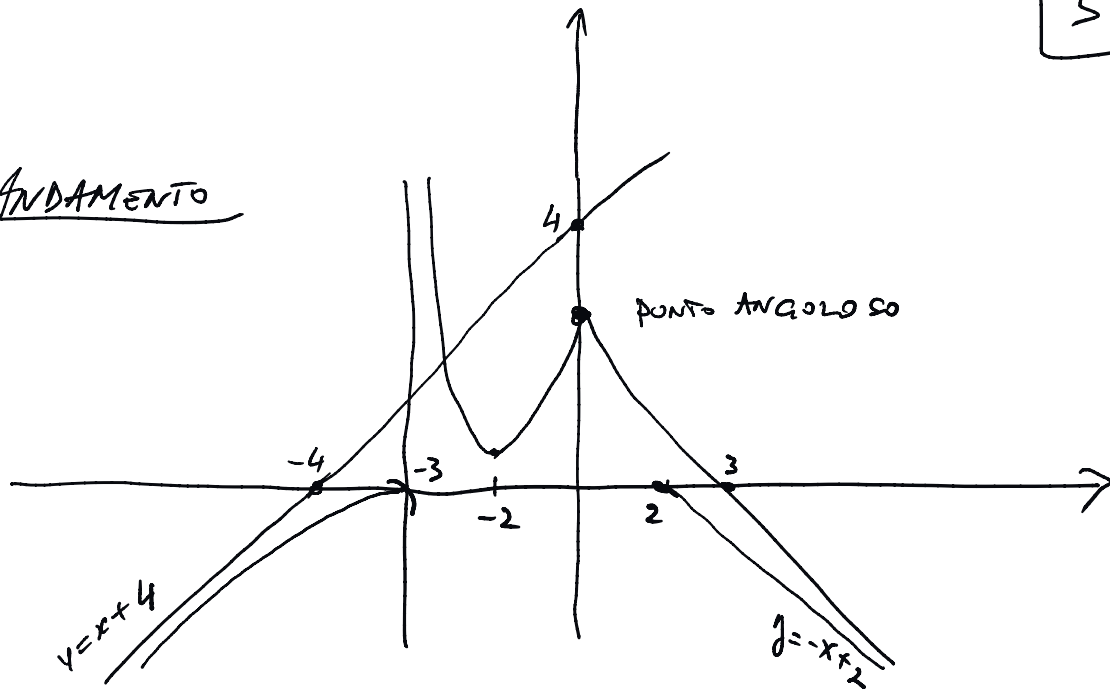
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+3}} + (3+x)e^{\frac{1}{x+3}} \left( -\frac{1}{(x+3)^2} \right) = e^{\frac{1}{x+3}} \left( 1 - \frac{3+x}{(x+3)^2} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+3}} \left( 1 - \frac{1}{x+3} \right) = e^{\frac{1}{x+3}} \frac{x+2}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{x+3} > 0 \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x+2 < 0 \\ x+3 < 0 \\ x < 0 \end{array} \right.$$



ANDAMENTO



**Esercizio 2** 2a) Calcolare tutte le primitive di:  
 $f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-2)^2}$

Integrando per parti si ha che

$$\int \frac{\arctan(x)}{(x-2)^2} dx = -\frac{\arctan(x)}{x-2} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}}_{=I}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}; \quad f(x) = -\frac{1}{x-2}$$

$$g(x) = \arctan x; \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Per risolvere  $I$  usiamo il metodo dei fattori semplici:  
 determiniamo  $A, B, C, \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}, \text{ ossia } \boxed{6}$$

$$A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2) = 1$$

$$\Leftrightarrow Ax^2 + A + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C = 1$$

$$\text{da cui segue } \begin{cases} A+B=0 \\ C-2B=0 \\ A-2C=1 \end{cases} \begin{cases} A=-B \\ C=2B \\ -B-4B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1/5 \\ C = -2/5 \\ B = -1/5 \end{cases} ; \text{ Pertanto } \frac{1/5}{x-2} + \frac{-1/5x - 2/5}{x^2+1} = \frac{1}{(x+2)(x^2+1)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{5} \int \frac{x+2}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{10} \ln|x^2+1| - \frac{2}{5} \arctg|x| + C \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  cost. def. a tratti

2b) Studiare la convergenza di  $\int_0^2 f(x) dx$  e  $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ .  
Nel caso convergono, se ne calcoli il valore.

Ricordando  $f(x) = \frac{\arctan x}{(x-2)^2}$  7

Si ha che

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  e  $f$  continua in  $D_f$ .

La convergenza dell'integrale di  $f$  in  $[0, 2)$  dipende pertanto dal suo ordine di infinito (ricordi che  $f(x) > 0$  per  $x > 0$ ).

$$\text{Si pone } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{(2-x)^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|\arctan x|}{(2-x)^{2-\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

$$= \begin{cases} 0 & x > 2 \\ \arctan(2) & \alpha = 2 \\ +\infty & 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

(e dunque  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ )  $f$  ha ordine di infinito uguale a 2 per  $x \rightarrow 2^-$ .

Il criterio dell'ordine di infinito ci permette di concludere che  $\int_0^2 f(x) dx$  DIVERGE.

Osservo ora che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(x-2)^2} \arctan x = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 2 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

Pertanto  $f$  ha ordine di INFINITESIMO PARO a 2

per  $x \rightarrow +\infty$ . Il criterio dell'ordine di infinitesimo ci permette di concludere che

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx \text{ CONVERGENTE.}$$

8

Per calcolare  $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ , sia  $F(u)$  una primitiva di  $f(u)$ . Allora

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_3^u f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} (F(u) - F(3))$$

Ricordando (punto a) che

$$F(u) = -\frac{\operatorname{arctan}(u)}{u-2} + \frac{1}{5} \log|u-2| - \frac{1}{10} \log(u^2+1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(u)$$

si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) &= 0 - \frac{2}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \lim_{u \rightarrow +\infty} \log \left( \frac{(u-2)^2}{u^2+1} \right) \\ &= -\frac{\pi}{5} + \frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 1} \log t \\ &= -\frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx = -\frac{\pi}{5} + \frac{7 \operatorname{arctan}(3)}{5} + \frac{1}{10} \log(10).$$

Esercizio 3

Studiare la convergenza di  $\left[ \begin{array}{l} 9 \end{array} \right]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2}$$

Sia  $a_n = \frac{n+2}{n^2+2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Inoltre

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n+2}{n^2+2} = a_n \quad \text{perch\`e}$$

$$\frac{n+3}{n^2+2n+3} \leq \frac{n+2}{n^2+2} \Leftrightarrow (n+3)(n^2+2) \leq (n+2)(n^2+2n+3)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^3} + 3n^2 + 2n + \cancel{6} \leq \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n^2 + 4n + 3n + \cancel{6}$$

$$\Leftrightarrow n(3n+2) \leq n(4n+7)$$

$$\Leftrightarrow 3n+2 \leq 4n+7 \Leftrightarrow 0 \leq n+5$$

Pertanto  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Ossia  $a_n$  \u00e8 deb. decrescente

$$\begin{aligned} \text{Inoltre} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+2/n)}{n^2(1+2/n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1+2/n}{1+2/n^2} = 0 \end{aligned}$$

Possiamo pertanto applicare il Criterio di von Leibniz; quindi

$$\sum (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2} \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$

### Esercizio 4

Risolvere  $y'(x) = \frac{(y(x)-3)^2}{x^2+9}$  ;  $y(0) = 4$  10

Notiamo che  $y(x) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  è sol. dell'equazione differenziale, ma non del problema di Cauchy (perché  $y(0) = 4 \neq 3$ ).

Sia  $y(x) \neq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . L'eq. differenziale equivale a  $\frac{y'(x)}{(y(x)-3)^2} = \frac{1}{x^2+9}$  da cui

si ha

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x)-3)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+9}$$

Si pone  $[-(y(x)-3)^{-1}]'$  è l'integrando del lato sinistro, otteniamo che

$$-\frac{1}{y(x)-3} = \int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{9\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right]}$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{3u}{u^2+1} du = \frac{1}{3} \arctg(u) + C$$

$\uparrow$   
 $u = \frac{x}{3}$   
 $3u = x$

$g(u) = 3u, \quad g'(u) = 3;$

$\overline{u = \frac{x}{3}}$   
 $C \in \mathbb{R}$

ossia

$$\frac{1}{y(x)-3} = -\frac{1}{3} \operatorname{atg}\left(\frac{x}{3}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{u}$$

$$y(x)-3 = \frac{3}{- \operatorname{atg}\left(\frac{x}{3}\right) + 3c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(*) \quad y(x) = 3 + \frac{3}{3c - \operatorname{atg}\left(\frac{x}{3}\right)}; \quad c \in \mathbb{R}.$$

risolve l'eq. differenziale.

Il pb. di Cauchy richiede  $y(0) = 4$ ;  
sostituendo in (\*) si ha:

$$4 = y(0) = 3 + \frac{3}{3c - 0} = 3 + \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = 1.$$

In conclusione l'unica sol. del pb. di Cauchy è

$$y(x) = 3 + \frac{3}{3 - \operatorname{atg}\left(\frac{x}{3}\right)}$$



Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = |(x-1)\log(x-1)|$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Determinare la convessità di  $f(x)$ . Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \arctan(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2} \log x}$$

**Esercizio 3.** Per ogni  $a \in \mathbb{R}$  sia data  $f_a(t) = t^a \arctan t$ .

- (3.a) Per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $\int_0^1 f_a(t) dt$  converge?
- (3.b) Calcolare  $\int_1^2 f_{-2}(t) dt$ .
- (3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in  $x_0 = 2$ , di  $F(x) = \int_2^x f_{-1}(t) dt$ .

**Esercizio 4.** Studiare, per ogni  $b \in \mathbb{R}$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}$$

**Esercizio 5.** (5.a) Fornire l'enunciato della condizione di estremalità locale con le derivate successive.

(5.b) Dimostrare il teorema delle tre funzioni.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = |(x+2)\log(x+2)|$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Determinare la convessità di  $f(x)$ . Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{(\sin x)^2 + x^{9/2} \log x}.$$

**Esercizio 3.** Per ogni  $a \in \mathbb{R}$  sia data  $f_a(t) = \frac{\log(1+t)}{t^a}$ .

- (3.a) Per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $\int_0^1 f_a(t) dt$  converge?
- (3.b) Calcolare  $\int_1^2 f_2(t) dt$ .
- (3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in  $x_0 = 2$ , di  $F(x) = \int_2^x f_1(t) dt$ .

**Esercizio 4.** Studiare, per ogni  $b \in \mathbb{R}$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log(1+b))^n}{\sqrt{n+1} + 1}.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Fornire l'enunciato della condizione sufficiente del primo ordine di estremalità locale.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Lagrange.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = |(x-3)\log(x-3)|$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Determinare la convessità di  $f(x)$ . Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(2x) - 1 - 2(\sin x)^2}{(\sin x)^2 + x^{9/2} \log x}.$$

**Esercizio 3.** Per ogni  $b \in \mathbb{R}$  sia data  $f_a(t) = \frac{\log(1+t)}{t^{2b}}$ .

- (3.a) Per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $\int_0^1 f_b(t) dt$  converge?
- (3.b) Calcolare  $\int_1^2 f_1(t) dt$ .
- (3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in  $x_0 = 2$ , di  $F(x) = \int_2^x f_{1/2}(t) dt$ .

**Esercizio 4.** Studiare, per ogni  $b \in \mathbb{R}$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos b)^n}{\sqrt{n+1} + 2}.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di convergenza di una serie numerica.

(5.b) Dimostrare il Teorema dell'unicità del limite.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = |(x+3)\log(x+3)|$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Determinare la convessità di  $f(x)$ . Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) - 1 + 2(\sinh x)^2}{(e^x - 1)^2 + x^{7/2} \log x}.$$

**Esercizio 3.** Per ogni  $b \in \mathbb{R}$  sia data  $f_a(t) = \frac{\arctan t}{t^{2b}}$ .

- (3.a) Per quali  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $\int_0^1 f_b(t) dt$  converge?
- (3.b) Calcolare  $\int_1^2 f_1(t) dt$ .
- (3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in  $x_0 = 2$ , di  $F(x) = \int_2^x f_{1/2}(t) dt$ .

**Esercizio 4.** Studiare, per ogni  $b \in \mathbb{R}$ , la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan b)^n}{\sqrt{n+2}+3}.$$

**Esercizio 5.** (5.a) Fornire l'enunciato del teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esame di Analisi 1, III Appello 2022/23 [7]  
 Ing. Chimica e Materiali [File A]

Esercizio 1 Sia  $f(x) = |(x-1) \log(x-1)|$ .

1a) Dominio: È sufficiente imporre  $x-1 > 0$ .  $D_f = (1, +\infty)$ .

Inoltre  $f(x) \geq 0 \forall x \in D_f$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ x-1=0 \text{ o} \\ x-1=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2$ . Allora  $\boxed{0 \text{ è MINIMO GLOBALE e } 2 \text{ è punto di minimo globale.}}$   
 f non è né pari né dispari (Df non simmetrico rispetto a 0)

1b) I punti di accumulazione per Df sono: 1 (da destra) e  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ (x > 1)}} (x-1) |\log(x-1)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ (1 < x < 2)}} [(x-1) \log(x-1)]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} [t \log t] = 0 \quad (\text{limite di un. in classe})$$

$\Rightarrow$  f non ha asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x > 10)}} \overbrace{(x-1)}^{+\infty} \overbrace{\log(x-1)}^{+\infty} = +\infty$$

$\uparrow$  lim te del prodotto

Pertanto  $\boxed{f \text{ non ammette MASSIMO GLOBALE}}$

Asintoto a  $+\infty$ ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x > 10)}} \frac{(x-1) \log(x-1)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\log(x-1)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

Pertanto f non ha asintoto obliquo a  $+\infty$ .

1c)  $f$  è composizione, prodotto, di  $f$  continue in  $D_f$ .  
 Quindi  $f$  è CONTINUA in  $D_f$ .  
 Per  $x \in D_f - \{2\}$ ,  $f$  è comp. e prodotto di  $f$  derivabili in  $D_f - \{2\}$ . Quindi  $f$  è DERIVABILE in  $D_f - \{2\}$ . } 2

Sia  $x_0 = 2$ : considero

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1) \lg(x-1) - 0}{x-2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ (x-1 > 1)}} (x-1) \frac{\lg(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) \underbrace{\frac{\lg(1+(x-2))}{x-2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{limite notevole}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1) \lg(x-1) - 0}{x-2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ (x-1 < 1)}} \frac{-(x-1) \lg(x-1)}{x-2} = -1 \end{aligned}$$

↑  
stessi calcoli fatti

Per tanto  $f$  non è derivabile in 2; di questo tipo 2 è punto ANGOLOSO per  $f$ .

Sia  $x \in (1, 2)$ :  $f(x) = -(x-1) \lg(x-1)$  e quindi

$$f'(x) = -\lg(x-1) - 1 \quad (x \in (1, 2))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x \in (1, 2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lg(x-1) = -1 \\ x \in (1, 2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = e^{-1} \\ x \in (1, 2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x = 1 + e^{-1}$$

$$\text{Inoltre } f'(x) > 0 \quad (x \in (1, 2)) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lg(x-1) < -1 \\ x \in (1, 2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, 1 + e^{-1})$$

Pertanto  $f$  è strettamente crescente in  $(1, 1+e^{-1})$  e  
 $f$  è " decrescente in  $(1+e^{-1}, 2)$  } 3

$1+e^{-1}$  è pto di MASSIMO LOCALE;  $f(1+1/e) = \frac{1}{e}$

Sia  $x > 2$ :  $f(x) = (x-1) \lg(x-1)$  e quindi

$$f'(x) = \lg(x-1) + 1 \quad (x > 2)$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x-1) = -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 1/e \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \neq 0 \quad \forall x > 2.$$

Inoltre  $\begin{cases} f'(x) = 1 + \underbrace{\lg(x-1)}_{> 0} \\ x > 2 \end{cases} > 1 \Rightarrow f$  è  
 strettamente crescente per  $x > 2$ .

1d) Concavità: usando 1c) si ha che  $f$  è derivabile

per  $x \in D_f \setminus \{2\}$  essendo prodotto di f. derivabili in  
 tale insieme. Siccome

$$f'(x) = \begin{cases} -\lg(x-1) - 1 & \text{se } x \in (1, 2) \\ \lg(x-1) + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

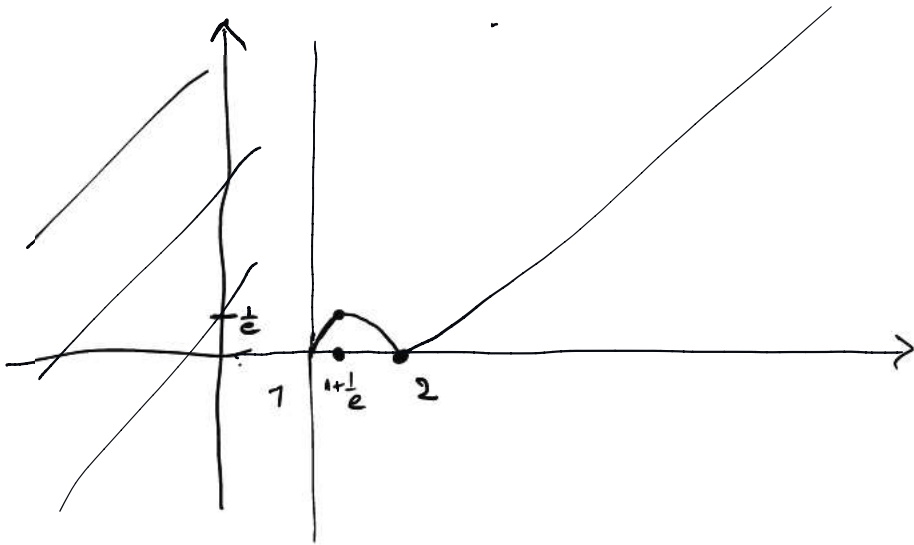
si ha che

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-1} & \text{se } x \in (1, 2) \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

chiaramente  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (1, 2)$  e  
 $f''(x) > 0 \quad \forall x > 2$ . Pertanto

$f$  è CONCAVA in  $(1, 2)$  e  $f$  è CONVESSA in  $(2, +\infty)$ .

Un aumento di  $f$  è:



② Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \arctan(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2} \lg x}$

Come viene esaminare il denominatore: allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sinh x)^2}{x^2} = 1 \quad \text{si ha che } \sinh x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

di ordine 2. D'altra parte  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{7/2} \lg x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/2} \lg x = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$x^{7/2} \lg x = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Usando  $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  per  $x \rightarrow 0^+$

$$\text{si ha, due: } (\sinh x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$= x^2 \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2$$

$$= x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 \left( 1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2) \right) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad (5)$$

Pertanto il denominatore è

$$(\sinh x)^2 + x^{7/2} \lg x = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Per il numeratore:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \quad \text{per } u \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctan}(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad \text{per } u \rightarrow 0$$

Da ciò segue che

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 - \operatorname{arctan}(2x) &= \\ 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) + \\ -2x + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3) &= \\ = 2x^2 + 4x^3 + o(x^3) &\quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \operatorname{arctan}(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2} \lg x} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x^2} &= 2. \end{aligned}$$

↑  
Principio sost.  
INFIMITESIMI  
di ordine superiore.

Esercizio 3)  $f_a(t) = t^a \arctan t$ ,  $a \in \mathbb{R}$

(3a) Osserviamo che per  $a > 0$  si ha  $f_a(t) = t^a \arctan t$  che è continua in  $[0, 1]$ . L'integrale è di Riemann.

Per  $a = 0$   $f_0(t) = \arctan t$  che è continua in  $[0, 1]$ . L'integrale è di Riemann.

Per  $a < 0$   $f_a(t)$  è definita e continua in  $(0, 1]$ .

Inoltre  $f_a(t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1], a < 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Osservo che } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \arctan t &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan t}{t} t^{1+a} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1+a} = \begin{cases} 0 & 0 > a > -1 \\ 1 & a = -1 \\ +\infty & a < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

limiti notevoli

Pertanto per  $a \in [-1, 0)$ , l'integrale è di Riemann ( $f_a$  prolungabile per continuità in  $0$ ).

Inoltre per  $a < -1$ , il calcolo precedente rivela

che  $f_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$  di ordine  $\alpha = -(1+a)$

Se  $0 < -(1+a) < 1$ , il criterio asintotico permette di concludere che  $\int_0^1 f_a(t) dt$  converge (perché  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{1+a}}$ ,  $-2 < a < -1$ ).

Se  $-a-1 > 1$ , il criterio asintotico permette di concludere che  $\int_0^1 f_a(t) dt$  diverge (perché  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{1+a}}$ ,  $a \leq -2$ ).

concludere che  $\int_0^1 f_2(t) dt$  diverge. (7)

In conclusione  $\int_0^1 f_2(t) dt$  converge  $\Leftrightarrow a > 2$

(3b) Calcolare  $\int_1^2 f_2(t) dt$ .

$$f_2(t) = \frac{\arctan t}{t^2} \in C^0[1,2] \Rightarrow (\text{per il TFC})$$

$$\int_1^2 f_2(t) dt = F(2) - F(1)$$

dove  $F(t)$  è una primitiva di  $f_2$  in  $[1,2]$ .

Calcolo  $F(t)$ : integrando per parti si ha:

$$\int \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \int \left(-\frac{1}{t}\right) \arctan(t) dt$$

$f' = -\frac{1}{t^2}$     $g = \arctan(t)$

$$= \left(-\frac{1}{t}\right) \arctan(t) + \int \frac{dt}{t(t^2+1)}; \quad t \in I$$

Cerco  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tali che  $\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)t}{t(t^2+1)}, \quad t \in I$$

Quindi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}, \quad t \in I$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t(t^2+1)} &= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{t^2+1} dt \\ &= \ln|t| - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C; \quad t \in I \\ &\quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \frac{atg(t)}{t^2} dt = -\frac{atg t}{t} + \lg t - \frac{1}{2} \lg(t^2+1) + c \quad (8)$$

$c \in \mathbb{R}; t \in I.$

Sia  $F(x) = \lg x - \frac{1}{2} \lg(x^2+1) - \frac{atg x}{x}; x \in I.$

Quindi

$$\int_1^2 \frac{atg(x)}{x^2} dx = F(2) - F(1)$$

$$= \lg 2 - \frac{1}{2} \lg 5 - \frac{1}{2} atg 2 + \frac{1}{2} \lg 2 + atg 1$$

$$= \frac{3}{2} \lg 2 - \frac{1}{2} \lg 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} atg 2$$

(3C) Studiare ( $b \in \mathbb{R}$ ) la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}$$

Poniamo  $a_n(b) = \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}.$

Sia  $b = k\pi; k \in \mathbb{Z}$ . Allora  $a_n(k\pi) = 0 \forall n$  e  $\sum a_n(b)$  ESISTE CONVERGE

Sia  $b \neq k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$ , Utilizzo il criterio del rapporto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(b)}{a_n(b)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sin b)^{n+1} \frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+3}+1}}{(\sin b)^n} \right|$$

$$= |\sin b| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+3}+1} = |\sin b|$$

$$\left[ = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}})} \right]$$

Pertanto se  $\left. \begin{array}{l} b \neq h\pi; h \in \mathbb{Z} \\ |\sin b| < 1 \end{array} \right\}$  si ha, per il criterio  $\left. \right\} 9$

della radice che  $\sum a_n(b)$  converge assolutamente.

Sia  $\underline{b/\sin b = 1}$  ( $b = \pi/2 + 2h\pi; h \in \mathbb{Z}$ ): allora la serie diventa  $\sum \frac{1}{\sqrt{n+2}+1}$  in cui  $\frac{1}{\sqrt{n+2}+1} \rightarrow 0$  di ordine  $\frac{1}{2}$ . Per il criterio asintotico in tal caso la serie diverge.

Sia  $\underline{b/\sin b = -1}$  ( $b = -\pi/2 + 2h\pi; h \in \mathbb{Z}$ ): allora la serie diventa  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+1}$ . Siccome

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+1} \geq 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ e}$$

$c_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+3}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}+1} = c_n$ , per il criterio di von Leibnitz,  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+1}$  converge

In conclusione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1} \text{ converge } \forall b \in \mathbb{R}, \left. \begin{array}{l} \{-\frac{\pi}{2} + 2h\pi\} \\ h \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: Chimica e Materiali

12 settembre 2023 (Quarto appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

## PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \log|x^2 + 3x - 4|$ .

- (1.a) Determinare il dominio di  $f(x)$ , eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di  $f$ .
- (1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di  $f(x)$ .
- (1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di  $f(x)$ ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di  $f(x)$ .
- (1.d) Determinare la convessità di  $f(x)$ . Disegnare un grafico qualitativo di  $f(x)$  in tutto il suo dominio.

**Esercizio 2.** Studiare, per  $a \in \mathbb{R}$ , la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{an}}{n+2}.$$

**Esercizio 3.** Calcolare  $\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx$ .**Esercizio 4.** (4.a) Dimostrare il principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore.

(4.b) Enunciare il Teorema della media integrale.

**Tempo: 3 ore.**

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 2, Ing. Chimica e Materiali

W Appello

1

Risoluzione file B

1) Sia  $f(x) = \log |x^2 + 3x - 4|$

1a)  $f$  è definita per  $|x^2 + 3x - 4| > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \neq 0$   
 $(x+4)(x-1)$

Pertanto  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

$f$  non ha simmetrie pari o dispari perché  $D_f$  non è simmetrico rispetto a 0.

Segno di  $f$ :  $f(x) > 0 \Leftrightarrow |x^2 + 3x - 4| > 1$

$\Leftrightarrow \underset{\text{I}}{(x^2 + 3x - 4 > 1)}$  oppure  $\underset{\text{II}}{(x^2 + 3x - 4 < 1)}$

Risolvo I:  $x^2 + 3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$  oppure  $x > \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$

Risolvo II:  $x^2 + 3x - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$

Quindi  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) \cup$

Inoltre  $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^2 + 3x - 4| = 1$   $\left(\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 1$  oppure  $x^2 + 3x - 4 = -1$

$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}\right\}$

Infine  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, -4\right) \cup \left(-4, \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, 1\right) \cup$   
 $\cup \left(1, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}\right)$ .

1b) I punti di acc. di  $D_f$  sono:  $-\infty, -4, 1, +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lg |x^2 + 3x - 4| = +\infty \quad (\Rightarrow f \text{ non ha MASSIMO GLOBALE}) \quad [2]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg |x^2 + 3x - 4| = +\infty \quad (\Rightarrow f \text{ non ha minimo globale})$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \lg \left| \underbrace{(x-1)}_{\downarrow 5} \underbrace{(x+4)}_{\downarrow 0^-} \right| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \lg u = -\infty \quad (\Rightarrow f \text{ non ha MINIMO GLOBALE})$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} \lg \left| \underbrace{(x-1)}_{\downarrow 5} \underbrace{(x+4)}_{\downarrow 0^+} \right| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \lg u = -\infty \quad (\Rightarrow \text{La retta } x = -4 \text{ \u00e9 ASINTOTO VERTICALE})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lg \left| \underbrace{(x-1)}_{\downarrow 0^-} \underbrace{(x+4)}_{\downarrow 5} \right| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \lg u = -\infty \quad \left. \begin{array}{l} \text{La retta } x = 1 \\ \text{\u00e9 ASINTOTO} \\ \text{verticale.} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lg \left| \underbrace{(x-1)}_{\downarrow 0^+} \underbrace{(x+4)}_{\downarrow 5} \right| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \lg u = -\infty$$

In fine siccome  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\lg |x^2 + 3x - 4|}{x} = 0$

e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\lg |x^2 + 3x - 4|}{x} = 0$  (grazie degli infiniti)

abbiamo che  $f$  non ha asintoti obliqui.

1c)  $f$  \u00e9 continua in  $D_f$  perch\u00e9 \u00e9 composta da  $f$  continue.  
 $f$  \u00e9 derivabile in  $D_f$  " " " " derivabili.  
 infatti  $\lg |u|$  \u00e9 derivabile  $\forall u \neq 0$  e  $x^2 + 3x - 4$  \u00e9 derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Per tanto 
$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-4} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-4, 1\}$$

Chiaramente  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3/2$ ; inoltre

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+3 > 0 \\ x^2+3x-4 > 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 2x+3 < 0 \\ x^2+3x-4 < 0 \end{array} \right.$$

A \hspace{10em} B

Risolvo A:

$$A: \left\{ \begin{array}{l} x > -3/2 \\ x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \end{array} \right.$$

Risolvo B:  $B = \left\{ \begin{array}{l} x < -3/2 \\ x \in (-4, 1) \end{array} \right\} \cup \left\{ x \in (-4, -3/2) \right\}$  | 3

Quindi  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -3/2) \cup (1, +\infty)$   
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-3/2, 1)$

Pertanto  $f$  è strettamente crescente in  $(-4, -3/2) \cup (1, +\infty)$   
 $f$  è " decrescente " in  $(-\infty, -4) \cup (-3/2, 1)$

Il punto  $-3/2$  è punto di MASSIMO LOCALE e  
 $f(-3/2) = \lg(|(-3/2) - 1|) = \lg(5/2) = 2 \lg(5/2)$  è MASSIMO LOCALE

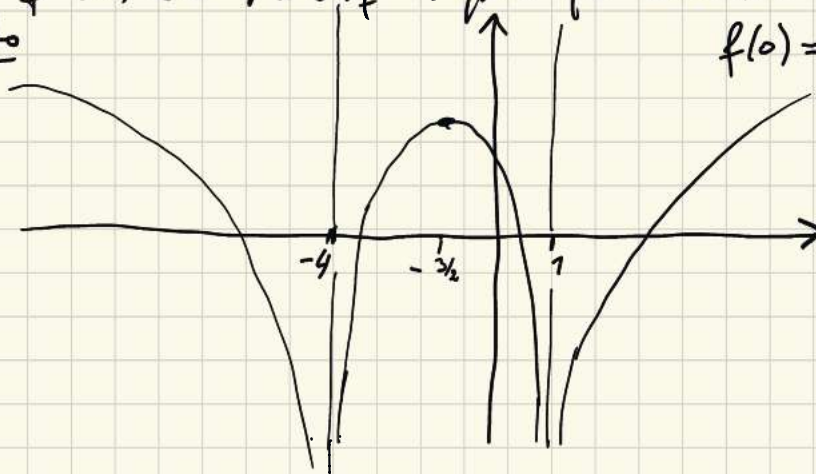
1D) Concavità: siccome  $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-4}$  è rapporto di f. deriv.

abili in  $D_f$ , anche  $f''$  esiste in  $D_f$ . Inoltre

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x+4) - (2x+3)^2}{(x-1)^2(x+4)^2} = \frac{-2x^2 - 6x - 17}{(x-1)^2(x+4)^2} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

Quindi  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 6x - 17 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 17 < 0$   
 che non ha soluzioni reali essendo  $\Delta = 36 - 8 \cdot 17 < 0$

Allora  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$  e quindi  $f$  è CONCAVA in  $D_f$   
Andamento  $f(0) = 2 \lg 2$



Esercizio 2 |  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{an}}{n+2}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) | 4

Sia  $b_n(a) = 3^{an}/(n+2) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Usò il criterio del

$$\text{rapporto: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(a)}{b_n(a)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{a(n+1)}}{n+3} \frac{n+2}{3^{an}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} 3^a = 3^a.$$

Pertanto il criterio del rapporto implica che per  $a/3^a < 1$  (ossia  $a < 0$ ) la serie CONVERGE e che per

$a$  tale che  $3^a > 1$  (ossia  $a > 0$ ) la serie DIVERGE.

Per  $a=0$  il criterio del rapporto non permette di concludere. Osserviamo che

$$b_n(0) = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ di ordine 1.}$$

Per il criterio aritmetico, si ha che  $\sum \frac{1}{n+2}$  DIVERGE

In conclusione:  $\sum \frac{3^{an}}{n+2}$  converge  $\Leftrightarrow a < 0$ .

Esercizio 3, Calcolare  $\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx$

Siccome  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4}$  è continua  $\forall x \in [1, 2]$ ,  $f$  è Riemann

integrabile e vale il T.F.C.I. Calcolo

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx \stackrel{\uparrow}{=} \int \frac{t}{t^2 - 4t + 4} \frac{dt}{t}$$

$$t = e^x, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$g(t) = \ln t = x; \text{ stretta inversa } (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C \quad \left. \vphantom{\int} \right\} t = e^x, t > 0, t \neq 2$$

$$= -\frac{1}{e^x - 2} + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\lg 2\}, \quad c \text{ cost. a tratti } \lfloor 5$$

Poniamo  $F(x) = \frac{-1}{e^x - 2}$ . Allora per le F.F.C.I. si

$$\begin{aligned} \text{ha} \\ (\lg 2 < 1) \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx &= F(2) - F(1) \\ &= \frac{-1}{e^2 - 2} + \frac{1}{e - 2} = \frac{e^2 - e}{(e^2 - 2)(e - 2)} \end{aligned}$$