APPUNTI DI

CONTROLLO DIGITALE

A. FERRANTE

OBIETTIVI DEL CORSO

1. Analisi di segnali e sistemi a tempo discreto sia nel dominio del tempo sia nel dominio delle frequenze (trasf. zeta).
2. Analisi delle interconnessioni fra segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto (analogici e digitali).
3. Progetto di sistemi di controllo digitali e legami (e approfondimenti) con i controllori analogici

Essenzialmente si tratta della controparte a tempo discreto del corso di "controlli automatici" con approfondimenti e analisi delle interconnessioni ANALOGICO/DIGITALE.

CENNI STORICI

Shannon (47)
Nyquist (campionamento)
Ragazzini + Zadeh (trasformata zeta).

Rapidissima evoluzione negli ultimi 60 anni.

VANTAGGI	SVANTAGGI
+ In presenza di rumore limitato è possibile trasmettere (o memorizzare) una copia "perfetta" del segnale	- Alimentazione elettrica
	- Tempi di calcolo
	- Quantizzazione (non-lin.)
+ Possibilità di implementare facilmente algoritmi complessi.	- Campionamento (ritardo)
+ Versatilità, riconfigurabilità (universalità) del controllore digit.	- Limite alla "massima frequenza" più stringente
+ Interfaccia utente (con controlli di sicurezza, fine corsa etc).	- Manutenzione (addestramento del personale).
	- ~~Maggiore~~ costo
+ Effetti trascurabili dell'invecchiamento	
+ Minore costo	

SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Sono successioni ossia funzioni definite in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ a valori

c'è lo zero!

in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ (o, più in generale, in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$). Noi considereremo quasi solo il caso di segnali definiti in $\mathbb{R}$.

Per esempio, nel caso in cui il dominio è $\mathbb{Z}$ e il codominio è $\mathbb{R}$, un segnale a tempo discreto è una funzione

$$x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto x(k)$$

SEGNALI DIGITALI

Un segnale digitale è un segnale a tempo discreto che (invece di assumere valori in $\mathbb{R}$) assume valori in un insieme discreto che tipicamente è $q\mathbb{Z} := \{0, \pm q, \pm 2q, \pm 3q, \dots\}$. q si dice passo di quantizzazione del segnale. Posso sempre pensare che un segnale digitale sia modellato come la somma di un segnale a tempo discreto a valori in $\mathbb{R}$ e di un "rumore di quantizzazione". Anche quest'ultimo è un segnale a tempo discreto e valori in $\mathbb{R}$ ma i suoi valori sono anche <u>limitati</u> e anzi sono compresi in $\left(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$. Naturalmente, più piccolo è q, più la corrispondente approssimazione con un segnale a valori in $\mathbb{R}$ è buona. In ogni caso, se tengo conto del rumore di quantizzazione posso analizzare segnali digitali considerando al loro posto i corrispondenti segnali a valori reali. Ciò risulta conveniente perchè i segnali digitali sono molto più difficili da trattare.

Spazi vettoriali di segnali a tempo discreto

$$\ell_\infty := \left\{ x(\cdot) : \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sup_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ (k\in\mathbb{Z}_+)}} |x(k)| < M \right\}$$

$$\ell_1 := \left\{ x(\cdot) : \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ (k\in\mathbb{Z}_+)}} |x(k)| < M \right\}$$

$$\ell_2 := \left\{ x(\cdot) : \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ (k\in\mathbb{Z}_+)}} |x(k)|^2 < M \right\}$$

Sono spazi normati:

$$x(\cdot) \in \ell_\infty \Rightarrow \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|$$

$$x(\cdot) \in \ell_1 \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|$$

$$x(\cdot) \in \ell_2 \Rightarrow \|x\|_2 = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^2 \right]^{1/2}$$

Si ha:

$$\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$$

Più in generale posso definire ℓ_p, $p \in [1, \infty)$ come

$$\ell_p := \left\{ x(\cdot) : \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ (k \in \mathbb{Z}_+)}} |x(k)|^p < M \right\} \quad e$$

$$\|x\|_p := \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^p \right]^{1/p}$$

Chiaramente

$$\ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty \qquad \forall\, p < q$$

A tempo continuo le inclusioni analoghe <u>non</u> valgono.

ℓ_p sono spazi di Banach $\forall\ p \in [1, \infty]$

ℓ_2 è sp. di Hilbert. Infatti

$$\|x(\cdot)\|_2^2 = \langle x(\cdot), x(\cdot)\rangle$$

dove $\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\, y(k)$

(se i segnali sono complessi $\langle x, y\rangle := \sum_k \overline{x(k)}\, y(k)$)

SISTEMI LINEARI

Il più generale legame lineare che esprime $y(k)$ (uscita al tempo k) in funzione di $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ è

$$y(k) = \sum_{j\neq k} a(j,k)\, y(j) + \sum_j b(j,k)\, u(j)$$

Noi siamo interessati a modelli causali, tempo-invarianti e con memoria finita (implementabili in pratica):

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, y(k-j) + \sum_{j=0}^{m} b_j \, u(k-j) . \qquad (*)$$

Consideriamo quindi la classe ~~di~~ di sistemi (*).

Un approccio alternativo è quello che considera il legame I/O mediato da un'equazione del I° ordine vettoriale relativa allo stato $x(t)$ del sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0 \text{ (stato iniz.)}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$. In questo caso si possono facilmente considerare ingressi e uscite vettoriali ($y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$).

Si vede facilmente che

$$y(t) = C A^t x_0 + C \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} B\,u(i) + D\,u(t)$$

$$= \underbrace{C A^t x_0}_{\text{C.I.}} + D\,u(t) + CB\,u(t-1) + CAB\,u(t-2) + \dots + CA^{t-1}B\,u(0)$$

ESEMPIO

Discretizzazione di eq. del 2° ordine:

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) = b_0 u(t)$$

Sia δt piccolo rispetto alla variabilità del segnale di modo che

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\right] \simeq \frac{y(t) - y(t-\delta t)}{\delta t}$$

Sia
$$\begin{cases} \tilde{y}(k) := y(k\,\delta t) & k \in \mathbb{Z} \\ t = k\,\delta t \quad \text{(istanti che considero)}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[y(t)\right] \simeq \frac{\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)}{\delta t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[y(t)\right] \simeq \frac{1}{\delta t}\left[\frac{\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)}{\delta t} - \frac{\tilde{y}(k-1) - \tilde{y}(k-2)}{\delta t}\right]$$

$$= \frac{\tilde{y}(k) - 2\,\tilde{y}(k-1) + \tilde{y}(k-2)}{\delta t^2}$$

$\Rightarrow$ L'eq. discretizzata è:

$$\frac{a_2}{\delta t^2}\left[\tilde{y}(k) - 2\,\tilde{y}(k-1) + \tilde{y}(k-2)\right] + \frac{a_1}{\delta t}\left[\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)\right] = b_0\,\tilde{u}(k)$$

con $\tilde{u}(k) := u(k\delta t)$

$\Rightarrow$

$$\tilde{a}_0\,\tilde{y}(k) + \tilde{a}_1\,\tilde{y}(k-1) + \tilde{a}_2\,\tilde{y}(k-2) = b_0\,\tilde{u}(k)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 := \dfrac{a_2}{\delta t^2} + \dfrac{a_1}{\delta t} \\[2ex] \tilde{a}_1 := \dfrac{-2a_2}{\delta t^2} - \dfrac{a_1}{\delta t} \\[2ex] \tilde{a}_2 := \dfrac{a_2}{\delta t^2} \end{cases}$$

da cui

$$\tilde{y}(k) = \alpha_1\,\tilde{y}(k-1) + \alpha_2\,\tilde{y}(k-2) + \beta_0\,\tilde{u}(k)$$

$$\alpha_1 := -\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0} \qquad \alpha_2 := -\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_0} \qquad \beta_0 := \frac{b_0}{\tilde{a}_0}\,.$$

TRASFORMATA ZETA

Sia $f(k)$ definita in $\mathbb{Z}_+$ $(k \geq 0)$

[N.B. Se f è definita in tutto $\mathbb{Z}$ solo i valori per $k \geq 0$ contano!]

Definiamo la seguente funzione $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$F(z) := \mathcal{Z}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad (*)$$

La funzione F è definita per i valori di $z \in \mathbb{C}$ in cui $(*)$ converge.
N.B. $f(k)$ può essere reale o complessa.

$F(z)$ si dice trasformata zeta di $f(k)$: essa è una funzione complessa della variabile complessa z.

ESEMPIO

$$f(k) = \delta(k) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

ESEMPIO

$$f(k) = p^k$$ (discretizzazione di $e^{\lambda t}$)
($p \in \mathbb{R}$ o $p \in \mathbb{C}$)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{p}{z}} = \frac{z}{z-p} \qquad \text{per } |z| > |p|$$

Se $p=1 \Rightarrow f(k)=\delta_{-1}(k)=1(k):=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$

$$F(z)=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

In generale, dove converge la trasformata $\mathcal{Z}$.?

TEOREMA

Data $f(k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$ sia

$$\rho_0 := \limsup_{k\to\infty} |f(k)|^{1/k} \qquad (*)$$

Allora 1) $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$ converge assolutamente

$\forall\ z$ t.c. $|z|>\rho_0$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$ NON converge $\forall\ z : |z|<\rho_0$

OSSERVAZIONE

La $(*)$ significa quanto segue

sia $g(k)=\sup_{l>k} |f(l)|^{1/l}$

$$\Rightarrow \rho_0 = \lim_{k\to\infty} g(k)$$

Si noti che $g(k)$ è <u>monotona non crescente</u> e quindi il $\lim_{k\to\infty} g(k)$ esiste <u>sempre</u> e può essere finito o pari a $+\infty$.

<u>N.B.</u> Se $\lim_{k\to\infty} |f(k)|^{1/k}$ esiste $\Rightarrow$

$$\rho_0 = \lim_{k\to\infty} |f(k)|^{1/k}$$

Infatti se il $\lim_{k\to\infty}(\cdot)$ esiste allora è uguale a $\limsup_{k\to\infty}(\cdot)$.

Inoltre, se $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{f(k+1)}{f(k)}\right|$ esiste

allora ρ_0 è anche dato da tale limite.

<u>Per casa</u>: Costruire un esempio dove bisogna usare la $(*)$ perché i limiti non esistono.

ESEMPI

1. Abbiamo già visto che $f(k) = p^k$ ha trasformata $F(z) = \dfrac{z}{z-p}$ che converge per $|z| > |p|$.

<u>verifica</u>: $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{f(k+1)}{f(k)}\right| = |p|$

$$\lim_{k\to\infty} |f(k)|^{1/k} = |p|$$

2. Se $f(k) = 2^{(k^2)}$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^{((k+1)^2)}}{2^{(k^2)}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k^2+2k+1}}{2^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} 2^{2k+1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ La trasf. Z non converge per nessun z!

DEF

ρ_0 è detto <u>raggio di convergenza</u>

TEOREMA

La trasf. $F(z)$ è una funzione **analitica** (olomorfa) in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_0\}$.

PROPRIETÀ

1. SIMMETRIA

Sia $f(k)$ successione a valori in $\mathbb{C}$. Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$.

Si consideri $f^*(k)$

Allora

$$\mathcal{Z}[f^*(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f^*(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[f(k) (z^*)^{-k} \right]^*$$

$$= \left[F(z^*) \right]^*$$

In particolare, se f è reale

$$F(z) = \left[F(z^*)\right]^* \Rightarrow F(z^*) = \left[F(z)\right]^*.$$

2. LINEARITÀ

Date $f(k)$ e $g(k)$, siano $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, $G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$.

Siano ρ_f e ρ_g i rispettivi raggi di convergenza

Allora $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{Z}\left[\alpha f(k) + \beta g(k)\right] = \alpha F(z) + \beta G(z) \;; \quad \rho \leq \max\{\rho_f, \rho_g\}$$

ESEMPIO

$$f(k) = \sin(\theta k) = \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\theta}} - \frac{z}{z-e^{-j\theta}}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{z^2 - ze^{-j\theta} - z^2 + z e^{j\theta}}{z^2 - z(e^{j\theta}+e^{-j\theta})+1}\right]$$

$$= \frac{z\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)/2j}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

$$= \frac{z\sin\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

In modo analogo si trova

$$\mathcal{Z}\left[\cos(k\theta)\right] = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

3. TRASLAZIONE

3.A: ANTICIPO

Data $f(k)$, sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$ e sia

$g(k) := f(k+a) \qquad a > 0 \qquad$ (<u>ANTICIPO</u>)

Allora

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+a) z^{-k-a} z^{a}$$

$$= z^{a} \left[\sum_{h=a}^{\infty} f(h) z^{-h} \right]$$

$$= z^{a} \left[F(z) - f(0) - f(1) z^{-1} - \dots - f(a-1) z^{-a+1} \right]$$

$$= z^{a} F(z) - \underbrace{f(0) z^{a} - f(1) z^{a-1} - \dots - f(a-1) z}$$

informazione assente nella parte causale di g e quindi non presente in $G(z)$!

3.B: RITARDO

Dato $f(k)$, sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$.

Sia $\quad g(k) := f(k-r) \qquad r > 0$.

In questo caso le cose sono un po' diverse da prima. Infatti, chi è, per esempio, $g(0)$?

$g(0) = f(-r)$: non è presente in $F(z)$! Dunque $G(z)$ non dipende solo da $F(z)$:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-r) z^{-k+r} z^{-r}$$

$$= z^{-r} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k-r) z^{-k+r} \right]$$

$$= z^{-r} \left[\sum_{h=0}^{\infty} f(h) z^{-h} + \underbrace{f(-r) z^{+r} + f(-r+1) z^{r-1} + \dots + f(-1) z}_{\sum_{\ell=1}^{r} f(-\ell) z^{-r+\ell}} \right]$$

$$= z^{-r} F(z) + \underbrace{f(-r) + f(-r+1) z^{-1} + \dots + f(-1) z^{-r+1}}_{\text{inform. non presente in } F(z)!}$$

Se f è causale

$$\underline{\underline{G(z) = z^{-r} F(z)}}$$

4. TRASLAZIONE PERIODICA

Sia $f(k)$ causale $\quad (f(k)=0 \quad \forall k<0)$

Sia $F(z) := \mathcal{Z}[f]$

Sia $$g(k) := \sum_{j=0}^{\infty} f(k-jN)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-jN} F(z)$$

$$= F(z) \sum_{j=0}^{\infty} z^{-jN}$$

$$= F(z) \frac{1}{1-z^{-N}}$$

$$= \frac{z^N}{z^N-1} F(z)$$

ESEMPIO

$$f(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari (zero incluso)} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

1° METODO:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} = \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1}$$

2° METODO:

$$f(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j2) \Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2-1} \mathcal{Z}[\delta(k)] = \frac{z^2}{z^2-1}$$

5. RISCALAMENTO DI $\mathbb{C}$:

Data $f(k)$ sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$. Sia $p \neq 0$, $p \in \mathbb{C}$.

Allora
$$\mathcal{Z}\left[p^k f(k)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, p^k z^{-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{p}\right)^{-k}$$
$$= F(z/p)$$

ESEMPIO

Consideriamo un'oscillazione smorzata o amplificata $g(k) = p^k \cos(k\theta)$.

So che
$$\mathcal{Z}\left[\cos(k\theta)\right] = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left[g(k)\right] = \left(\left(\frac{z}{p}\right)^2 - \frac{z}{p}\cos\theta\right) \Big/ \left(\frac{z}{p}\right)^2 - 2\frac{z}{p}\cos\theta + 1$$

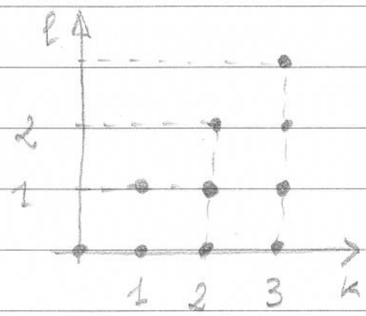
$$= \frac{z^2 - pz\cos\theta}{z^2 - 2zp\cos\theta + p^2}.$$

6. INTEGRAZIONE DISCRETA

Sia dato $f(k)$ e sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$.

Sia $g(k) := \sum_{\ell=0}^{k} f(\ell)$.

Allora $\mathcal{Z}[g(k)] = G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, z^{-k}$



$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} f(\ell)\, z^{-k}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} f(\ell)\, z^{-k}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell) \sum_{k=\ell}^{\infty} z^{-k}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell)\, z^{-\ell} \sum_{k=\ell}^{\infty} z^{\ell-k}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell)\, z^{-\ell} \sum_{h=0}^{\infty} z^{-h}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} f(z)\, z^{-\ell} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1}\, F(z)$$

PER CASA: Ritrovare questo risultato usando la regola della traslazione periodica.

ESEMPIO

$$g(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \text{(rampa discreta)}$$

È ovvio che $g(k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} f(\ell)$ con $f(k) = 1(k) = \delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$ (gradino discreto).

Sia $h(k) := \sum_{\ell=0}^{k} f(\ell)$. $\Rightarrow$ $g(k) = h(k-1)$ (h è causale!)

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{z}{z-1} F(z) \quad \Rightarrow \quad G(z) = z^{-1} H(z) = \frac{1}{z-1} F(z)$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

7. DERIVAZIONE DISCRETA

Ricordiamo che data $f \xrightarrow{\mathcal{Z}} F$

$$\mathcal{Z}\left[f(k-r)\right] = z^{-r} F(z) + \sum_{\ell=1}^{r} f(-\ell)\, z^{\ell-r}$$

Consideriamo ora l'operatore di derivata discreta

Δ che associa a $f(k)$ la

$$\Delta\left[f(k)\right] = f(k) - f(k-1)$$

Allora

$$\mathcal{Z}\left[\Delta\left[f(k)\right]\right] = F(z) - \left[z^{-1}F(z) + f(-1)\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}F(z) - f(-1)$$

In generale, la derivata n-esima è:

$$\Delta^n\left[f(k)\right] = \sum_{r=0}^{n} f(k-r)\binom{n}{r}(-1)^r$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left[\Delta^n\left[f(k)\right]\right] = \underbrace{\left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\overbrace{(-1)^r z^{-r}}^{=(-z^{-1})^r(1)^{n-r}}\right]} F(z) + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{h=1}^{r} f(-h)\, z^{h-r}$$

$$= \left(1 - z^{-1}\right)^n F(z) + \underbrace{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{h=1}^{r} f(-h)\, z^{h-r}}_{=0 \text{ se } f \text{ è causale}}$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)^n F(z) + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{h=1}^{r} f(-h)\, z^{h-r}$$

8. DERIVAZIONE in $\mathcal{Z}$

Sappiamo che $F(z)$ è analitica (nel dominio di convergenza $\{z : |z| > \rho_0\}$). Calcoliamo $\frac{dF}{dz}$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left[f(k) z^{-k}\right]$$

(posso portare dentro la derivata perché c'è convergenza assoluta)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)(-k) z^{-k-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k f(k) z^{-k}$$

$$= -z^{-1}\, \mathcal{Z}\left[k f(k)\right]$$

Come conseguenza

$$\mathcal{Z}\left[k f(k)\right] = -z \frac{dF}{dz}.$$

ESEMPIO

$$f(k) = k^2$$

$$\mathcal{Z}\left[f(k)\right] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\left[k\right]$$

$$= -z \frac{d}{dz}\left[-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\left[\delta_{-1}(k)\right]\right]$$

$$= -z \frac{d}{dz}\left[-z \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]\right]$$

$$= z \frac{d}{dz}\left[z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right]$$

$$= z \frac{d}{dz}\left[-\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

$$= -z \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

$$= -z \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{-z\left[z-1-2z\right]}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

ESEMPIO

Sia $f(k) = \binom{k}{2}$ (per def. $\binom{k}{2} = 0 \ \forall k < 2$)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2!} z^{-k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) z^{-k} = \frac{1}{2} \frac{z^2+z}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(z^2+z-z^2+z)}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^3}$$

In generale, se $f(k) := \binom{k}{\ell}$ (causale: per def. $\binom{k}{\ell} = 0$ se $k < \ell$)

$$\Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{(z-1)^{\ell+1}}.$$

DIM. (per induzione)

1. $\ell = 1$: $f(k) = \binom{k}{1} = k \Rightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ (già visto!) ✓

2. Supponiamo sia vero per $f_h(k) = \binom{k}{h} \ \forall h < \ell$ e dimostriamolo per $f(k) = \binom{k}{\ell}$.

$$f(k) = \binom{k}{\ell} = \frac{k!}{\ell!\,(k-\ell)!}$$

$$= \frac{k}{\ell} \frac{(k-1)!}{(\ell-1)!\,(k-\ell)!}$$

$$= \frac{k}{\ell} \binom{k-1}{\ell-1}$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{\ell} \mathcal{Z}\left[k\, g(k-1) \right] \qquad g(k) = \binom{k}{\ell-1} \Rightarrow G(z) = \frac{z}{(z-1)^{\ell}}$$

$$= \frac{1}{\ell} (-z) \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\left[g(k-1) \right]$$

$$= \frac{1}{\ell} (-z) \frac{d}{dz} z^{-1} G(z)$$

$$= \frac{1}{\ell} (-z) \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-1)^{\ell}}$$

$$= \frac{1}{\ell} (-z) \frac{-\ell (z-1)^{\ell-1}}{(z-1)^{2\ell}}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^{\ell+1}}$$

Sia ora $\ell > 0$ e $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia

$$f(k) := \binom{k}{\ell} p^{k-\ell} \qquad (f \text{ è causale, anzi } f(k) = 0 \ \forall k < \ell)$$

$$F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] = p^{-\ell} \mathcal{Z}\left[\binom{k}{\ell} p^k\right] = p^{-\ell} \mathcal{Z}\left[\binom{k}{\ell} p^k\right]$$

$$= p^{-\ell} \frac{z/p}{\left(\frac{z}{p} - 1\right)^{\ell+1}} = p^{-\ell-1} \frac{z}{\left(\frac{z-p}{p}\right)^{\ell+1}}$$

$$= \frac{z}{(z-p)^{\ell+1}}$$

9. T.V.I.

Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ con $\rho_0 \neq +\infty$. Allora

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

10. T.V.F.

Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$. <u>Se</u> $\lim_{k \to \infty} f(k)$ <u>esiste finito</u>

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1^+} \frac{z-1}{z} F(z)$$

dove il $\lim_{z \to 1^+}$ è fatto lungo $\mathbb{R}$ (si ha $\rho_0 \leq 1$).

ESEMPI

1. $$f(k) = \cos(k\theta) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 0$$ NO!!

(il limite $\nexists$)!

2. $$f(k) = k2^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$= -z\left[\frac{z-2-z}{(z-2)^2}\right] = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 0$$ NO!!

(il lim non è finito!)

3. $$f(k) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(2k) \Longrightarrow F(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{4z^2 - 2z\cos(2)}{4z^2 - 4z\cos(2) + 1}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 2$$ OK!!

11. CONVOLUZIONE

Siano $f(k)$, $g(k)$ causali di trasf $\mathcal{Z}$, $F(z)$ e $G(z)$ risp.

$$h(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(l)\,g(k-l) = \sum_{l=0}^{k} f(l)\,g(k-l)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \mathcal{Z}\left[h(k)\right] = F(z)\,G(z)$$

ANTITRASFORMATA $\mathcal{Z}$

Osserviamo che se consideriamo la trasformata $\mathcal{Z}$ come mappa definita sulle funzioni causali allora questa mappa è iniettiva.

Infatti, consideriamo

$$f_1(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)$$
$$=$$
$$f_2(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)$$

Allora

$$\delta_0(k) := f_1(k) - f_2(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) - F(z) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(k)\, z^{-k} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta_0(0) = \lim_{z \to \infty} \Delta(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_0(k)\, z^{-k} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv z\Delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_0(k)\, z^{-k+1}$$

$$(h = k-1) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta_0(h+1)\, z^{-h}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_0(1) = \lim_{z \to \infty} z\Delta(z) = 0$$

Possiamo iterare questo ragionamento e otteniamo

$$\delta_0(k) = 0 \qquad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad f_1(k) = f_2(k) \quad \forall k \geq 0.$$

D'altro canto, si può dimostrare che ogni funzione analitica in un intorno di ∞ (ossia nella regione al di fuori di una circonferenza di raggio ρ_0) ammette uno sviluppo in serie di Taylor attorno a ∞.

In conclusione, la trasformata $\mathcal{Z}$ come mappa delle sequenze <u>causali</u> alle funzioni analitiche in $\{z : |z| > \rho_0\}$ (per qualche ρ_0), è <u>biiettiva</u> e quindi <u>invertibile</u>. Possiamo quindi calcolare l'antitrasformata di una $F(z)$ data. Anche se non sarà esplicitamente specificato l'espressione per l'antitrasformata sarà considerata valida solo per $k \geq 0$ (per $k < 0$, $f(k) \equiv 0$).

Il primo metodo per calcolare l'antitrasformata è iterativo:

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$\hat{F}_1(z) = F(z) - f(0)$$

$$F_1(z) = z\hat{F}_1(z)$$

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} F_1(z)$$

$$\hat{F}_{i+1}(z) = F_i - f(i) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$F_{i+1}(z) = z\,\hat{F}_i(z) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$f(i+1) = \lim_{z \to \infty} F_{i+1}(z) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

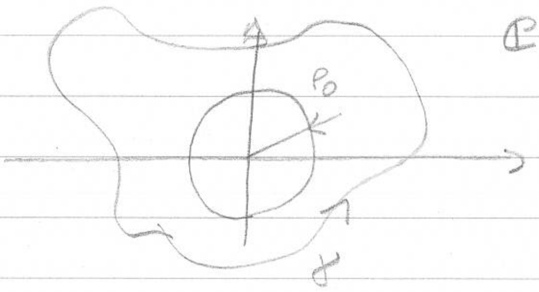
Il secondo metodo è per integrazione (residui)

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$f(k) = \left[\oint_\gamma F(z)\, z^{k-1}\right] \frac{1}{2\pi j} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dove γ è una curva chiusa orientata in senso

<u>antiorario</u> che circonda la circonferenza di raggio ρ_0



per es. γ può essere una circonf. di raggio $\rho > \rho_0$.

In tal caso $z = \rho e^{j\theta}$.

Questi due metodi non sono molto agevoli. C'è però un metodo molto semplice per <u>funzioni razionali</u>.

Sia

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad r = M - m \geq 0$$

una f. razionale propria.

Sia

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{N(z)}{zD(z)} = \frac{N(z)}{z^{l_0} \prod_{i=1}^{\prime} (z-p_i)^{l_i}}$$

dove $F_1(z)$ è <u>strettamente propria</u>.

A. CASO SEMPLICE

$\ell_0 = 1\,,\ \ell_i = 1\ \forall\, i = 1, \dots n'$

$$\Rightarrow\ F_1(z) = \sum_{i=1}^{n'} \frac{A_i}{z - p_i} + \frac{A_0}{z} \qquad \begin{cases} A_0 = \lim\limits_{z \to 0} z F_1(z) \\ A_i = \lim\limits_{z \to p_i} (z - p_i) F_1(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ F(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n'} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

$$\Rightarrow\ f(k) = A_0\, \delta(k) + \sum_{i=1}^{n'} A_i\, p_i^k$$

B. CASO COMPLICATO (GENERALE)

$$F_1(z) = \sum_{j=0}^{\ell_0 - 1} \frac{A_{0j}}{z^{j+1}} + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{\ell_i - 1} \frac{A_{ij}}{(z - p_i)^{j+1}}$$

$$\Rightarrow\ F(z) = \sum_{j=0}^{\ell_0 - 1} \frac{A_{0j}}{z^j} + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{\ell_i - 1} A_{ij} \frac{z}{(z - p_i)^{j+1}}$$

$$\Rightarrow\ f(k) = \sum_{j=0}^{\ell_0 - 1} A_{0j}\, \delta(k - j) + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{\ell_i - 1} \binom{k}{j} p_i^{k-j} A_{ij}$$

Come si calcolano gli A_{ij} ?

$$A_{i,l_i-1} = \lim_{z \to p_i} (z-p_i)^{l_i} F_1(z)$$

$$A_{i,l_i-2} = \lim_{z \to p_i} (z-p_i)^{l_i-1} \left[F_1(z) - \frac{A_{i,l_i-1}}{(z-p_i)^{l_i}} \right]$$

$$\vdots$$

$$A_{i,0} = \lim_{z \to p_i} (z-p_i) \left[F_1 - \frac{A_{i,l_i-1}}{(z-p_i)^{l_i}} - \dots - \frac{A_{i,l_1}}{(z-p_i)^{2}} \right]$$

Similmente

$$A_{0,l_0} = \lim_{z \to 0} z^{l_0} F_1(z)$$

$$A_{0,l_0-1} = \lim_{z \to 0} z^{l_0-1} \left[F_1(z) - A_{0,l_0} z^{l_0} \right]$$

$$\vdots$$

OSSERVAZIONI

1. Si noti che se $F(z)$ è una funzione razionale a coefficienti reali allora $f(k)$ <u>deve</u> essere una successione reale. Infatti, se $p_i \notin \mathbb{R}$, è presente anche $\bar{p}_i$ con la stessa molteplicità

e i relativi coefficienti sono tra di loro complessi coniugati. Dunque i relativi termini si accoppiano come

$$S = A \binom{k}{\ell} p^{k-\ell} + \bar{A} \binom{k}{\ell} \bar{p}^{k-\ell}$$

Sia $A = \alpha + j\beta$ e $p = \rho e^{j\theta}$, allora

$$S = \binom{k}{\ell} \rho^{k-\ell} \Big[(\alpha + j\beta) \big[\cos((k-\ell)\theta) + j \sin((k-\ell)\theta)\big]$$

$$+ (\alpha - j\beta) \big[\cos((k-\ell)\theta) - j \sin((k-\ell)\theta)\big] \Big]$$

$$= \binom{k}{\ell} \rho^{k-\ell} \Big[2\alpha \cos((k-\ell)\theta) - 2\beta \sin((k-\ell)\theta) \Big].$$

2. Sia

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \text{con } r = \deg D(z) - \deg N(z) \geq 0$$

allora $f(0), f(1), \ldots, f(r-1)$ sono nulli e $f(r) \neq 0$, come si vede dal calcolo iterativo $f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$, $f(1) = \lim_{z \to \infty} z\left[F(z) - f(0)\right]$, etc.

ESEMPIO

$$F(z) = \frac{1}{z-2}$$

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} \qquad \begin{cases} A = \lim_{z \to 0} z F_1(z) = -1/2 \\ B = \lim_{z \to 2} (z-2) F_1(z) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(z) = A + B\,\frac{z}{z-2}$$

$$f(k) = A\,\delta(k) + B\,2^k = -\frac{1}{2}\delta(k) + 2^{k-1}$$

<u>Altro metodo</u>

Sia $F_0(z) := zF(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow f_0(k) = 2^k$ CAUSALE

$$g(k) := f_0(k-1) \Rightarrow G(z) = z^{-1}F_0(z) = F(z) \Rightarrow f(k) = g(k) = f_0(k-1) = 2^{k-1}$$

$\cancel{f(k)=2^{k-1}}$

DOV'È L'ERRORE ?

<u>Calcolo corretto:</u>

$$f_0(k) = \begin{cases} 2^k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow f(k) = \begin{cases} 2^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & \text{per } k < 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$F(z) = \frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26}{z(z-1)(z+2)^2 \underbrace{(z^2 - 2z + 2)}_{(z-p)(z-\bar{p})}} \qquad p = 1+j = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$$

Per semplificare i calcoli considero

$$F_1(z) = z F(z) \quad \text{e calcolo } \mathcal{Z}^{-1}[F_1]$$

$$F_0(z) = \frac{F_1(z)}{z} = F(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+2} + \frac{A_{22}}{(z+2)^2} + \frac{A_3}{z-p} + \frac{\bar{A}_3}{z-\bar{p}}$$

$$A_0 = \lim_{z\to 0} zF(z) = \frac{26}{(-1)(4)(2)} = -\frac{13}{4}$$

$$A_1 = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z) = \frac{3+8+7-26+26}{1\cdot 9\cdot 1} = 2$$

$$A_3 = \lim_{z\to p} (z-p)F(z) = \frac{3p^4 + 8p^3 + 7p^2 - 26p + 26}{p(p-1)(p+2)^2(p-\bar{p})}$$

$$= \frac{3\cdot 4(-1) + 16\sqrt{2}\, e^{j\frac{3}{4}\pi} + 14 e^{j\pi/2} - 26 - 26j + 26}{(1+j)(j)(9-1+6j)(2j)}$$

$$= \left[-12 + 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + j \sin \tfrac{3}{4}\pi\right) + 14j - 26j\right] / \left[-2(1+j)(8+6j)\right]$$

$$= \left[-12 + 16\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - 12j\right] / \left[8 - 16j\right] = \frac{-28+4j}{-4-28j} = -j$$

$$A_{22} = \lim_{z \to -2} (z+2)^2 F(z)$$

$$= \left[3(-2)^4 + 8(-2)^3 + 7(-2)^2 - 26(-2) + 26\right] / \left[(-2)(-3)(4+4+2)\right]$$

$$= \frac{48 - 64 + 28 + 52 + 26}{60} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$$

$$A_{21} = \lim_{z \to -2} (z+2)\left[F(z) - \frac{3/2}{(z+2)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to -2} \cancel{(z+2)}\left[\frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26 - \frac{3}{2}(z^2 - z)(z^2 - 2z + 2)}{z(z-1)(z+2)^{\cancel{2}}(z^2 - 2z + 2)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -2}\left[\frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26 - \frac{3}{2}z^4 + 3z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z^3 - 3z^2 + 3z}{z(z-1)(z+2)(z^2 - 2z + 2)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{\frac{3}{2}z^4 + \frac{25}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26}{z(z-1)(z+2)(z^2 - 2z + 2)} = \lim_{z \to -2} \frac{\frac{3}{2}z^3 + \frac{19}{2}z^2 - 18z + 13}{z(z-1)(z^2 - 2z + 2)} =$$

$$\left(\begin{array}{l|l}
\frac{3}{2}z^4 + \frac{25}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26 & z + 2 \\
\hline
-\frac{3}{2}z^4 - 3z^3 & \frac{3}{2}z^3 + \frac{19}{2}z^2 - 18z + 13 \\
\hline
\frac{19}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26 & \\
-\frac{19}{2}z^3 - 19z^2 & \\
\hline
-18z^2 - 23z + 26 & \\
+18z^2 + 36z & \\
\hline
13z + 26 & \\
-13z - 26 & \\
// \; // &
\end{array}\right)$$

$$= \frac{-12 + 38 + 36 + 13}{6 \cdot 10}$$

$$= \frac{75}{60} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$F_1(z) = A_0 + A_1 \frac{z}{z-1} + A_{21}\frac{z}{z+2} + A_{22}\frac{z}{(z+2)^2} + A_3\frac{z}{z-p} + \bar{A}_3\frac{z}{z-\bar{p}}$$

$$\Rightarrow \quad f_1(k) = \begin{cases} A_0\delta(k) + A_1\,\delta_{-1}(k) + A_{21}(-2)^k + A_{22}\,k\,(-2)^{k-1} + A_3 p^k + \bar{A}_3\bar{p}^k, & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$A_3 p^k + \bar{A}_3\bar{p}^k = j\,\rho^k\left(\cos(\theta k) + j\sin(\theta k)\right) - j\,\rho^k\left(\cos(\theta k) - j\sin(\theta k)\right)$$

$$= \rho^k(-2)\sin(k\theta) = -2(\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$$

$$f_1(k) = -\frac{13}{4}\delta(k) + 2\delta_{-1}(k) + \frac{5}{4}(-2)^k + \frac{3}{2}(-2)^{k-1}k - 2(\sqrt{2})^k\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right), \quad k \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(k) = \begin{cases} -\frac{13}{4}\delta(k-1) + 2\,\delta_{-1}(k-1) + \frac{5}{4}(-2)^{k-1} + \frac{3}{2}(-2)^{k-2}(k-1) - (2\sqrt{2})^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}(k-1)\right), & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$