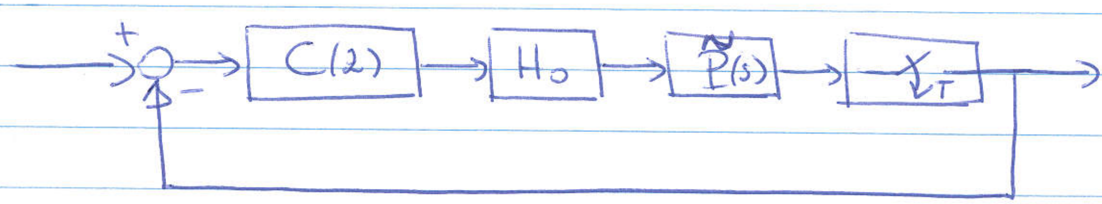
SINTESI DIRETTA

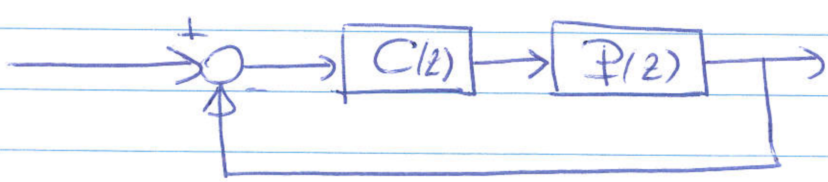
Dato lo schema



possiamo considerare

$$P(z) := \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\mathcal{S}_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tilde{P}(s)}{s}\right]\right]\right]$$

e progettare direttamente $C(z)$ nello schema



(*)

Potrei provare a decidere in base alle specifiche la $W(z)$

che desidero avere a catena chiusa e poi risolvere per $C(z)$:

$$\underbrace{W(z)}_{\text{scelta}} = \frac{C(z)\,P(z)}{1 + \underbrace{C(z)}_{\text{incognita}}\,\underbrace{P(z)}_{\text{calcolata}}}$$

Si ha

$$(1+CP)W = CP$$

$$\Rightarrow W + CPW = CP$$

$$\Rightarrow CP(W-1) = -W$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{P}\,\frac{W}{1-W}}$$

SEMBRA banale ma ci sono invece dei problemi delicatis simi.

1.
$$C = \frac{1}{P}\,\frac{W}{1-W} \quad \text{è Propria?}$$

Se non lo è C non è realizzabile.

PROPOSIZIONE

Sia $P = \frac{N_P}{D_P}$ razionale propria

e sia $W = \frac{N_W}{D_W}$ razionale propria

Allora

$$C = \frac{1}{P}\,\frac{W}{1-W}$$

è razionale ed è propria se e solo se

A. $\mathrm{reldeg}[W] \geq \mathrm{reldeg}[P]$

B. $W(\infty) \neq 1$.

Dimostrazione

Vediamo come prima cosa alcuni fatti preliminari

(1) $P(\infty)$ è finito

(2) C è propria $\Leftrightarrow$ $C(\infty)$ è finito $\Leftrightarrow$ $\mathrm{reldeg}[C] \geq 0$

(3) $W(\infty) \neq 1 \Leftrightarrow \deg[D_W - N_W] = \deg[D_W]$

Ora dimostriamo che

C propria $\Rightarrow \begin{cases} A. \\ B. \end{cases}$

Dimostriamo innanzitutto

C propria $\Rightarrow$ B.

Se per assurdo

$$W(\infty) = 1$$

$$\Rightarrow \quad C(\infty) = \underbrace{\frac{1}{P(\infty)}}_{\neq 0} \; \underbrace{\frac{W(\infty)}{1 - W(\infty)}}_{= 0} = \infty$$

$\Rightarrow$ C non propria.

Dunque ho dimostrato

C propria $\Rightarrow$ **B**.

Dimostriamo ora

C propria $\Rightarrow$ A.

Siccome so che "C propria $\Rightarrow$ **B**",

posso dimostrare

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ propria} \\ \quad + \\ B. \end{array}\right\} \Longrightarrow A.$$

Si ha

$$\mathrm{reldeg}[C] = -\mathrm{reldeg}[P] + \underbrace{\mathrm{reldeg}\left[\frac{N_W}{D_W - N_W}\right]}_{= \mathrm{reldeg}[W]}$$

infatti, usando B. che è equivalente a (3), si ha: $\deg[D_W] = \deg[D_W - N_W]$

Dunque

$$-\mathrm{reldeg}[P] + \mathrm{reldeg}[W] = \mathrm{reldeg}[C] \underbrace{> 0}_{\text{perché per ipotesi } C \text{ è propria}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\mathrm{reldeg}[W] > \mathrm{reldeg}[P]}$$

Viceversa: dimostriamo che

$$\left.\begin{array}{l} A. \\ B. \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ propria}$$

$$\text{reldeg}[C] = -\text{reldeg}[P] + \underbrace{\text{reldeg}\left[\frac{N_W}{D_W - N_W}\right]}_{\substack{= \text{reldeg}[W] \\ \text{per B.}}}$$

$$= \text{reldeg}[W] - \text{reldeg}[P] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per A.}}}{\geq} 0$$

CVD.

COROLLARIO

Siano $P = \frac{N_P}{D_P}$ e $W = \frac{N_W}{D_W}$ razionali proprie

e valga: $\left\{\begin{array}{ll} A. & \text{reldeg}[W] \geq \text{reldeg}[P] \\ B. & W(\infty) \neq 1 \end{array}\right.$

Allora, detto $C := \frac{1}{P} \frac{W}{1-W} = \frac{N_C}{D_C}$, si ha

$$\deg[D_C D_P] = \deg[D_C D_P + N_C N_P] \qquad (**)$$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo non valga (**). Allora, siccome C e P sono proprie, si ha

$$\begin{cases} \deg[D_c D_p] > \deg[D_c D_p + N_c N_p] \\ \deg[D_c D_p] = \deg[N_c N_p] \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\text{reldeg}[W] = \text{reldeg}\left[\frac{N_c N_p}{D_c D_p + N_c N_p}\right]$$

$$= \text{reldeg}\left[\frac{D_c D_p}{D_c D_p + N_c N_p}\right] < 0$$

ossia W è impropria: assurdo!

CVD.

Abbiamo trovato delle condizioni che ci permettono di affrontare il punto 1. ossia di garantire che il controllore abbia f. di t. propria e quindi che sia fisicamente realizzabile. In altre parole se voglio che il controllore esista devo scegliere W in modo che

A. $reldeg[W] \geq reldeg[P]$

B. $W(\infty) \neq -1$

Si noti che A. è molto intuitiva: non posso scegliere W con meno ritardo di quello introdotto da P.

2. C'è un altro problema importantissimo:

$$C = \frac{1}{P} \frac{W}{1-W}$$

"cancella" P e questo causa la perdita di stabilità interna se le cancellazioni sono "instabili": disastro!

C'è modo di evitare questo disastro con una scelta oculata di W?

Sì: essenzialmente si tratta di scegliere W in modo che $\frac{W}{1-W}$ cancelli zeri e poli "instabili" di $\frac{1}{P}$ "sulla carta" e quindi con cancellazioni "esatte". In tal modo evito le cancellazioni "instabili" fra C e P.

TEOREMA

Siano $P = \frac{N_P}{D_P}$ (con N_P e D_P coprimi) e $W = \frac{N_W}{D_W}$ (con N_W e D_W coprimi) funzioni razionali proprie t.c.

A. $\text{rel deg}[W] \geq \text{rel deg}[P]$

B. $W(\infty) \neq 1$

Allora $C := \frac{1}{P} \frac{W}{1-W}$ garantisce stabilità interna dell'interconnessione (*) se e solo se:

C. W è BIBO-STABILE

D. Tutti gli zeri "instabili" di P sono anche zeri di W (con almeno la stessa molteplicità).

E. Tutti i poli "instabili" di P sono anche zeri di $D_W - N_W$ (con almeno la stessa molteplicità).

DIMOSTRAZIONE

Sappiamo che (*) è un'interconnessione internamente stabile se e solo se

(i) $N_pN_c + D_pD_c$ non ha zeri "instabili"

(ii) $\deg[N_pN_c + D_pD_c] = \deg[D_pD_c]$

(ii) vale sempre per il corollario precedente (infatti il teorema ha A. e B. come ipotesi).

Dunque basta dimostrare che

$$(i) \iff \begin{cases} C. \\ D. \\ E. \end{cases}$$

A questo scopo, siano:

N_o massimo fattore comune fra N_I e N_W

D_o massimo fattore comune fra D_p e $\Delta := D_W - N_W$

Allora esistono i polinomi $N_{P_1}, N_{W_1}, D_{P_1}$ e D_{Δ_1} t.c.

$$N_P = N_0 N_{P_1}$$

$$N_W = N_0 N_{W_1}$$

$$D_P = D_0 D_{P_1}$$

$$\Delta \; (= D_W - N_W) = D_0 D_{\Delta_1}$$

Inoltre,

C. $\Longleftrightarrow$ D_W ha solo zeri "stabili"

D. $\Longleftrightarrow$ N_{P_1} ha solo zeri "stabili"

E. $\Longleftrightarrow$ D_{P_1} ha solo zeri "stabili".

Infine, si ha

$$C = \frac{D_P}{N_P} \, \frac{N_W}{D_W - N_W} = \frac{D_{P_1}}{N_{P_1}} \, \frac{N_{W_1}}{D_{\Delta_1}}$$

e quindi

$(i) \Leftrightarrow \boldsymbol{S} := N_p D_{p_1} N_{W_1} + D_p N_{p_1} D_{\Delta_1}$ ha solo zeri "stabili"

Ora osserviamo che

$$\boldsymbol{S} = N_0 N_{p_1} D_{p_1} N_{W_1} + D_0 D_{p_1} N_{p_1} D_{\Delta 1}$$

$$= D_{p_1} N_{p_1} [N_W + \underbrace{\Delta}_{D_W - N_W}]$$

$$= D_{p_1} N_{p_1} D_W$$

che ha solo zeri "stabili" $\Leftrightarrow \begin{cases} C. \\ D. \\ E. \end{cases}$

CVD

OSSERVAZIONI

1) Tutti i ragionamenti fatti fino a qui valgono esattamente allo stesso modo a tempo continuo.
2) A tempo discreto la sintesi diretta si usa molto mentre a tempo continuo si usa meno perché produce controllori abbastanza complessi che potrebbe essere difficile realizzare in modo analogico.
3) A tempo discreto il grado relativo della f. di trasf. ha significato di ritardo introdotto dal sistema e quindi risulta molto intuitivo che se C è proprio il grado relativo di W deve essere maggiore o uguale a quello di P.

4) Le cancellazioni "instabili" fra $\frac{1}{P}$ e $\frac{\bar{W}}{1-\bar{W}}$ avvengono "nella carta" e quindi sono esatte (non minano la stabilità interna).

5) Se voglio C strettamente proprio basta imporre reldeg$[W] >$ reldeg$[P]$. In tal caso, $W(\infty) = 0$ e quindi la condizione $\bar{W}(\infty) \neq 1$ è automaticamente soddisfatta. In particolare se voglio reldeg$[C] = 1$ devo imporre reldeg$[\bar{W}]$ = reldeg$[P] + 1$. In tal caso ho la garanzia che C introduca esattamente 1 passo di ritardo.

6) Se voglio progettare C in modo da avere anche la presenza di dinamiche

del "modello interno" posso considerare

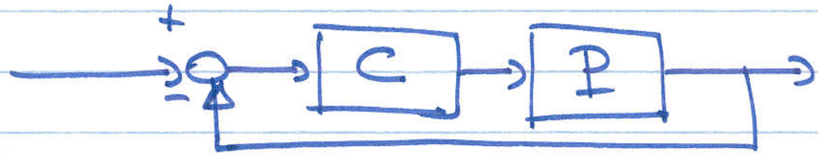
$$C(z) = C_1(z)\,\underbrace{C_2(z)}_{\text{mod. interno}}$$

Incorporo in $C_2(z)$ le dinamiche del "modello interno" e poi considero $P_1(z) := C_2(z)\,P(z)$ e progetto $C_1(z)$ con la sintesi diretta facendo riferimento al sistema da controllare di f. di trasf. $P_1(z)$.

ESEMPIO

Vediamo che questo metodo non distrugge la stabilità interna con un esempio.

Consideriamo



$$P_0(z) = \frac{1}{z-2}$$ è la P nominale che ho calcolato

$$P_{vera} = \frac{1+\delta_1}{z-(2+\delta_2)}$$ <u>NON</u> la conosco!

Scelgo W del primo ordine:

$$W = \frac{\alpha}{z-\frac{1}{2}}$$

e fisso α in modo che

$$\left[D_W - N_W\right]\Big|_{z=2} = 0$$

ossia

$$\left. z - \frac{1}{2} - \alpha \right|_{z=2} = 2 - \frac{1}{2} - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow C = \underbrace{(z-2)}_{\frac{1}{P}} \underbrace{\frac{\frac{3/2}{z-1/2}}{1 - \frac{3/2}{z-1/2}}}_{\frac{W}{1-W}}$$

$$= (z-2) \frac{3/2}{z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{z-2}{z-2}}} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{2}}$$

cancellazione
"sulla carta":
esatta!

Adesso facciamo la "prova del nove"

e usiamo la C calcolata sulla P_{vera}:

$$W_{vera} = \frac{C P_{vera}}{1 + C P_{vera}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1+\delta_1}{z-(2+\delta_2)}}{1 + \frac{3(1+\delta_1)}{2z-(4+2\delta_2)}}$$

$$= \frac{3(1+\delta_1)}{2z - 4 - 2\delta_2 + 3 + 3\delta_1}$$

$$= \frac{3(1+\delta_1)}{2\left(z - \frac{1}{2} - \delta_2 + \frac{3}{2}\delta_1\right)}$$

e quindi se $|\delta_1|$ e $|\delta_2|$ non son troppo grandi W_{vera} è BIBO-stabile!