Come scelgo W ?

Naturalmente, W deve soddisfare le condizioni A. B. C. D. ed E., ma c'è qualche prescrizione?

Se P è stabile e a fase minima posso preoccuparmi solo di A. B. e C.

In tal caso potrei scegliere una $W(z)$ del primo ordine (con in più un eventuale ritardo per tenere conto del grado relativo di $P(z)$):

$$W(z) = \frac{1}{z^{\ell}} \; \frac{1-p}{z-p}$$

Dove $|p|<1$ (condizione C.) ℓ è scelto in modo da avere $\text{reldeg}[W] \geq \text{reldeg}[P]$ (condizione A.) e la B. è automatica ($W(\infty) = 0 \neq 1$).

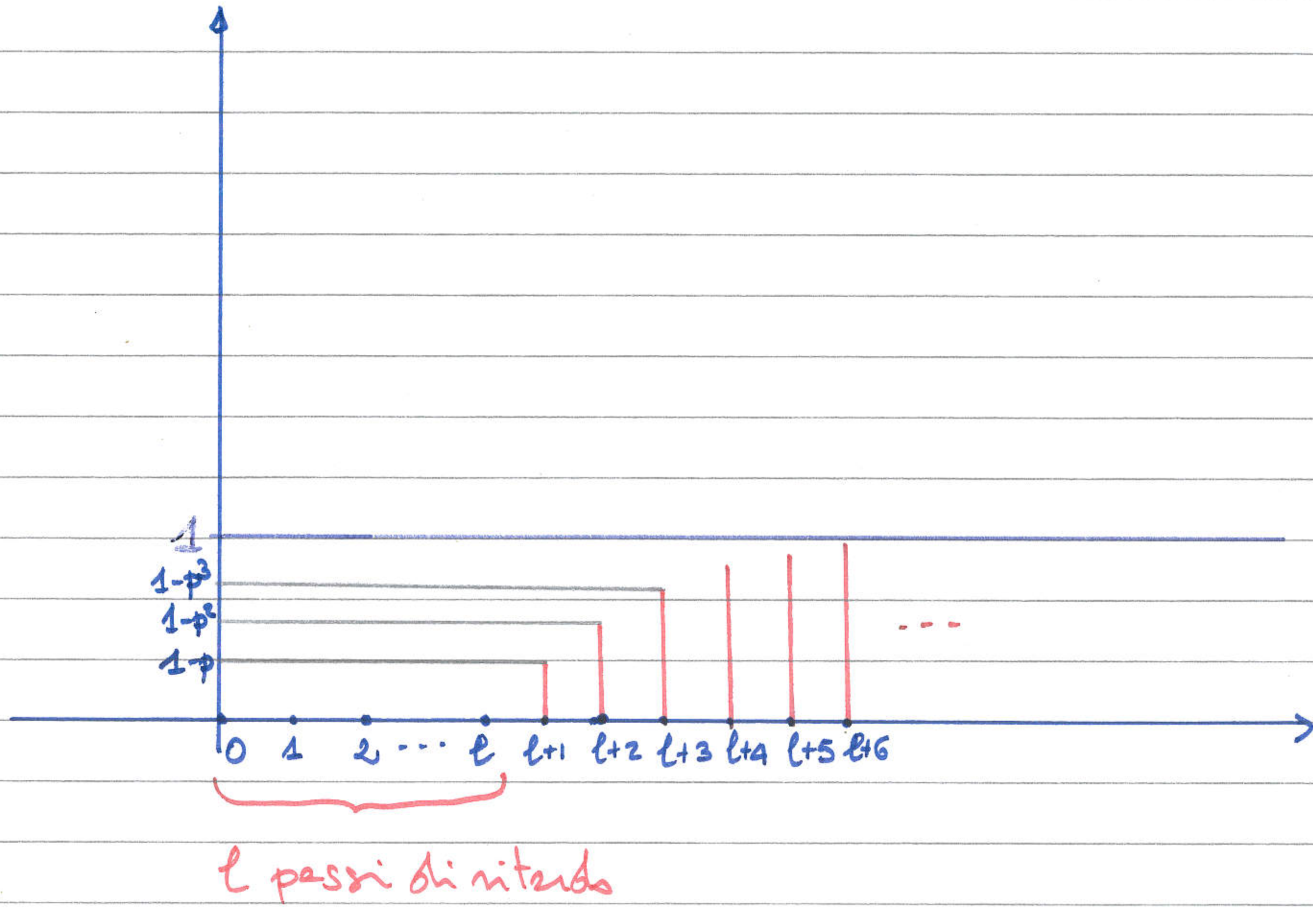
Inoltre, $W(1) = 1$, così ho garantito di inseguire i gradini con errore asintotico nullo. Adesso manca da fissare la dinamica, ossia p: lo faccio usando il tempo di salita t_r che di solito è sempre assegnato. Se h è il numero di passi per raggiungere il tempo di salita, si ha:

$$t_r = hT$$

e poiché h è intero

$$h = \left\lfloor \frac{t_r}{T} \right\rfloor \quad \text{(parte intera di } t_r/T\text{)}$$

Se, come spesso capita, $T = t_r/10$ allora $h = 10$. Adesso considero la risposta al gradino:



Approssimo il tempo di salita con il

n° di passi necessari per passare da 0 a 0.9:

$$1 - p^h = 0.9 \Rightarrow p = (1-0.9)^{1/h}$$

ossia

$$p = 0.1^{1/\lfloor t_r/T \rfloor}$$

per esempio, se $t_r = 10T$

$$\Rightarrow \underline{p \simeq 0.8}$$

Questo metodo si chiama metodo di Dahlin

Alternativamente possiamo scegliere una $\bar{W}(z)$ del secondo ordine il che può andare bene se $P(z)$ ha <u>un</u> polo o <u>uno</u> zero "instabile".

Se ho specifiche del tipo

$$\begin{cases} t_s \leq t_s^* \\ t_r \simeq t_r^* \\ m_p \leq m_p^* \end{cases}$$

le posso tradurre (in modo approssimato) nella posizione dei poli di un sistema del 2° ordine a tempo continuo:

$$t_s \leq t_s^* \Rightarrow \qquad \sigma \geq \sigma^* := \frac{4.6}{t_s^*}$$

$$t_r \simeq t_r^* \Rightarrow \qquad \omega_n \simeq \omega_n^* := \frac{1.8}{t_r^*}$$

$$m_p \leq m_p^* \Rightarrow \qquad \xi \geq \xi^* := \frac{|\ln(m_p^*)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(m_p^*)}}$$

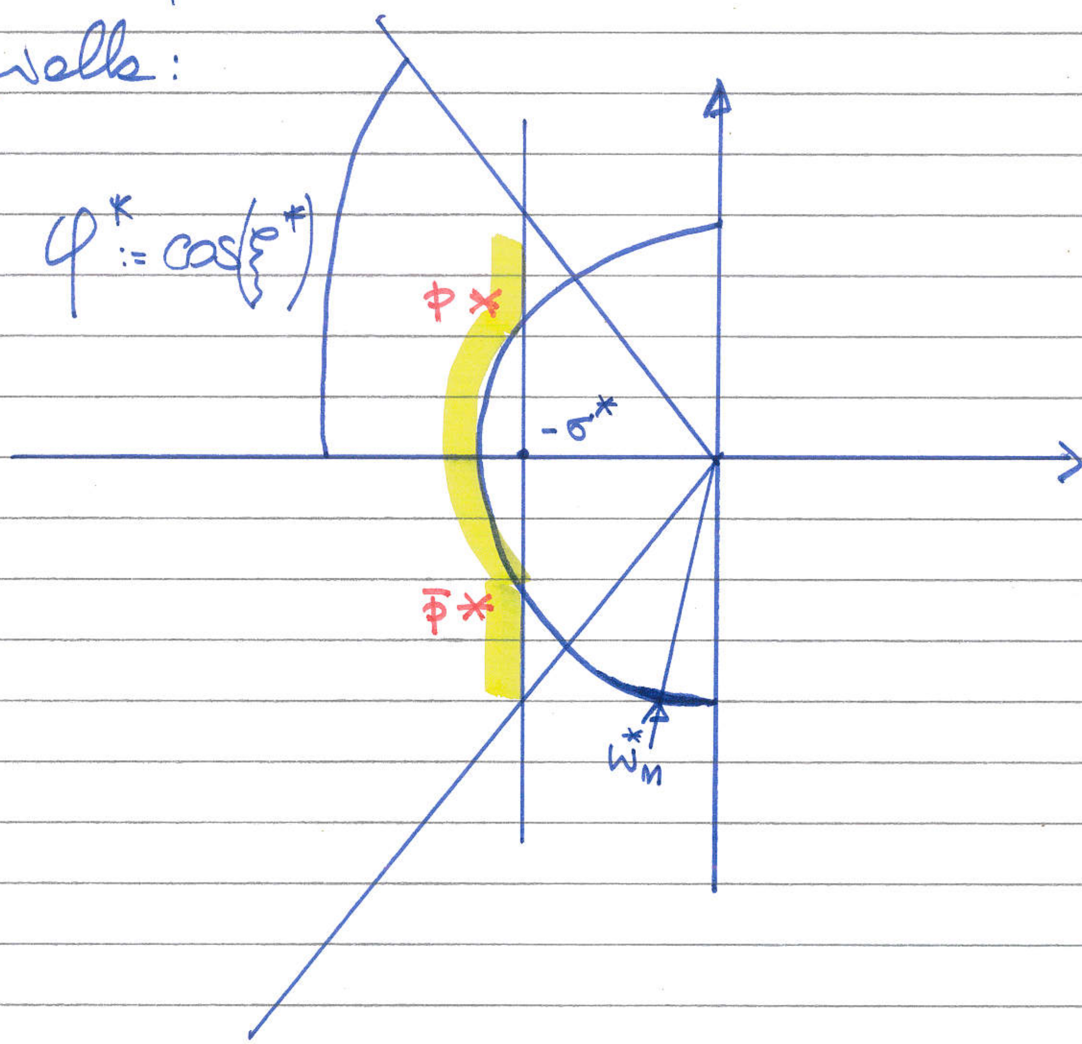
dove, detti p e $\bar{p}$ i poli (complessi coniugati) del sistema del 2° ordine, si ha:

$$\sigma := -\mathrm{Re}[p]$$

$$\omega_n := |p|$$

$$\xi := \sigma/\omega_n$$

dunque i poli staranno ~~nelle~~ nelle vicinanze della zona gialla:



Per esempio posso scegliere la coppia di poli p e $\bar{p}$ segnati in rosso.

A questo punto traduco nel discreto ponendo

$$p_d := e^{pT}$$

e scelgo

$$W(z) = K \frac{(z - z_1)}{(z - p_d)(z - \bar{p}_d)}$$

dove $K = (1-\bar{p}_d)(1-p_d) / 1 - z_1 = \frac{|1-p_d|^2}{1-z_1}$
in modo da avere errore nullo nell'inseguimento di gradini.

Infine, z_1 lo fisso in modo da soddisfare i requisiti per la stabilità interna, cioè: Se $P(z)$ ha uno zero "instabile" z_0 scelgo $z_1 = z_0$. Se $P(z)$ ha un polo "instabile" p_0, scelgo z_1

in modo che $D_W - N_W$ abbia ϕ_0 fra i suoi zeri, cioè:

$$(\phi_0 - \phi_d)(\phi_0 - \bar{\phi}_d) - K(\phi_0 - z_1) = 0$$

ossia

$$|\phi_0 - \phi_d|^2 = \frac{|1 - \phi_d|^2}{1 - z_1}(\phi_0 - z_1)$$

da cui

$$|\phi_0 - \phi_d|^2 - z_1 |\phi_0 - \phi_d|^2 = |1 - \phi_d|^2 \phi_0 - |1 - \phi_d|^2 z_1$$

ossia

$$\left(|1 - \phi_d|^2 - |\phi_0 - \phi_d|^2\right) z_1 = |1 - \phi_d|^2 \phi_0 - |\phi_0 - \phi_d|^2$$

e infine:

$$z_1 = \frac{|1 - \phi_d|^2 \phi_0 - |\phi_0 - \phi_d|^2}{|1 - \phi_d|^2 - |\phi_0 - \phi_d|^2} .$$

Naturalmente questa scelta va bene se mi basta una $W(z)$ di grado relativo pari a 1. Se ho bisogno di grado relativo maggiore, aggiungo poli veloci:

$$W(z) = \frac{K\,(z-z_1)}{(z-p_d)(z-\bar{p}_d)\,(z-p_v)^{\ell}}$$

con $|p_v| \ll |p_d|$ e ℓ viene scelto a seconda del grado relativo desiderato. Spesso, si sceglie $p_v = 0$ (ritardo puro).