Sintesi diretta della dinamica di W

L'utilizzo della sintesi diretta risulta abbastanza agevole se P non ha poli "instabili"; infatti, in tal caso si impongono separatamente la dinamica del sistema a catena chiusa (ossia i poli della funzione di trasferimento $W = \frac{N_W}{D_W}$ e, cioe', il polinomio D_W) e il numeratore N_W di W che deve contenere tutti gli zeri "instabili" di P.

Se invece P ha poli "instabili" devo imporre che tali poli siano zeri di

$$\Delta := D_W - N_W.$$

Contemporaneamente, pero', devo imporre **anche** la dinamica a catena chiusa (ossia i poli di W) e alcuni degli zeri di N_W sono fissati dal fatto che N_W deve contenere tutti gli zeri "instabili" di P. Imporre tutte queste condizioni potrebbe risultare complicato ed e' anzi perfino poco chiaro se sia sempre possibile farlo quando P ha molti poli e zeri instabili. In tal caso, potrei rinunciare a scegliere l'intera *funzione di trasferimento W e accontentarmi di fissare la dinamica a catena chiusa, ossia di scegliere i* **soli poli** *di W cioe' gli zeri del polinomio*

$$D_P D_C + N_P N_C$$

dove $P = \frac{N_P}{D_P}$ e' una rappresentazione coprima della funzione di trasferimento P del sistema da controllare e $C = \frac{N_C}{D_C}$ e' una rappresentazione coprima della funzione di trasferimento del controllore.

A questo scopo, fissati N_P e D_P,

- *considero le due incognite* **polinomiali**

  $$X = D_C \qquad Y = N_C;$$

- *scelgo il polinomio D_W che fissa la dinamica a catena chiusa;*

- *risolvo l'equazione*

  $$D_P X + N_P Y = D_W \tag{1}$$

  nelle incognite polinomiali X e Y.

La (1) e' un'equazione **diofantea** *in quanto le incognite sono definite in un anello (polinomi).*

Domanda 1. *Quando (1) ha soluzione?*

Rispsosta (classica: Euclide). (1) ha soluzione se e solo se il massimo comun divisore di D_P ed N_P divide anche D_W. Nel nostro caso D_P ed N_P sono per ipotesi coprimi e quindi (1) ha certamente soluzione.

La risposta sembra incoraggiante ma non e' sufficiente per i nostri scopi; infatti, vogliamo un controllore $C = \frac{N_C}{D_C} = \frac{Y}{X}$ con funzione di trasferimento **propria** *e quindi per noi la soluzione e' interessante solo se $\deg(X) \geq \deg(Y)$.*

Domanda 2. *Sotto che condizioni (1) ha soluzioni (X, Y) tali che $\deg(X) \geq \deg(Y)$?*

Teorema. *Sia $P = \frac{N_P}{D_P}$ una rappresentazione coprima di una funzione di trasferimento P* **strettamente propria**

(cioe' $\deg(D_P) > \deg(N_P)$) e sia $n := \deg(D_P)$. Se

$$\deg(D_W) = 2n - 1$$

allora (1) ammette soluzioni (X, Y) tali che $\deg(X) \geq \deg(Y)$ (ossia esiste un controllore proprio $C = \frac{N_C}{D_C} = \frac{Y}{X}$ tale che la dinamica a catena chiusa e' data dagli zeri di D_W).

Osservazione. Se $P = \frac{N_P}{D_P}$ e' una funzione di trasferimento propria ma non strettamente e $n := \deg(D_P)$ allora (1) ammette soluzioni (X, Y) tali che $\deg(X) \geq \deg(Y)$ per quasi tutte le scelte di D_W di grado $2n-1$ pero' esistono delle scelte "patologiche" di D_W in corrispondenza alle quali $\deg(X) < \deg(Y)$ (ossia il controllore corrispondente a tali scelte sarebbe improprio).

Esempio Sia $P = \frac{1}{z-3}$. Allora $n := \deg(D_P) = \deg(z-3) = 1$. Quindi

$$\deg(D_W) = 2n - 1 = 1.$$

Sia $D_W = z - \alpha$ (con $|\alpha| < 1$). Allora

$$C = N_C/D_C = \frac{y}{x}$$

con x e y polinomi di grado zero (ossia costanti). Per calcolare x e y risolvo

$$x(z-3)+y=z+\alpha$$

da cui

$$x=1, \quad y=\alpha+3, \qquad C=y/x=\alpha+3.$$

Consideriamo ora il caso di $P=\frac{z+1/2}{z-3}$ (funzione razionale non strettamente propria). Si ha ancora $n:=\deg(D_P)=\deg(z-3)=1$. Quindi

$$\deg(D_W)=2n-1=1.$$

Sia ancora $D_W=z-\alpha$ (con $|\alpha|<1$). Allora

$$C=N_C/D_C=\frac{y}{x}$$

con x e y polinomi di grado zero (ossia costanti). Per calcolare x e y risolvo

$$x(z-3)+y(z+1/2)=z+\alpha$$

da cui

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -3x+y/2=\alpha \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x+6x = 1-2\alpha \\ -3x + y/2 = \alpha \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{1-2\alpha}{7} \\ y = \frac{6+2\alpha}{7} \end{cases}$$

e quindi

$$C = \frac{6+2\alpha}{1-2\alpha}.$$

Si vede quindi che la soluzione (controllore proprio) esiste per tutte le scelte di α ad eccezione del valore "patologico" $\alpha = 1/2$.

Soluzione di (1)

La (1) e' un'equazione lineare nei coefficienti dei polinomi X e Y. Per risolverla posso assumere (senza perdita di generalita') che D_P sia monico e porre

$$D_P = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$N_P = \beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0$$

dove nel polinomio N_P abbiamo forzatamente inserito tutti i coefficienti fino a β_n che pero' e' ovviamente nullo se P e' strettamente proprio. Inoltre pongo

$$D_C = X = x_{n-1} z^{n-1} + \ldots + x_1 z + x_0$$

$$N_C = Y = y_{n-1} z^{n-1} + \ldots + y_1 z + y_0$$

e

$$D_W = c_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots + c_1 z + c_0.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di grado $2n - 1$ nei due membri della

$$D_P X + N_P Y = D_W$$

ottengo

$$x_{n-1} + \beta_n y_{n-1} = c_{2n-1}$$

Analogamente, uguagliando i coefficienti dei termini di grado $2n-2$ nei due membri della

$$D_P X + N_P Y = D_W$$

ottengo

$$\alpha_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + \beta_{n-1}y_{n-1} + \beta_n y_{n-2} = c_{2n-2}.$$

Iterando il ragionamento e scrivendo la equazioni in forma matriciale ottengo:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & \beta_n & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & \beta_n & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-1} \\
0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & \beta_0 & \beta_1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0
\end{array}\right]}_{\text{matrice } M \text{ di dimensione } 2n \times 2n}
\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ \vdots \\ x_0 \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ y_{n-3} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_{2n-1} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix}$$

La matrice M e' invertibile e si puo' decomporre come $M = [M_1 \mid M_2]$ dove sia M_1 sia M_2 hanno n colonne e sono entambe matrici di Toeplitz (ossia ciascuna diagonale di M_1 ha tutti elementi uguali e lo stesso vale per M_2).

Invertendo M calcolo facilmente i coefficienti x_i e y_i e quindi il controllore $C = Y/X$.

Osservazioni.

1. Se penso all'approccio di stato e' intuitivo che una qualunque dinamica di ordine $2n-1$ sia realizzabile. Infatti, n e' la dimensione della dinamica del sistema retroazionato con retroazione lineare dalla stato la cui dinamica e' assegnabile a piacere e $n-1$ e' la dimensione della dinamica dell'osservatore di ordine ridotto (anch'essa assegnabile a piacere). Il principio di separazione permette, infine, di concludere.

2. Al solito, posso accoppiare questo metodo con il principio del modello interno ponendo

$$C(z) = C_1(z)C_2(z)$$

dove $C_1(z)$ contiene le dinamiche del modello interno e

$C_2(z)$ e' progettato con il metodo dell'equazione diofantea con riferimento al sistema di f. di t. $P_1(z) := C_1(z)P(z)$.

3. Anche se voglio garantire che $C(z)$ sia strettamente proprio posso scegliere

$$C(z) = C_1(z)C_2(z)$$

dove $C_1(z)$ e' strettamente proprio e $C_2(z)$ e' progettato con il metodo dell'equazione diofantea con riferimento al sistema di f. di t. $P_1(z) := C_1(z)P(z)$ (questo modo di procedere garantisce anche che $P_1(z)$ sia strettamente proprio e quindi l'esistenza di un controllore proprio per qualunque scelta di $D_W(z)$ di grado $2n-1$ dove n e' il grado di $P_1(z)$). Per esempio, potrei scegliere $C_1(z) = 1/(z-1)$ che mi garantisce anche inseguimento di gradini con errore asintotico nullo.