

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

Come già detto, noi consideriamo la classe dei sistemi LTI in cui il legame fra

ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$ è:

$$y(k) = \sum_{l=1}^m a_l y(k-l) + \sum_{l=0}^m b_l u(k-l)$$

Senza perdita di generalità posso assumere $m \geq m$

Supponiamo $u(k)$ causale (il controllo viene "ecceso" al tempo $k=0$) e analizziamo il comportamento in frequenza del sistema:

$$Y(z) = \sum_{l=1}^m a_l \left[\sum_{h=1}^l y(-h) z^{h-l} + z^{-l} Y(z) \right]$$

$$+ \sum_{l=0}^m b_l \left[z^{-l} U(z) + \underbrace{\sum_{h=0}^l u(-h) z^{h-l}}_{\text{per la causalità di } u(k)} \right]$$

per la causalità di $u(k)$

Raggruppando i termini, si ottiene

$$\underbrace{\left[1 - \sum_{l=1}^m a_l z^{-l} \right]}_{=: A(z)} Y(z) = \underbrace{\left[\sum_{l=0}^m b_l z^{-l} \right]}_{=: B(z)} U(z) + \underbrace{\sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^l a_l y(-h) z^{h-l}}_{=: C(z)}$$

$A(z)$: polinomio in z^{-1} di grado m , con $A(\infty) = 1$

$B(z)$: polinomio in z^{-1} di grado $m \leq m$

$C(z)$: polinomio in z^{-1} di grado $\leq m-1$

Quindi

$$Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)}}_{=: H(z)} U(z) + \underbrace{\frac{C(z)}{A(z)}}_{=: Y_e(z)}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^{-l}}{1 - \sum_{l=1}^m a_l z^{-l}} = \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^{m-l}}{z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con $D(z)$ monico e di grado m .

Inoltre,

$$Y_e(z) = \frac{N_e(z)}{D(z)} \quad (\text{f. razionale propria con } D(z) \text{ monico di grado } m \text{ e } N_e(z) \text{ di grado } \leq m \text{ e } N_e(0) = 0).$$

In conclusione,

$$y(k) = (h * u)(k) + y_e(k)$$

$$\text{dove } h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \quad \text{e} \quad y_e(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_e(z)]$$

Poiché $H(z)$ e $Y_e(z)$ hanno lo stesso denominatore,

$h(k)$ e $y_e(k)$ sono combinazioni lineari delle

stesse funzioni del tipo

$$f_{ij}(k) = \binom{k}{j} p_i^{k-j}$$

dove ϕ_i sono gli zeri di $D(z)$ e

$j_i = 0 \dots \mu_i - 1$ dove μ_i è la molteplicità di ϕ_i come zero di $D(z)$.

Si noti che in $H(z)$ potrebbero esserci cancellazioni pertanto non tutte le $f_{ij}(k)$ sono presenti in $h(k)$.

DEF

$f_{ij}(k)$ si dicono modi del sistema.

Si noti che:

A. Se $|\phi_i| < 1 \Rightarrow$ i relativi modi tendono a zero (asintoticamente stabili); in k th sono del tipo

$$\phi_i^{k-j} \binom{k}{j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

B. Se $|p_i| > 1 \Rightarrow$ i relativi modi divergono (instabili)

Imfatti:

$\left[p_i^{k-j} \binom{k}{j} \right]$ diverge (potrebbe non avere limite ma il \limsup è $+\infty$).

C. Se $|p_i| = 1 \Rightarrow$ il modo p_i^k è limitato (stabile) ma non converge (non asintoticamente stabile).

I modi relativi allo stesso polo ma di molteplicità superiore:

$$p_i^{k-j} \binom{k}{j} \quad \forall j \geq 1$$

divergono (instabili).

Si noti che il grado relativo r di $H(z)$

è il ritardo introdotto dal filtro ossia il

numero di campioni della risposta impulsiva.

(o della risposta indiciata o delle risposte forzate a qualunque segnale $u(k)$ con $u(0) \neq 0$) che precedono il primo campione non nullo. Ossia, se $u(0) \neq 0$ e $y(k)$ è la relativa risposta forzata,

$$y(k) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, r-1$$

$$y(r) \neq 0$$

FILTRI FIR

Se $H(z) = \frac{N(z)}{z^m} \quad \deg N(z) \leq m$

$$\Rightarrow H(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots + \frac{A_m}{z^m}$$

$$\Rightarrow h(k) = A_0 \delta(k) + A_1 \delta(k-1) + \dots + A_m \delta(k-m)$$

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR) non hanno analogo a tempo continuo.

ESEMPIO

$$y(k) = a y(k-1) + u(k) - a u(k-1)$$

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - az^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_f(k) = u(k)$$

Me

$$\begin{aligned} y(k) &= y_f(k) + y_e(k) \\ &= u(k) + y_e(k) \end{aligned}$$

$$Y_e(z) = a [z^{-1} Y_e(z) + y(-1)]$$

$$\Rightarrow [1 - az^{-1}] Y_e(z) = a y(-1)$$

$$\Rightarrow Y_e(z) = a y(-1) \frac{1}{1 - az^{-1}} = a y(-1) \frac{z}{z - a}$$

$$\Rightarrow y_e(k) = a y(-1) a^k = y(-1) a^{k+1}$$

$$\Rightarrow y(k) = u(k) + \underbrace{y(-1) a^{k+1}}$$

se $|a| > 1$ e $y(-1) \neq 0$, y_e esplosiva!

⇒ DISASTRO.

CONCLUSIONE: ATTENZIONE alle cancellazioni!

Sia

$$\Sigma: y(k) = \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i)$$

e sia $D(z) := z^m \left[1 - \sum_{i=1}^m a_i z^{-i} \right] = z^m - \sum_{i=1}^m a_i z^{m-i}$ (Pol. monico di $\text{deg} = m$)

DEF

A. Σ è stabile se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$\left\| \begin{bmatrix} y(-1) \\ \vdots \\ y(-m) \end{bmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow |y_e(k)| < \varepsilon \quad \forall k \geq 0$$

B. Σ è asintoticamente stabile (A.S.) se è stabile ed $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\left\| \begin{bmatrix} y(-1) \\ \vdots \\ y(-m) \end{bmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_e(k) = 0$$

TEOREMA

A. Sono equivalenti i segmenti p#i:

A1. Σ è stabile

A2. $\forall y(-1) \dots y(-m)$, $y_e(k)$ è limitata

A3. \exists modi di Σ sono tutti limitati

A4. \forall zero p di $D(z)$ si ha $|p| < 1$ e se $|p| = 1$ allora p è zero semplice di $D(z)$.

B. Sono equivalenti i seguenti fatti

B1. Σ è A.S.

B2. $\forall y(-1) \dots y(-m), \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$

B3. Tutti i modi di Σ convergono a zero

B4. \forall zero p di $D(z)$ si ha $|p| < 1$.

BIBO STABILITÀ

DEF

Σ è BIBO-STABILE se $\forall u(k)$ limitato

la corrispondente uscita forzata è limitata.

TEOREMA

Σ è BIBO-STABILE se e solo se tutti i poli di $H(z)$ hanno modulo minore di 1

$$\text{N.B. } \left\{ \text{poli } H(z) \right\} \subset \left\{ \text{zeri di } D(z) \right\}$$

↑

Si ha:

$$\text{A.S.} \Rightarrow \text{BIBO-ST.}$$

L'implicazione opposta (in generale falsa) vale se e solo se posso escludere cancellazioni "instabili".

CRITERI DI STABILITÀ

Ricordiamo che a tempo continuo la BIBO-STABILITÀ di una funzione di trasferimento $H(s)$ razionale si può verificare analizzando i suoi poli.

Se

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con N e D polinomi coprimi e $\deg D > \deg N$,

allora $H(s)$ è BIBO-stabile $\Leftrightarrow D(s)$ è polinomio di Hurwitz ossia tutti i suoi zeri hanno $\text{Re} < 0$. Il criterio di Routh permette di verificare se un polinomio $D(s)$ è di Hurwitz senza calcolare gli zeri. A tempo discreto, ci sono risultati analoghi. Abbiamo già visto che

la funzione di trasferimento razionale
e proprie

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con N e D coprimi, è BIBO-stabile se
e solo se $D(z)$ è polinomio di Schur
ossia tutti i suoi zeri hanno modulo
minore di 1 o, equivalentemente, si trovano
all'interno della circonferenza unitaria
centrata nell'origine del piano complesso

E. Come si può verificare se un
polinomio $D(z)$ assegnato è di Schur?

Ci sono due modi:

1. CRITERIO DI JURY

Sia dato $D(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m$

Costruisco la tabella di Jury:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_m \\
 a_m & a_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\
 \hline
 b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{m-1} & 0 \\
 b_{m-1} & b_{m-2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0 \\
 \hline
 c_0 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{m-2} & 0 & 0 \\
 c_{m-2} & c_{m-3} & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & & \cdot & & & & & \\
 & & \cdot & & & & & \\
 & & \cdot & & & & & \\
 \hline
 r_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0
 \end{array}$$

dove
$$b_i = \frac{1}{a_0} \det \begin{bmatrix} a_0 & a_{m-1} \\ a_m & a_i \end{bmatrix} \quad i=0 \dots m-1$$

$$c_i = \frac{1}{b_0} \det \begin{bmatrix} b_0 & b_{m-1} \\ b_{m-1} & b_i \end{bmatrix} \quad i=0 \dots m-2$$

è così via.

Si ha:

PROPOSIZIONE

$D(z)$ è di Schur se e solo se:

1. Posso completare la tabella
2. a_0, b_0, \dots, r_0 hanno lo stesso segno.

ESEMPIO

$$D(z) = z^3 + z^2 + z + \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$a_0 = 1 > 0$
$\frac{1}{2}$	1	1	1	$b_0 = \frac{3}{4} > 0$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$c_0 = \frac{5}{12} > 0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$d_0 = \frac{7}{20} > 0$
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\Rightarrow D(z)$ è
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	0	0	di Schur.

$\frac{7}{20}$

2. TRASFORMAZIONE BILINEARE o DI MÖBIUS

Sappiamo che la mappa

$$z = e^{ST}$$

mappe il semipiano sinistro aperto nel cerchio

unitario aperto. Questa mappa è non razionale

e quindi complessa da analizzare. Possiamo

tuttavia considerare un' approssimazione

razionale con le stesse proprietà:

$$M^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s \mapsto \frac{1+s}{1-s} = z = M^{-1}(s)$$

La cui inversa è

$$M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto s = \frac{z-1}{z+1} = M(z)$$

LEMMA

$|z| < 1$ se e solo se $\operatorname{Re}[M(z)] < 0$

DIM

Sia $z = a + jb$

$$\Rightarrow M(z) = \frac{z-1+jb}{z+1+jb}$$

$$\operatorname{Re}[M(z)] = \operatorname{Re} \left[\frac{(z-1+jb)(z+1-jb)}{(z+1+jb)(z+1-jb)} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{Re} [z^2 - (1-jb)^2]}{(a+1)^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - 1 + b^2}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{|z| - 1}{(a+1)^2 + b^2}$$

□

Questo lemma è utile anche perché se ho

$F(z)$ razionale propria, posso definire

$$F_1(s) = F(z) \Big|_{z=M^{-1}(s)} = F\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

Chiaramente $F_1(s)$ è ancora funzione razionale e si ha

$$F(z) = F_1(s) \Big|_{s=M(z)}$$

Dunque,

1. $z_0 \neq -1$ è polo di $F(z)$ se e solo se

$$M(z_0) = s_0 \text{ è polo di } F_1(s)$$

2. $z_0 = 1$ è polo di $F(z)$ se e solo se

$$F_1(s) \text{ è impropria } (\infty = M(z_0) \text{ e polo di } F_1(s)).$$

Pertanto,

PROPOSIZIONE

La f. di trasferimento discreta $F(z)$ è BIBO-ST.

se e solo se lo è la f. di transf. continua

$$F_1(s) = F(z) \Big|_{z=M^{-1}(s)}$$

1. Si noti che la BIBO-stabilità di $F_2(s)$ implica che $F_2(s)$ sia propria (una f. impropria non è BIBO-STABILE).
2. La BIBO-ST. di F_2 va intesa nel senso del sistema continuo ad essa associato. La BIBO-ST. di F va intesa nel senso del sistema discreto di cui F è f. di trasferimento.

In conclusione, dopo aver definito $F_1(s)$ posso verificare con il criterio di Routh se $F_1(s)$ è BIBO-STABILE.