Transitorio

I parametri di "qualità" più importanti che qualificano il transitorio di un sistema sono legati alla risposta al gradino (risposta indiciale). Essi sono:

t_r: tempo di salita. È il tempo che serve alla risposta indiciale per passare dal 10% al 90% del valore di regime

A volte viene approssimato con il tempo necessario per arrivare al 90% del valore di regime.

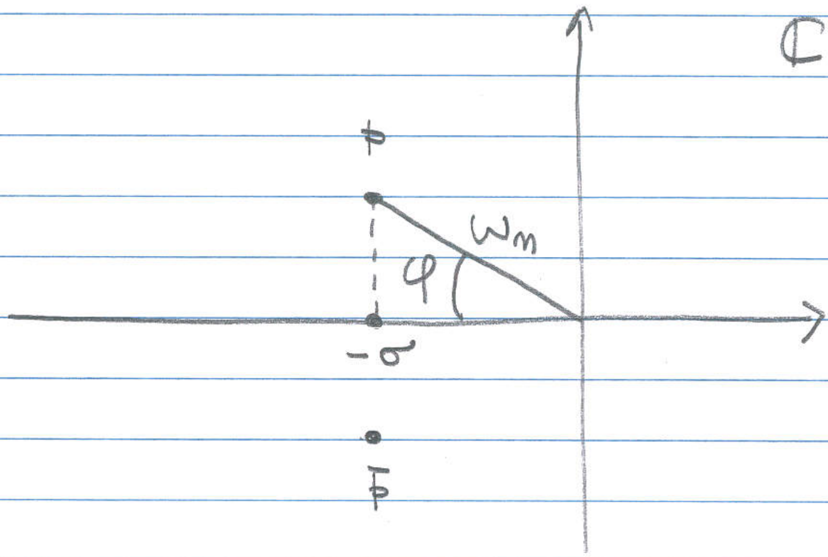
Di solito si impone

$$\begin{cases} t_r \leq t_r^* & \text{e "non troppo minore", cioè:} \\ t_r \simeq t_r^* \end{cases}$$

t_s : <u>tempo di assestamento</u>. È il tempo dopo il quale la risposta indiciale rimane confinata entro l'1% del valore di regime (esiste anche il tempo di assestamento al 5% invece che all'1%).

m_p : <u>massima sovraelongazione</u>. È la differenza tra il massimo della risposta indiciale e il valore di regime espressa in termini percentuali del valore di regime. Di solito si impone $m_p \leq m_p^*$ (dove m_p^* è la massima sovraelongazione tollerata).

Per un sistema a tempo continuo stabile consideriamo i poli dominanti rappresentati in figura nel piano $\mathbb{C}$



Detti $\begin{cases} \omega_n := |p| = |\bar{p}| \quad e \\ -\sigma := \mathbb{R}e[p] = \mathbb{R}e[\bar{p}] \end{cases}$

e definito $\xi := \dfrac{\sigma}{\omega_n} = \cos(\varphi)$

si ha che, in prima approssimazione,

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$t_s \simeq \frac{4.6}{\sigma} \quad (1\%) \quad e \quad t_s \simeq \frac{3}{\sigma} \quad (5\%)$$

$$\xi \simeq \frac{|\ln(m_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(m_p)}}$$

Dunque

$$\left.\begin{array}{l} t_r \leq t_r^* \\ t_r \simeq t_r^* \end{array}\right\} \text{ si può approssimare con } \left\{\begin{array}{l} \omega_n \geq \omega_n^* := \dfrac{1.8}{t_r^*} \\ \omega_n \simeq \omega_n^* \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} t_s \leq t_s^* \\ t_s \simeq t_s^* \end{array}\right\} \text{ si può approssimare con } \left\{\begin{array}{l} \sigma \geq \sigma^* := \dfrac{4.6}{t_s^*} \\ \sigma \simeq \sigma^* \end{array}\right.$$

$$m_p \leq m_p^* \text{ si può approssimare con } \xi \geq \xi^* := \frac{|\ln(m_p^*)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(m_p^*)}}$$

ARCHITETTURA DEL SISTEMA DI CONTROLLO

L'architettura deve garantire

A. STABILITÀ

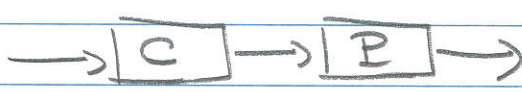
B. ROBUSTEZZA

C. PICCOLO CARICO SULL'ATTUATORE

D. BANDA PASSANTE E FILTRATA ADEGUATE

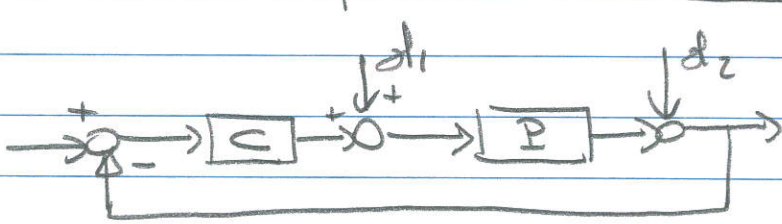
E. ATTENUAZIONE DEL DISTURBO

1. La CATENA APERTA



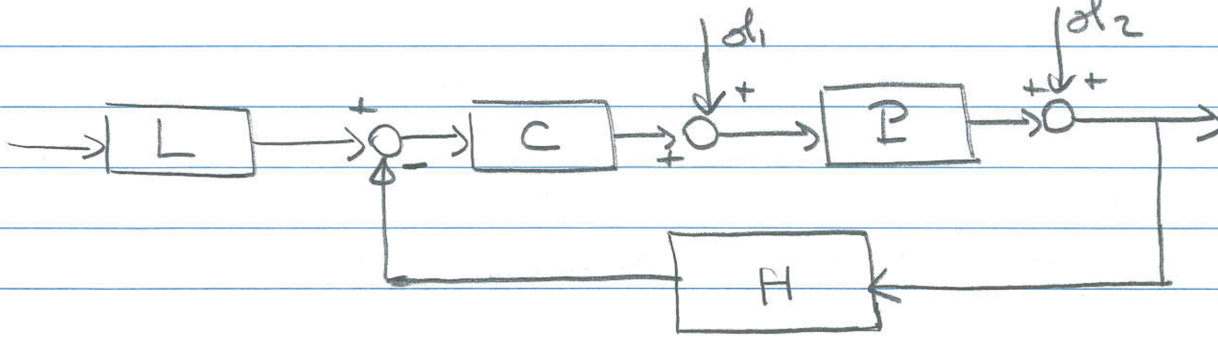
funziona male

2. Lo schema tipico è a CATENA CHIUSA:



va molto meglio.

3. Si possono anche adottare architetture più articolate. Per es.



C : introduce i poli del modello interno

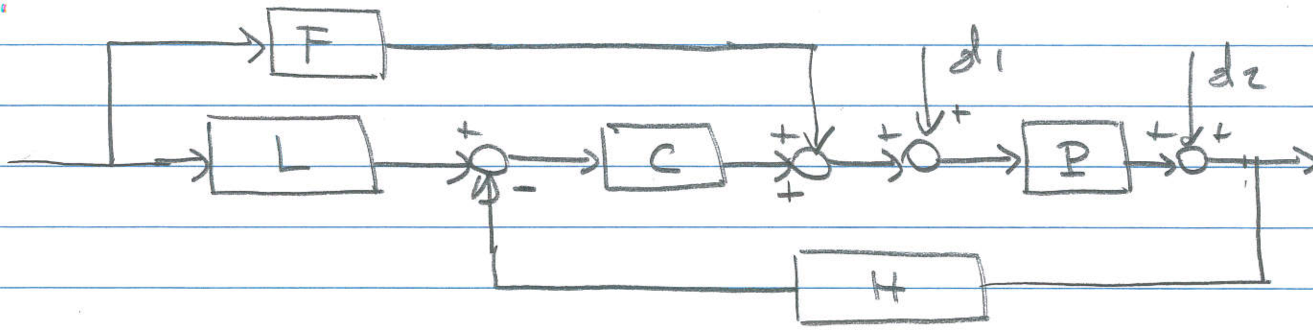
H : serve per stabilizzare la c.c.

L : prefiltro per garantire che il carico sull'attuatore

$$A := \frac{LC}{1+CPH}$$

sia piccolo.

4. Infine, si può aggiungere un termine di feed-forward che rende più pronto il sistema:


F
d1
d2
L
C
P
H

PROGETTO DI T

Le cose principali che devo considerare sono:

1. $T \geq T_c$ (tempo di calcolo: tutto compreso)
2. Variabilità dei segnali in gioco:
   tra KT e $(K+1)T$ il sistema funziona a catena aperta, quindi devo preoccuparmi che T sia sufficientemente piccolo rispetto alla variabilità dei segnali in gioco.
3. Tempo di salita. Dal momento in cui il sistema "si accende" al momento in cui il controllore inizia ad agire passa un "tempo morto" $T_d < T$.
   T_d provoca un ritardo che deve essere piccolo rispetto a t_r.

di solito si impone

$$T \le \frac{t_r}{10}$$

cioè nel caso peggiore ($T_d \simeq T$)

il tempo morto non porti via più

del 10% di t_r.

Molto spesso si fissa

$$T = t_r/10$$

Vediamo per esempio a cose corrisponde

questa scelta per sistemi del 1° o del

2° ordine:

<u>Es</u> $W(s) = \frac{k}{1+s\tau}$

La risposta indiciale è

$$y(t) = K\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

Il tempo di salita è

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$$

dove

$$\begin{cases} 1 - e^{t_{90\%}/\tau} = 0.1 \\ 1 - e^{t_{10\%}/\tau} = 0.9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{t_{90\%}/\tau} = 0.9 \\ e^{t_{10\%}/\tau} = 0.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{90\%} = \tau \ln(0.9) \\ t_{10\%} = \tau \ln(0.1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_r = \tau \left[\ln(0.9) - \ln(0.1) \right]$$

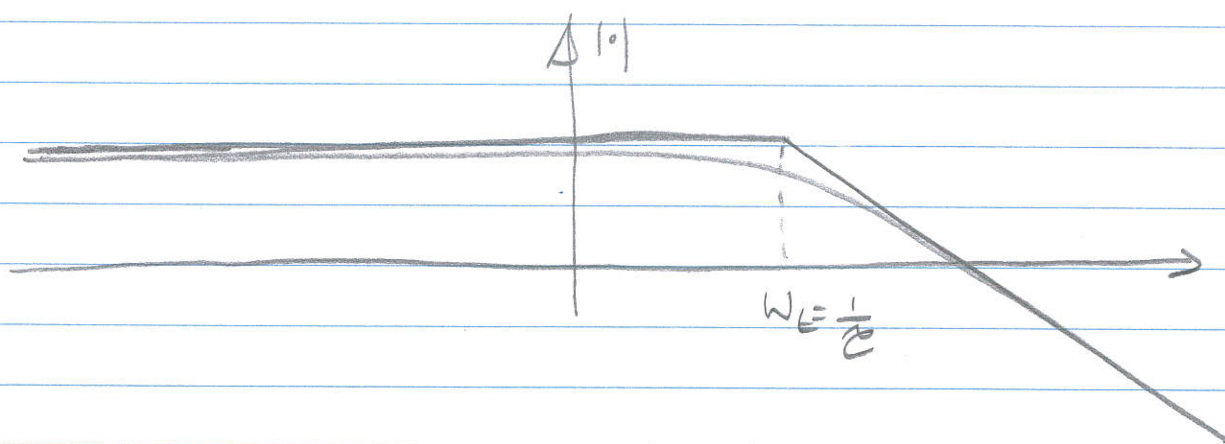
$$= \tau \ln(9) \simeq 2.2 \ \tau$$

Dunque se $T = \frac{t_r}{10}$ allora

$$T = 0.22\,\tau$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \Omega = \frac{2\pi}{0.22}\,\frac{1}{\tau} = 28\,\omega_t$$

dove $\omega_t := \frac{1}{\tau}$ è la pulsazione di spezzamento del sistema



e coincide con la banda passante.

Es 2 Consideriamo ora un sistema del 2° ordine con poli (dominanti)

complessi coniugati p e $\bar{p}$ e sia
$\omega_n = |p| = |\bar{p}|$ la cosiddetta pulsazione
naturale (che è la pulsazione di spezzamento).
In prima approssimazione si ha

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$$

e, quindi, ponendo

$$T = \frac{t_r}{10} = \frac{0.18}{\omega_n}$$

otteniamo

$$\Omega := \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.18}\,\omega_n \simeq 35\,\omega_n = 35\,\omega_t$$

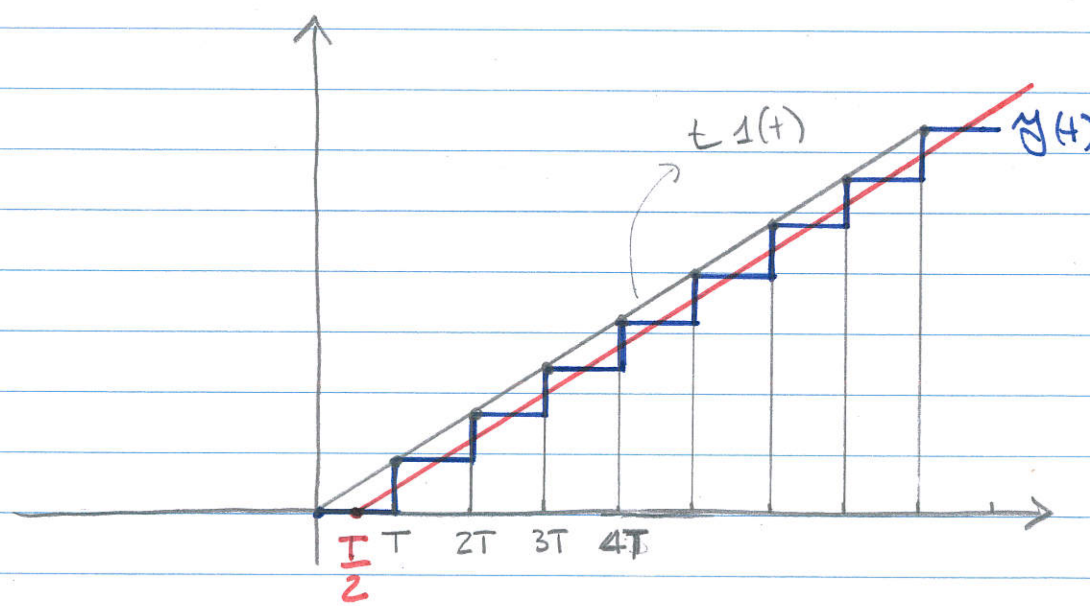
In conclusione, possiamo dire che
$T = t_r/10$ corrisponde a prendere

$$\Omega \sim 30 \div 35\ \omega_t$$

4. Ritardo introdotto da H_0 e dal filtro A.A.

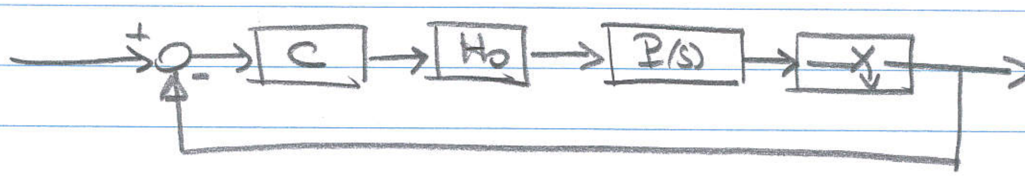
Possiamo pensare che H_0 introduca un ritardo medio pari a $T/2$. Per convincerci di ciò consideriamo un segnale continuo a rampa e prima lo campioniamo e poi lo passiamo attraverso H_0:

$$t\,1(t) \longrightarrow \boxed{\downarrow_T} \longrightarrow \boxed{H_0} \longrightarrow y(t)$$



È chiaro che la retta che meglio (per es. in senso $\mathcal{L}_1$) approssima il segnale "a scala" $y(t)$ (in blu) non è la retta originale ma la retta (in rosso) ottenuta ritardando la retta originale di $\frac{T}{2}$.

Dunque, se intendiamo progettare un controllore continuo (che poi dovremo discretizzare) nello schema,



possiamo considerare

$$P_1(s) := e^{-sT/2} P(s)$$

invece che $P(s)$ ai fini del progetto del controllore continuo.

Questo termine introduce un ritardo di fase alla pulsazione di attraversamento ω_a. Tale ritardo è

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\omega_a T}{2} = \frac{\omega_a \pi}{\Omega}$$

Esso si somma al ritardo introdotto dal filtro A.A. che è

$$\Delta\varphi_2 \simeq \frac{4\xi\sqrt{a}\,\omega_a}{\Omega}$$

Il ritardo complessivo $\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ non deve superare la massima perdita φ_M di margine di fase che posso tollerare, cioè:

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = (\pi + 4\xi\sqrt{a})\frac{\omega_a}{\Omega} \leq \varphi_M$$

In altri termini, si ha

$$\Omega \geq \frac{\omega_a\left[\pi + 4\xi\sqrt{a}\right]}{\varphi_M}$$

5. Sensibilità alle variazioni parametriche

Più grande è T più le variazioni parametriche vengono amplificate dal passaggio dal continuo al discreto per tenuta e campionamento.

Per es. consideriamo

$$P(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

sistema del 1° ordine con un polo in $-\frac{1}{\tau}$. Il corrispondente polo del sistema discreto ottenuto per tenuta e campionamento è in

$$a := e^{-T/\tau}$$

L'incertezza $\Delta\tau$ su τ si riversa in un'incertezza Δa su a in modo dipendente da T.

Infatti:

$$\Delta a \simeq \frac{da}{d\tau}\Delta\tau = \frac{T}{\tau^2}\, a\, \Delta\tau$$

e quindi le incertezze relative sono legate da

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{T}{\tau}\,\frac{\Delta\tau}{\tau}$$

da cui si vede che più grande è T più l'incertezza relativa sulla costante di tempo continua τ viene amplificata.

6. Quantizzazione

Devo stare attento a non fare T troppo piccolo rispetto al passo di quantizzazione q. Infatti nel calcolo della derivata discreta ho

$$d = \frac{f((k+1)T) - f(kT)}{T}$$

Se $f((k+1)T)$ e $f(kT)$ vengono quantizzate si ha

$$d = \frac{f((k+1)T) - f(kT) + e}{T}$$

dove l'errore di quantizzazione e è

$$|e| < 2\frac{q}{2} = q$$

Dunque l'errore di quantizzazione

su d è e/T e

$$\left|\frac{e}{T}\right| < \frac{q}{T}$$

Se T è troppo piccolo rispetto a q rischio di avere errori alti su d.