Esercizi su trasformate e anti-trasformate $\mathscr{Z}$

1. Si calcoli la trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$f(k) := k^2 \cos(k)$$

Soluzione.

$$F(z) = \frac{z(-1+z^2)(\cos(1) + z(-3 + z\cos(1) + \cos(2)))}{(1 + z^2 - 2z\cos(1))^3}.$$

2. Si calcoli la trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$f(k) := \cos^2(k)$$

Soluzione.

$$F(z) = \frac{z[1 + z(-1 + 2z - 3\cos(2)) + \cos(2)]}{2(-1+z)(1+z^2 - 2z\cos(2))}.$$

3. Si calcoli la trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$f(k) := \cos(3k)\sin(2k)$$

Soluzione.

$$F(z) = \frac{z(-2z\cos(2) + \cos(3) + z^2\cos(3))\sin(2)}{(1 + z^4 - 2z(\cos(1) + \cos(5)) - 2z^3(\cos(1) + \cos(5)) + 2z^2(1 + \cos(4) + \cos(6)))}$$

4. Si calcoli l'anti-trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$F(z) := \frac{1+z^2}{(1+z)(2+z)^2}$$

Soluzione.

$$f(k) = \frac{1}{4}\left[7(-2)^k - 8(-1)^k - 5k(-2)^k + \delta(k)\right].$$

5. Si calcoli l'anti-trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$F(z) := \frac{z}{1+z^2-3z}$$

Soluzione.

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]^k - \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]^k\right].$$

6. Si calcoli l'anti-trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$F(z) := \frac{z(4-3\sqrt{2}+9z)}{(4z-1)(9z^2-3\sqrt{2}z+1)}$$

Soluzione.

$$f(k) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right]\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

7. Si calcoli l'anti-trasformata $\mathscr{Z}$ di

$$F(z) := \frac{1}{|z|}$$

Soluzione. Si ha

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0$$

$$f(1) = \lim_{z\to\infty} z(F(z)-f(0)) = \lim_{z\to\infty} zF(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{|z|}$$

Il limite a secondo membro di quest'ultima formula ovviamente non esiste (si tenga conto, infatti, che z è una variabile complessa che tende all'infinito lungo una qualsiasi direzione; se, per esempio, z tende ad infinito lungo il semiasse reale positivo il limite è 1 mentre se z tende ad infinito lungo il semiasse reale negativo il limite è -1; se tende a ad infinito lungo un direzione ancora diversa il limite è anch'esso diverso). Pertanto, l'anti-trasformata non esiste. In effetti, la funzione $F(z) := \frac{1}{|z|}$ in questione non è analitica in un intorno di infinito e quindi non è la trasformata di alcuna successione.

8. Si consideri la successione

$$f(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\left[k^4\sin(2k) + k^3 2^k + 3^k[\cos(k)-1] + [1-\sin(2)-3\cos(1)]\delta(k-1)\right]$$

e la sua trasformata $F(z)$. Si dica se $F(z)$ è una funzione razionale e, in caso affermativo, se ne calcoli il grado relativo.

Soluzione. La successione $f(k)$ è combinazione lineare di successioni del tipo $k^h p^k$ e di impulsi di Kronecker, pertanto la sua trasformata $F(z)$ è una funzione razionale. Riguardo al grado relativo, sappiamo che esso è pari al "ritardo intrinseco" del segnale ossia all'indice del primo campione non nullo. Si ha:

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

e

$$f(3) = -27[3\sin(6) + \cos(3) + 7] \neq 0.$$

pertanto il grado relativo di $F(z)$ è pari a 3.

9. Si consideri la funzione di trasferimento razionale

$$W(z) = \frac{2(z+1)^2(z+2)^3}{z^7 - 2}.$$

Si dica quanti passi di ritardo introduce questa funzione di trasferimento. In altre parole, si alimenta $W(z)$ con un ingresso (causale) $u(k)$ e si considera la corrispondente uscita forzata $y(k)$ e si chiede di calcolare la differenza fra il primo indice k_1 per cui $y(k)$ è diverso da zero e il primo indice k_0 per cui $u(k)$ è diverso da zero.

Soluzione. Anzitutto, poiché il sistema è tempo-invariante, possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $k_0 = 0$. Dunque, $u(0) \neq 0$, $Y(z) = W(z)U(z)$ e

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = 0u(0) = 0,$$

$$y(1) = \lim_{z\to\infty} z(Y(z) - y(0)) = \lim_{z\to\infty} zY(z) = 0$$

$$y(2) = \lim_{z\to\infty} z^2(Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}) = \lim_{z\to\infty} z^2 Y(z) = 2u(0) \neq 0.$$

In conclusione, $k_1 = 2$ e il sistema introduce 2 passi di ritardo.

Si noti che il ragionamento si può ripetere per una qualunque funzione di trasferimento razionale propria $W(z)$ e il risultato è che il numero di passi di ritardo introdotti da $W(z)$ è pari al grado relativo di $W(z)$.

Si noti anche che si può ulteriormente generalizzare il ragionamento ad una qualunque $W(z)$ (anche non razionale, purché analitica in un intorno di infinito) e concludere che il numero di passi di ritardo introdotti da $W(z)$ è pari al minimo valore di l per il quale

$$\lim_{z\to\infty} z^l W(z) \neq 0.$$

10. Si consideri la successione $f(k)$ definita da $f(0) = 0$ e

$$f(k) = \frac{1}{k}, \qquad k > 0$$

e sia $F(z)$ la sua trasformata. Si dica se $F(z)$ è una funzione razionale e, in caso affermativo, se ne calcoli il grado relativo. Si calcoli poi $F(z)$. Infine, si utilizzi il risultato per una dimostrazione del fatto che la serie armonica diverge (a partire dalla prima dimostrazione di Nicola Oresme nel XIV secolo e da quella di Pietro Mengoli del XVII secolo, decine di dimostrazioni diverse sono state sviluppate di questo fatto).

Soluzione. La successione $f(k)$ non è combinazione lineare di successioni del tipo $k^h p^k$ e di un numero finito di impulsi di Kronecker, pertanto la sua trasformata $F(z)$ non è una funzione razionale.

Per calcolare $F(z)$ possiamo procedere come segue. Si ha

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^{-k}$$

da cui

$$\frac{d}{dz}[F(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} -z^{-k-1} = -\frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = -\frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-(1/z)} - 1 \right] = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$$

Pertanto, possiamo ottenere $F(z)$ integrando l'espressione precedente. Fra le infinite primitive dovremo sceglierne una: per il momento calcoliamole tutte:

$$F_c(z) = \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} = \ln(z) - \ln(z-1) + c = \ln(\frac{z}{z-1}) + c,$$

dove c è una costante reale. Sappiamo che esiste un valore reale $\bar{c}$ di c tale che $F(z) = F_{\bar{c}}(z)$. Per calcolare $\bar{c}$ imponiamo che $F(\infty) = f(0) = 0$ da cui si ricava immediatamente $\bar{c} = 0$. Dunque

$$F(z) = F_0(z) = \ln(\frac{z}{z-1}).$$

La somma della serie armonica si può trovare come limite destro, per z tendente a 1 lungo l'asse reale, di $F(z)$: ovviamente tale limite è $+\infty$.