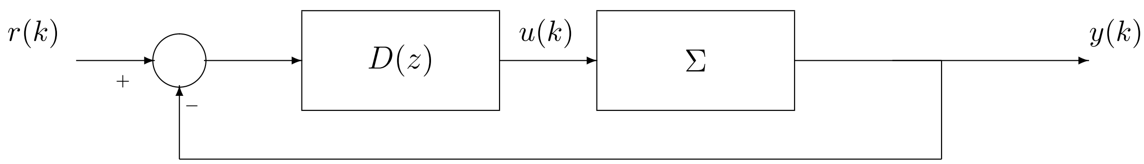
Esercizi sulla stabilità

Esercizio 1. Si consideri l'interconnessione



con

$$D(z) = K\frac{z - 1/2}{z - 1}$$

e Σ sistema LTI di equazioni:

$$\Sigma: \quad y(k) - (1/8)y(k-2) = u(k-1) - 1/3u(k-2).$$

Si determinino i valori del guadagno reale K per i quali la catena chiusa e stabile in senso BIBO e si mettano in evidenza, in particolare i valori "critici" di K.

Soluzione.

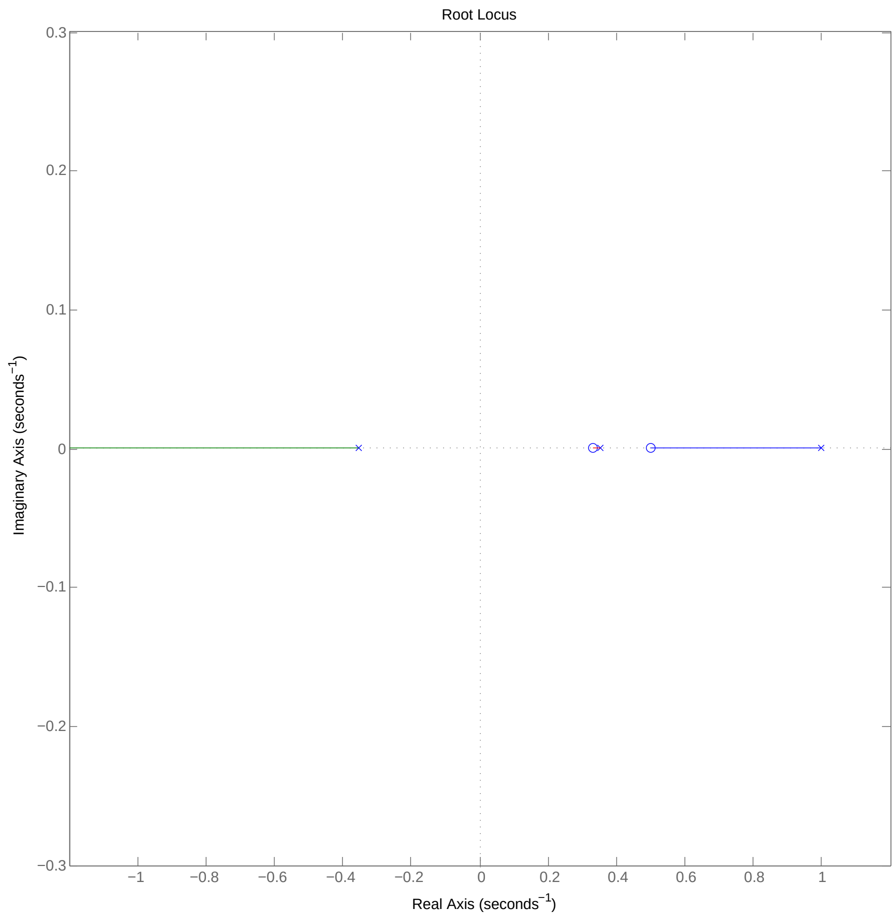
Calcoliamo per prima cosa la funzione di trasferimento di Σ:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - (1/3)z^{-2}}{1 - (1/8)z^{-2}} = \frac{z - 1/3}{z^2 - 1/8}.$$

Dunque la funzione di trasferimento della catena di azione diretta è

$$D(z)G(z) = K\frac{(z-1/2)(z-1/3)}{(z-1)(z-\sqrt{1/8})(z+\sqrt{1/8})} = K\frac{N(z)}{D(z)}$$

Possiamo tracciare il luogo delle radici per analizzare la BIBO stabilità del sistema a catena chiusa. Il luogo positivo (ossia corrispondente a valori di $K \geq 0$) è riportato in figura.



Il luogo negativo ha un ramo che origina (per $K = 0$) dal polo in 1 e, al diminuire di K fino a $-\infty$, percorre il semiasse reale positivo fino a tendere (per $K \to -\infty$) a $+\infty$.

Dunque, $K_{\text{cr}}^{(1)} = 0$ è uno dei due punti critici. Il secondo punto critico corrisponde a $z = -1$; il corrispondente valore di K si può quindi individuare ponendo

$$D(-1) + KD(-1) = 0$$

da cui

$$K_{\text{cr}}^{(2)} = -D(-1)/N(-1) = -(-2)(1 - 1/8)/[(-1 - 1/2)(-1 - 1/3)],$$

ossia

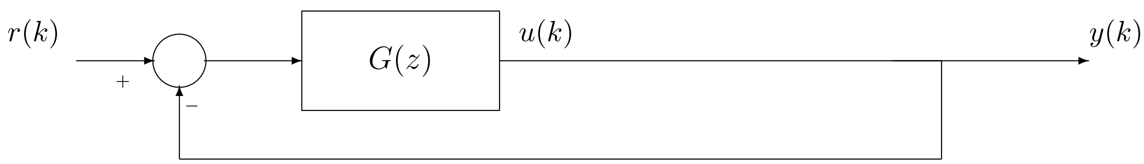
$$K_{\text{cr}}^{(2)} = (7/4)/[(-3/2)(-4/3)] = 7/8.$$

Dunque la catena chiusa è BIBO stabile per

$$K_{\text{cr}}^{(1)} = 0 \leq K < 7/8 = K_{\text{cr}}^{(2)}$$

Si noti che la catena chiusa è BIBO stabile anche per $K = K_{\text{cr}}^{(1)} = 0$ perché in questo caso, la corrispondente funzione di trasferimento della catena di azione diretta e, quindi, della catena chiusa è nulla ed è quindi BIBO stabile! Invece, per $K = K_{\text{cr}}^{(2)} = 7/8$, la corrispondente funzione di trasferimento della catena chiusa ha un polo in -1 e quindi non è BIBO stabile.

Esercizio 2. Si consideri l'interconnessione



con

$$G(z) = \frac{z-a}{(z-1)(z-1/2)}.$$

Si discuta la BIBO stabilità della catena chiusa al variare dello zero reale a di $G(z)$.

Soluzione.

La funzione di trasferimento della catena chiusa è

$$W(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{z-a}{(z-1)(z-1/2)+z-a} = \frac{z-a}{z^2-(1/2)z+1/2-a}.$$

Devo determinare per quali valori di a il denominatore è un polinomio di Schur. Posso utilizzare il Criterio di Jury.

1	$-1/2$	$1/2-a$
$1/2-a$	$-1/2$	1
$1-(1/2-a)^2$	$-1/2+(1/2)(1/2-a)$	0
$-1/2+(1/2)(1/2-a)$	$1-(1/2-a)^2$	0
$\frac{(1-(1/2-a)^2)^2-(-1/2+(1/2)(1/2-a))^2}{1-(1/2-a)^2}$	0	0

Si deve quindi analizzare il segno di

$$a_0 := 1$$

$$b_0 := 1 - (1/2 - a)^2 = 1 - 1/4 + a - a^2 = 3/4 + a - a^2$$

e

$$c_0 := \frac{(1-(1/2-a)^2)^2 - (-1/2 + (1/2)(1/2-a))^2}{1-(1/2-a)^2} = \frac{(3/4+a-a^2)^2 - [(1/2)(1/2+a)]^2}{3/4+a-a^2}$$

Il termine $a_0 = 1$ è ovviamente positivo; imponendo che anche b_0 e c_0 siano positivi si trova facilmente che il denominatore $D(z) := z^2 - (1/2)z + 1/2 - a$ di $W(z)$ è un polinomio di Schur se e solo se

$$-1/2 < a < 1.$$

Si noti, tuttavia, che potrebbero esserci altri valori di a che rendono la catena chiusa BIBO stabile; infatti, potrebbe esserci una cancellazione fra numeratore e denominatore di $W(z)$ di modo che $W(z)$ potrebbe essere BIBO stabile anche se $D(z) = z^2 - (1/2)z + 1/2 - a$ di $W(z)$ non è un polinomio di Schur. L'unico zero del numeratore $N(z) := z - a$ è in $z = a$, pertanto, eventuali cancellazioni si possono aver solo per i valori di a per i quali $D(a) = 0$, ossia

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1/2.$$

La cancellazione relativa a $a = 1/2$ corrisponde a un valore di a per cui la catena chiusa è comunque BIBO stabile e quindi non fa aumentare l'insieme dei valori di a per i quali la catena chiusa è BIBO stabile. Invece, la cancellazione relativa a $a = 1$ potrebbe fa aumentare l'insieme dei valori di a per i quali la catena chiusa è BIBO stabile. In effetti, per $a = 1$, la cancellazione porta alla funzione di trasferimento a catena chiusa

$$W(z) = \frac{1}{z - 1/2}$$

che è chiaramente BIBO stabile. In conclusione, la catena chiusa è BIBO stabile se e solo se

$$-1/2 < a \leq 1.$$

Il metodo precedente consente di rispondere alla domanda ma non di discutere come variano i poli della funzione di trasferimento a catena chiusa al variare di a. Per analizzare questo aspetto, si poteva anche il metodo del luogo delle radici ricorrendo ai due polinomi

$$D_0(z) := z^2 - (1/2)z + 1/2$$

e

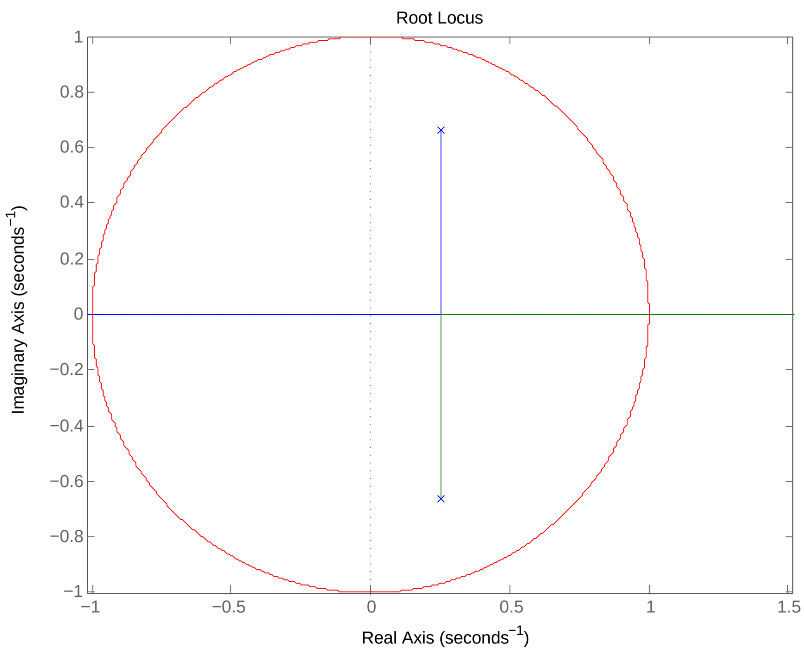
$$N_0(z) := 1$$

ausiliari. In effetti, il denominatore di $W(z)$ si può scrivere nella forma

$$D(z) = D_0(z) + KN_0(z)$$

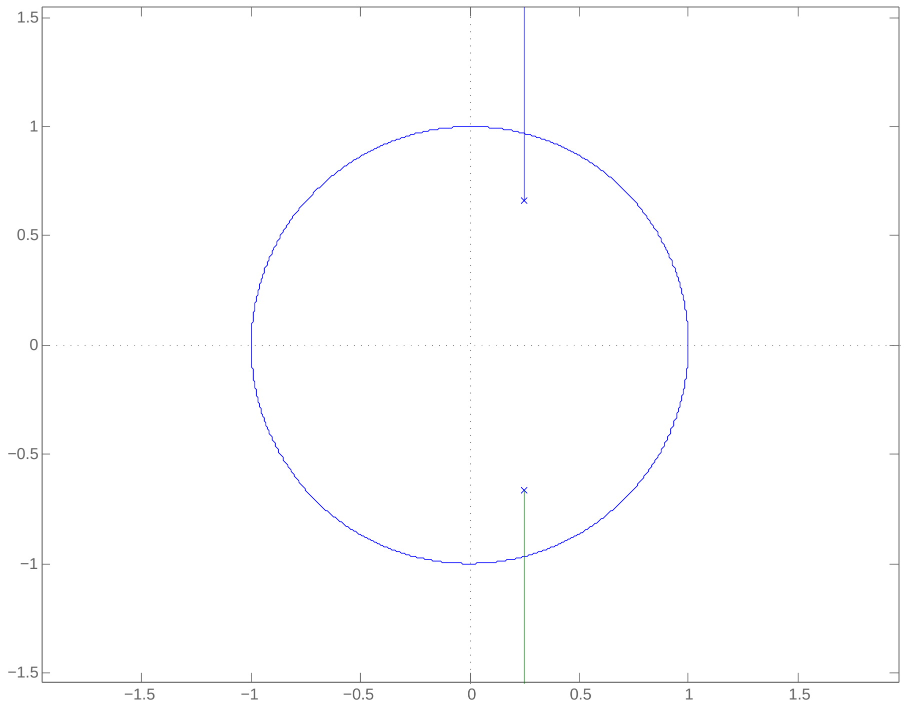
con $K := -a$.

Consideriamo separatamente i casi $a \geq 0$ (ossia, $K \leq 0$, corrispondente al luogo negativo) e $a \leq 0$ (ossia, $K \geq 0$, corrispondente al luogo positivo). Nel primo caso il luogo è



I due rami escono di punti complessi coniugati individuati dalle "crocette" e si incrociano nel punto doppio in $-1/4$ per $K \simeq -0.44$ ossia $a \simeq 0.44$. Poi i due rami si allontanano in direzioni opposte lungo l'asse reale. Il ramo di destra esce per primo dalla circonferenza unitaria in corrispondenza ad $a = 1$.

Per $a \leq 0$ (ossia, $K \geq 0$) il luogo è



I due rami escono di punti complessi coniugati individuati dalle “crocette” e incrociano la circonferenza unitaria, per $a = -1/2$, nei punti $1/4 \pm \sqrt{15}/4$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2.$$

Si dica per quali valori dei parametri reali a_1 e a_2 il polinomio è di Schur. Si individui la regione nel piano a_1, a_2 corrispondente a polinomi $A(z)$ di Schur.

Soluzione.

Per determinare per quali valori di a_1 e a_2 il polinomio $A(z)$ è di Schur, posso utilizzare il Criterio di Jury.

1	a_1	a_2
a_2	a_1	1
$1 - a_2^2$	$a_1(1 - a_2)$	0
$a_1(1 - a_2)$	$1 - a_2^2$	0
$\frac{(1-a_2^2)^2 - (a_1(1-a_2))^2}{1-a_2^2}$	0	0

Si deve quindi analizzare il segno di

$$a_0 := 1$$

$$b_0 := 1 - a_2^2$$

e

$$c_0 := \frac{(1-a_2^2)^2 - (a_1(1-a_2))^2}{1-a_2^2}$$

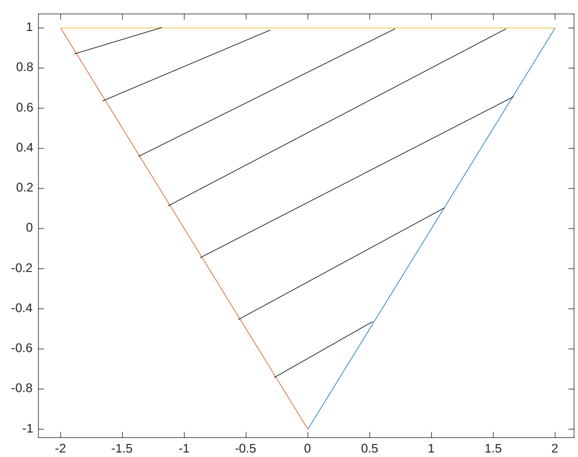
Il termine $a_0 = 1$ è ovviamente positivo; imponendo che anche b_0 e c_0 siano positivi si trova facilmente:

$$|a_2| < 1$$

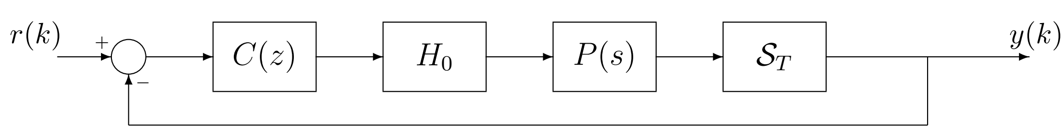
e

$$a_2 > |a_1| - 1$$

Quindi la regione del piano che ha a_1 in ascissa e a_2 in ordinata, corrispondente a polinomi $A(z)$ di Schur è il triangolo ombreggiato in figura.



Esercizio 4. Si consideri lo schema di controllo



con

$$C(z) = K\frac{(z-1/2)(z-1/4)(z-1/8)(z-1/16)(z-1/3)^3}{z^7+6z^6+5z^5+4z^4+3z^3+2z^2+z+1}.$$

$$P(s) = \frac{s+2}{s-1}$$

e $T = 1/2$

Si dica se esistono valori di $K > 0$ che rendono la catena chiusa la BIBO stabile.

In caso di risposta affermativa, si dica se per tali valori di K a catena chiusa è anche internamente stabile.

Soluzione. Anzitutto calcoliamo

$$\tilde{P}(z) := \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right].$$

A tal fine calcoliamo la risposta indiciale del sistema di funzione di trasferimento $P(s)$. Si ha

$$Y(s) := \frac{P(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

con

$$A := \lim_{s\to 0} P(s) = -2, \qquad B := \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{P(s)}{s} = 3,$$

cosicché la risposta indiciale del sistema di funzione di trasferimento $P(s)$ è

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = [A + B\mathrm{e}^t]1(t) = [-2 + 3\mathrm{e}^t]1(t).$$

Anzitutto calcoliamo $P(z)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[(-2+3\mathrm{e}^t)1(t)\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[-2\delta_{-1}(k) + 3\mathrm{e}^{kT}\right] \\
&= \frac{z-1}{z}(-2\frac{z}{z-1} + 3\frac{z}{z-p}) \\
&= -2 + 3\frac{z-1}{z-p},
\end{aligned}$$

con

$$p := \mathrm{e}^T \simeq 1.65.$$

In conclusione,

$$\tilde{P}(z) = \frac{z-q}{z-p}$$

dove

$$q := 2p - 3 \simeq 0.3.$$

Ora posso definire

$$H(z) := C(z)\tilde{P}(z) = K\frac{N(z)}{D(z)},$$

dove

$$N(z) := (z-q)(z-1/2)(z-1/4)(z-1/8)(z-1/16)(z-1/3)^3$$

e

$$D(z) := (z-p)(z^7 + 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1).$$

Poiché il grado relativo di $H(z)$ è 0, i poli del sistema a catena chiusa tendono, per $K \to \infty$, agli zeri di $H(z)$ che sono proprio gli zeri di $N(z)$ se non ci sono semplificazioni fra $N(z)$ e $D(z)$; altrimenti sono un sottoinsieme degli zeri di $N(z)$. Notiamo subito che $N(z)$ è un polinomio di Schur e quindi per K sufficientemente elevato, la catena chiusa è certamente BIBO stabile.

Riguardo alla stabilità interna, notiamo che né $\tilde{P}(z) = \frac{z-q}{z-p}$ né $C(z)$ hanno zeri al di fuori del cerchio unitario aperto e pertanto non possono esservi semplificazioni "instabili" fra $\tilde{P}(z)$ e $C(z)$ e quindi la stabilità BIBO è equivalente alla stabilità interna.
In alternativa, possiamo considerare il luogo delle radici relativo a $D(z)+KN(z)$ i cui rami, per $K \to \infty$, tendono tutti agli zeri di $N(z)$ che è di Schur. Inoltre, per $K \neq -1$, il grado di $D(z)$ è pari al grado di $D(z) + KN(z)$. In conclusione, ciascuno dei due ragionamenti precedenti permette di concludere che, per K sufficientemente elevato, l'interconnessione è internamente stabile.

Esercizio 5. Si dica se il polinomio

$$P(s) = s^5 + 0.5s^4 - 1.12s^4 - 0.56s^4 + 0.3s + 0.16$$

è di Schur.

Soluzione.

Costruisco la tabella di Jury

```
    1.0000    0.5000   -1.1200   -0.5600    0.3000    0.1600
    0.1600    0.3000   -0.5600   -1.1200    0.5000    1.0000
    0.9744    0.4520   -1.0304   -0.3808    0.2200         0
    0.2200   -0.3808   -1.0304    0.4520    0.9744         0
    0.9247    0.5380   -0.7978   -0.4829         0         0
   -0.4829   -0.7978    0.5380    0.9247         0         0
    0.6726    0.1214   -0.5168         0         0         0
   -0.5168    0.1214    0.6726         0         0         0
    0.2754    0.2147         0         0         0         0
    0.2147    0.2754         0         0         0         0
    0.1080         0         0         0         0         0
    0.1080         0         0         0         0         0
```

e in base al criterio posso concludere che il polinomio P(s) è di Schur. Si noti che, anche se $P(s)$ è un polinomio in s e non in z, ha perfettamente senso chiedersi se è un polinomio di Jury (il nome della variabile è irrilevante!).