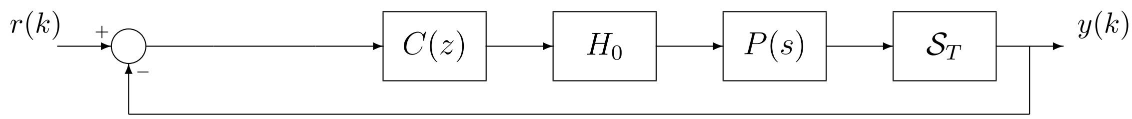
**Luogo negativo delle radici**

**Esercizio 1.** Si consideri lo schema di controllo rappresentato in figura dove $T = 1$ s,

$$C(z) = K \geq 0$$

e

$$P(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}.$$




Si dica come variano i poli del sistema a catena chiusa al variare di $K \geq 0$.

**Soluzione.**

Come prima cosa, si decompone $P(s)/s$ in frazioni parziali ottenendo

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

dove

$$A = -1$$
$$B = \lim_{s \to -1} (s+1)\,\frac{P(s)}{s} = 3$$
$$C = -A - B = -2.$$

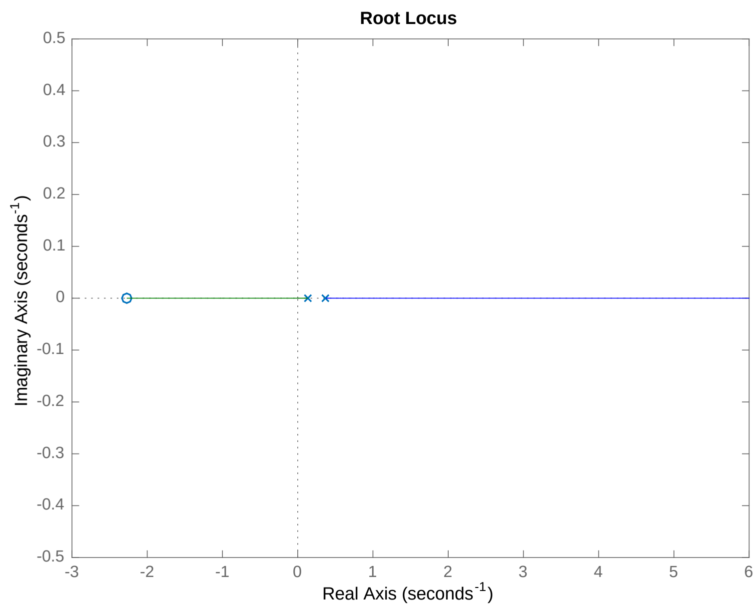
Dunque

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[A\ 1(t) + B\ e^{-t} + C\ e^{-2t}\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[A\ \delta_{-1}(k) + B\ (e^{-T})^k + C\ (e^{-2T})^k\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\left[A\frac{z}{z-1} + B\frac{z}{z-p} + C\frac{z}{z-p^2}\right] \\
&= A + B\frac{z-1}{z-p} + C\frac{z-1}{z-p^2} \\
&\simeq \frac{-k_0(z+z_0)}{(z-p)(z-p^2)}
\end{aligned}$$

dove

$$k_0 := 0.16703, \qquad p := e^{-T} \simeq 0.368, \qquad z_0 \simeq 2.272.$$

Si osserva che il guadagno di Evans $-k_0$ di $\tilde{P}(z)$ è negativo e quindi il luogo delle radici che descrive come variano i poli del sistema a catena chiusa al variare di $K \geq 0$ è il luogo negativo:




Il luogo attraversa la circonferenza unitaria nei punti $\pm 1$ in corrispondenza dei valori critici di $K$ che risolvono le

$$[-Kk_0(z+z_0) + (z-p)(z-p^2)]_{|z=1} = 0$$

e

$$[-Kk_0(z+z_0) + (z-p)(z-p^2)]_{|z=-1} = 0.$$

Ossia

$$K_{cr1} = -(1-p)(1-p^2)/(-k_0(1+z_0)) = 1$$

e

$$K_{cr2} = -(-1-p)(-1-p^2)/(-k_0(-1+z_0)) \simeq 7.3$$

Dunque, la catena chiusa è BIBO-stabile per $K < K_{cr1} = 1$.