Progetto nel continuo di rete correttrice e traduzione nel discreto con il metodo di emulazione

Esercizio. Sia

$$P(s) = \frac{2.4}{(s+2)(s+3)}.$$

Si progetti un sistema di controllo digitale ottenuto per emulazione di una rete correttrice in modo da avere:
- $t_r = 1$ secondo,
- errore a regime in risposta ad una rampa: $e_r = 3$,
- assenza di sovraelongazione

Si confrontino le prestazioni del metodo MPZ e del metodo di Tustin.

Soluzione.

1. Come prima cosa scegliamo T. In mancanza di altre specifiche possiamo prendere

$$T = t_r/10 = 0.1 \quad \text{secondi.}$$

Possiamo notare che con questa scelta soddisfiamo anche la condizione

$$\Omega \geq 25\omega_n$$

con ω_n pulsazione di taglio (corrispondente in prima approssimazione alla banda passante).

2. Per tenere conto del ritardo introdotto dall'holder H_0, consideriamo

$$P_0(s) := e^{-sT/2}P(s).$$

Inoltre, decidiamo di usare un controllore con funzione di trasferimento della forma

$$C(s) = \frac{K}{s}C_1(s)$$

in modo da avere tipo pari a 1 (naturalmente, $C_1(s)$ andrà progettato in modo da non avere poli né zeri nell'origine e da avere guadagno di Bode unitario, ossia $C_1(0) = 1$).

Inoltre fissiamo K in modo che il guadagno di Bode $KC_1(0)P_0(0)$ della catena di azione diretta sia il reciproco dell'errore a regime imposto dalle specifiche:

$$KC_1(0)P_0(0) = \frac{1}{e_r} = 1/3.$$

Se consideriamo che $C_1(0) = 1$, da ciò consegue che

$$K = \frac{1/3}{P_0(0)} = \frac{1/3}{P(0)} = 5/6.$$

Poniamo infine

$$P_1(s) := \frac{K}{s}P_0(s) = \frac{2e^{-sT/2}}{s(s+2)(s+3)}.$$

3. Traduciamo ora le specifiche su tempo di salita t_r e assenza di sovrelongazione in termini di pulsazione di attraversamento e margine di fase. Le richieste sono $t_r = 1$ e $m_p = 0$ da cui si ricava

$$\omega_a^* = 2/t_r = 2 \quad \text{rad/s}$$

e

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8m_p = 1.04 \ \ \text{rad}.$$

4. Ora calcoliamo modulo e fase di $P_1(j\omega_a^*)$:

$$|P_1(j\omega_a^*)| = \frac{2}{2\sqrt{(4+4)(4+9)}} \simeq 0.098$$

$$\text{Arg}[P_1(j\omega_a^*)] = -\frac{\omega_a^* T}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctan(1) - \arctan(2/3) \simeq -\frac{1}{10} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0.59 \simeq -3.04 \quad \text{rad}.$$

5. Siamo pronti per progettare $C_1(s)$ in modo che sia soddisfatta la condizione

$$C_1(j\omega_a^*) = Me^{j\varphi}$$

dove

$$M := \frac{1}{|P_1(j\omega_a^*)|} \simeq 10.2 > 1$$

e

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \text{Arg}[P_1(j\omega_a^*)] \simeq 0.94 > 0$$

Poiché alla pulsazione di attraversamento devo amplificare e anticipare la fase posso ricorrere ad una *rete anticipatrice.*

Per prima cosa, verifico che sia soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della rete anticipatrice con i parametri desiderati, ossia $M > 1/\cos(\varphi)$: $M \simeq 10.2$ e $1/\cos(\varphi) \simeq 1.7$; pertanto la condizione è verificata! Quindi la funzione di trasferimento $C_1(s)$ richiesta è:

$$C_1(s) = \frac{1 + sT_1}{1 + \alpha s T_1}$$

con

$$\alpha := \frac{M\cos(\varphi) - 1}{M(M - \cos(\varphi))} \simeq 0.05$$

e

$$T_1 = \frac{M}{\omega_a^* \tan(\varphi)} \simeq 5.9.$$

6. In conclusione,

$$C(s) = \frac{5/6}{s} \frac{1 + sT_1}{1 + \alpha s T_1}.$$

7. Discretizzando con il metodo di Tustin, si ottiene

$$\begin{aligned} C_T(z) &= C(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \\ &= \frac{5/6}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \frac{1 + \frac{2T_1}{T}\frac{z-1}{z+1}}{1 + \frac{\alpha 2T_1}{T}\frac{z-1}{z+1}} \\ &= \frac{5/6}{20\frac{z-1}{z+1}} \quad \frac{z + 1 + \frac{2T_1}{T}z - \frac{2T_1}{T}}{z + 1 + \frac{2\alpha T_1}{T}z - \frac{2\alpha T_1}{T}} \\ &= K_T \frac{(z+1)(z - z_T)}{(z-1)(z - p_T)}, \end{aligned}$$

dove

$$K_T := \frac{T + 2T_1}{24(T + 2\alpha T_1)} \simeq 0.7078$$

$$z_T := \frac{\frac{2T_1}{T} - 1}{\frac{2T_1}{T} + 1} \simeq 0.98$$

e

$$p_T := \frac{\frac{2\alpha T_1}{T} - 1}{\frac{2\alpha T_1}{T} + 1} \simeq 0.72.$$

7. Per discretizzare con il metodo MPZ, dobbiamo prima scrivere $C(s)$ come prodotto di un guadagno (di Evans) K_E per il rapporto fra due polinomi monici, ossia

$$C(s) = K_E \frac{s + 1/T_1}{s\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)}$$

con

$$K_E := \frac{5}{6}\frac{T_1}{\alpha T_1} = \frac{5}{6\alpha}.$$

A questo punto dobbiamo scegliere il grado relativo della funzione di trasferimento del controllore che può essere pari ad 1 oppure a 0. Nel caso di grado relativo pari a 1, si ha:

$$C_{MPZ,1}(z) = K_{M1}\frac{z - z_M}{(z-1)(z-p_M)}$$

dove

$$z_M := e^{-\frac{T}{T_1}}, \qquad p_M := e^{-\frac{T}{\alpha T_1}}$$

e

$$K_{M1} := K_E T \frac{1-p_M}{1-z_M}\frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{\alpha T_1}} = \frac{5}{6}T\frac{1-p_M}{1-z_M} \simeq 1.4$$

Nel caso di grado relativo nullo, si ha invece:

$$C_{MPZ,0}(z) = K_{M0}\frac{(z+1)(z-z_M)}{(z-1)(z-p_M)}$$

dove

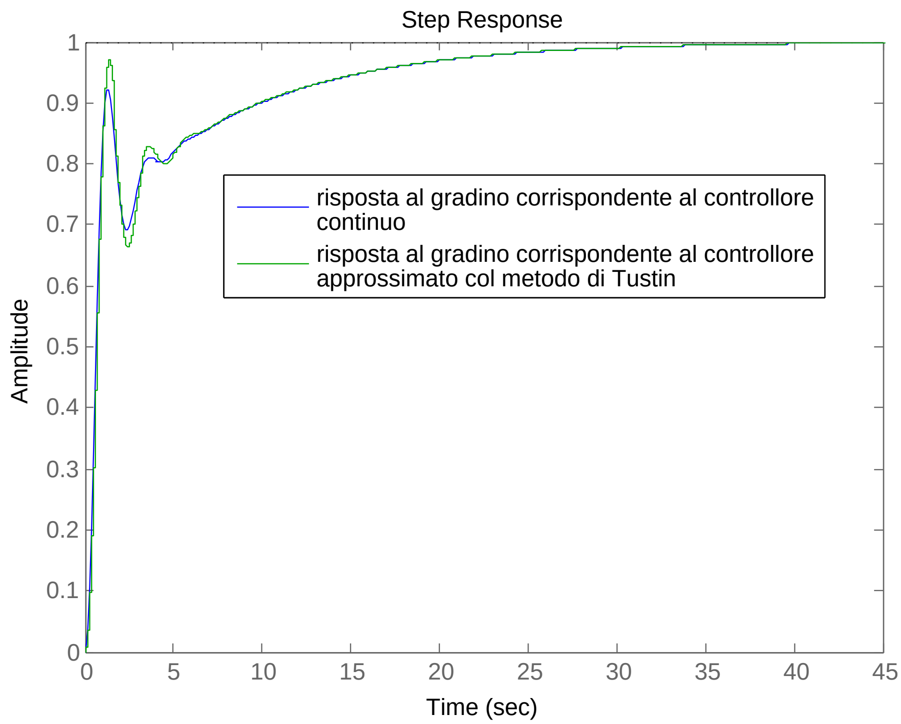
$$z_M := e^{-\frac{T}{T_1}}, \qquad p_M := e^{-\frac{T}{\alpha T_1}}$$

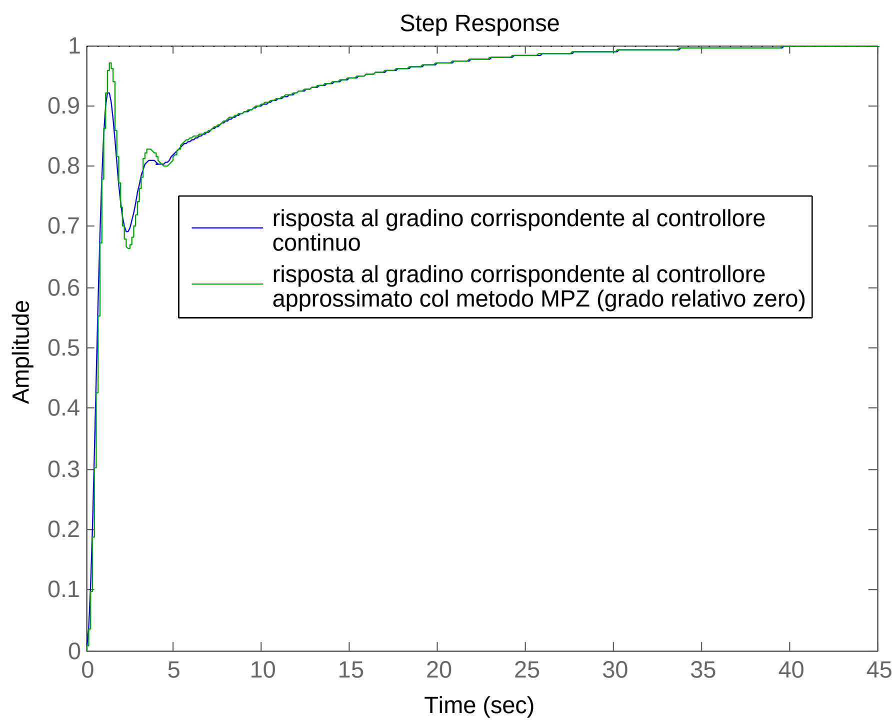
sono gli stessi di prima e

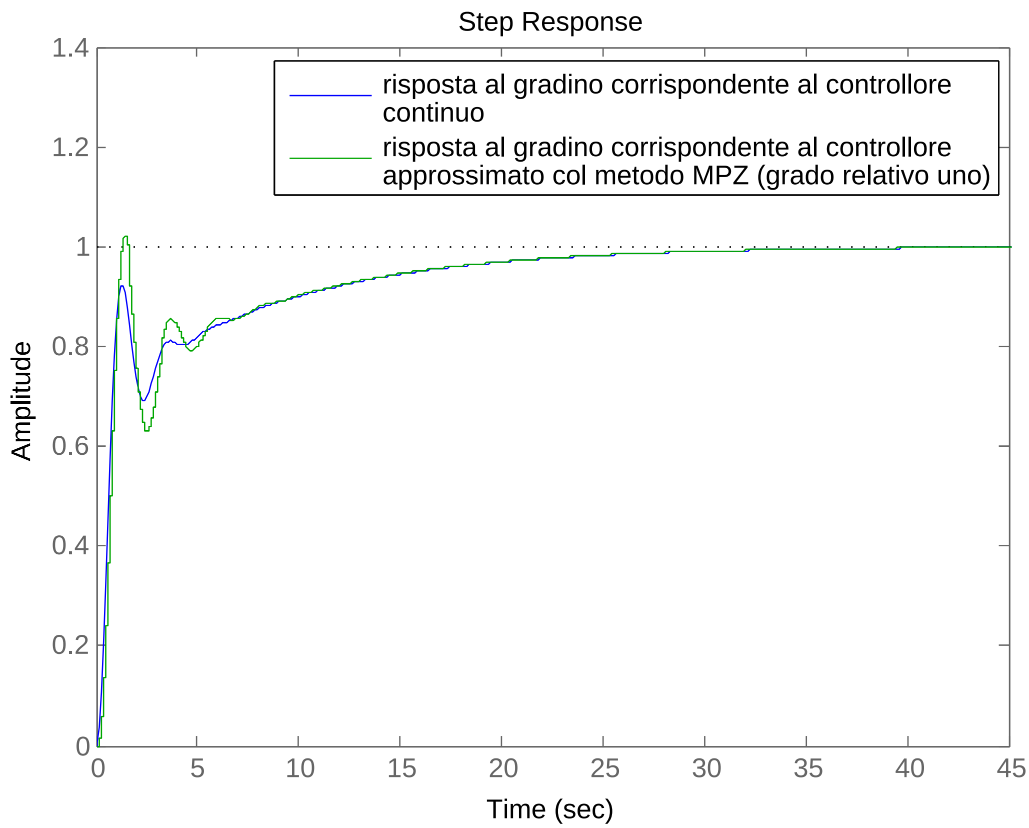
$$K_{M0} := K_E T\ \frac{1}{2}\ \frac{1-p_M}{1-z_M}\ \frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{\alpha T_1}} = \frac{5}{6}\ \frac{T}{2}\ \frac{1-p_M}{1-z_M} \simeq 0.7$$

Si noti che la funzione di trasferimento $C_{MPZ,0}(z)$ è praticamente identica all funzione di trasferimento $C_T(z)$ ottenuta discretizzando con il metodo di Tustin.

Le risposte a gradino dei tre controllori discreti sono riportate nelle figure seguenti dove è illustrata anche la risposta al gradino relativa al controllore continuo originale di funzione di trasferimento $C(s)$.


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
risposta al gradino corrispondente al controllore continuo
risposta al gradino corrispondente al controllore approssimato col metodo di Tustin


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
risposta al gradino corrispondente al controllore continuo
risposta al gradino corrispondente al controllore approssimato col metodo MPZ (grado relativo zero)



Si noti che in questo caso sarebbe molto più semplice utilizzare la sintesi diretta allocando un solo polo in $-\omega_n = -\frac{1.8}{t_r} = -1.8$ che corrisponde, a tempo discreto, a

$$p_d := e^{-1.8T} \simeq 0.835.$$

Per far ciò la cosa più semplice è imporre che la funzione di trasferimento a catena chiusa sia

$$W_d(z) = \frac{1 - p_d}{z - p_d}$$

dove si è scelto il numeratore in modo da avere $W_d(1) = 1$ il che garantisce inseguimento asintotico perfetto del gradino. Poiché la funzione è del primo ordine, l'assenza di sovrelongazione è automaticamente verificata. Per quanto riguarda la risposta alla rampa, osserviamo che la relativa trasformata è

$$R(z) = \frac{zT}{(z-1)^2}$$

pertanto l'errore a regime è

$$e_r = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} R(z)[1 - W_d(z)] = T/(1 - p_d) \simeq 0.6$$

e cioè inferiore a 3 che è il massimo valore tollerato. Dunque potremmo utilizzare il controllore di funzione di trasferimento

$$C_d(z) := \frac{1}{\tilde{P}(z)} \frac{W_d(z)}{1 - W_d(z)}$$

dove $\tilde{P}(z)$ è la funzione di trasferimento discreta ottenuta da $P(s)$ per tenuta e campionamento sincroni:

$$\tilde{P}(z) := \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right] \simeq \frac{0.01z + 0.0086}{z^2 - 1.56z + 0.606}.$$

La corrispondente risposta al gradino è rappresentata in figura; si può vedere che il tempo di salita è leggermente superiore a quanto imposto dalle specifiche: per ovviare a ciò basterebbe diminuire un po' il valore di p_d avvicinando il polo all'origine del piano complesso. Notiamo inoltre che che la risposta va a regime in modo monotono (cosa, assai desiderabile) e con un tempo di assestamento molto minore di quanto accadesse negli altri casi.