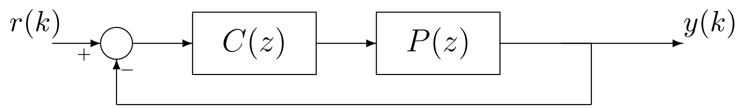
Esercizi sulla sintesi diretta

Esercizio 1. Si consideri l'interconnessione



Data la funzione di trasferimento discreta $P(z)$, si vuole utilizzare la sintesi diretta per determinare la funzione di trasferimento $C(z)$ del controllore in modo che il sistema a catena chiusa abbia un comportamento simile a quello relativo alla funzione di trasferimento continua

$$W(s) := \frac{\mathrm{e}^{-st_d}}{1+s\tau}.$$

Si assuma che $t_d = nT$ (ossia che il ritardo t_d sia un multiplo intero del periodo di campionamento T).

1. Si determini la funzione di trasferimento discreta $\tilde{W}(z)$ ottenuta da $W(s)$ per tenuta e campionamento. Si calcoli il ritardo nella risposta al gradino introdotto da $\tilde{W}(z)$.

2. Sia r il grado relativo di $P(z)$. Si determinino le condizioni che garantiscono un controllore causale e le condizioni che garantiscono che il controllore introduca esattamente un passo di ritardo.

3. Sia
$$P(z) = \frac{K}{(z+a)(z+b)}.$$
Si calcoli la funzione di trasferimento $C(z)$ del controllore e si determinino le condizioni che garantiscono stabilità interna dell'interconnessione.

Soluzione.

1. Si ha
$$\begin{aligned}\tilde{W}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-st_d}}{s(1+s\tau)}\right]\right]\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-snT}}{s(1+s\tau)}\right]\right]\right]\\ &= \frac{z-1}{z}z^{-n}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+s\tau)}\right]\right]\right] = \frac{1-\mathrm{e}^{-T/\tau}}{z^n(z-\mathrm{e}^{-T/\tau})}.\end{aligned}$$
Il ritardo nella risposta al gradino introdotto da $\tilde{W}(z)$ è pari al grado relativo di $\tilde{W}(z)$, ossia, $n+1$.

2. Il numero complessivo di passi di ritardo della funzione di trasferimento a catena chiusa è pari al numero di passi di ritardo della funzione di trasferimento $P(z)$ più il numero di passi di ritardo della funzione di trasferimento $C(z)$. Pertanto, il controllore è causale se e solo se $n+1 \geq r$ e il numero di passi di ritardo introdotti da $C(z)$ è pari a 1 se e solo se $n+1 = r+1$ ossia se e solo se $n = r$.

3. Si ha

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{P(z)} \frac{\tilde{W}(z)}{1-\tilde{W}(z)} \\ &= \frac{(z+a)(z+b)}{K} \frac{1-\mathrm{e}^{-T/\tau}}{z^{n+1} - z^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau}}. \end{aligned}$$

Per garantire stabilità interna dell'interconnessione si deve imporre che non ci siano cancellazioni "polo-zero" nella regione $\{z : \ |z| \geq 1\}$ fra $C(z)$ e $P(z)$. Risulta dunque conveniente considerare separatamente 5 casi.

(a) Se $|a| < 1$ e $|b| < 1$, allora l'interconnessione è sempre internamente stabile.

(b) Se $|a| < 1$ e $|b| \geq 1$, allora l'interconnessione è internamente stabile se e solo se $-b$ non è zero di $C(z)$, ossia se e solo se

$$(-b)^{n+1} - (-b)^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0.$$

(c) Se $|a| \geq 1$ e $|b| < 1$, allora l'interconnessione è internamente stabile se e solo se $-a$ non è zero di $C(z)$, ossia se e solo se

$$(-a)^{n+1} - (-a)^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0.$$

(d) Se $|a| \geq 1$ e $|b| \geq 1$ e $a \neq b$, allora l'interconnessione è internamente stabile se e solo se né $-a$ né $-b$ sono zeri di $C(z)$, ossia se e solo se

$$(-a)^{n+1} - (-a)^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0$$

e

$$(-b)^{n+1} - (-b)^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0.$$

(e) Se $|a| \geq 1$ e $a = b$, allora l'interconnessione è internamente stabile se e solo se $-a$ non è zero di $C(z)$, ossia se e solo se

$$(-a)^{n+1} - (-a)^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0$$

e

$$(n+1)(-a)^n - n(-a)^{n-1} \mathrm{e}^{-T/\tau} = 0.$$

Le condizioni appena trovate si possono rendere un po' più esplicite. Infatti, come prima cosa si noti che la seconda condizione del punto (e) implica

$$a = -\frac{n\mathrm{e}^{-T/\tau}}{n+1}$$

e quindi $|a| < 1$. Pertanto (poiché siamo nell'ipotesi $|a| > 1$) tale condizione non può mai essere soddisfatta. Quindi, se $|a| > 1$ e $a = b$, l'interconnessione non è mai internamente stabile.

Più in generale, è facile vedere che il polinomio

$$Q(z) := z^{n+1} - z^n \mathrm{e}^{-T/\tau} - 1 + \mathrm{e}^{-T/\tau}$$

si può fattorizzare nella forma

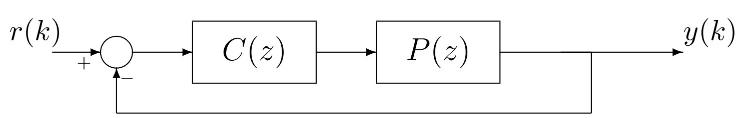
$$Q(z) = (z-1)(z^n + \alpha z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha z^{n-3} + \ldots + \alpha z + \alpha)$$

dove $\alpha := 1 - \mathrm{e}^{-T/\tau} \in (0,1)$. Inoltre, utilizzando induttivamente il criterio di Jury, si può dimostrare che per ogni n e per ogni $\alpha \in (0,1)$, il polinomio

$$Q_1(z) := z^n + \alpha z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha z^{n-3} + \ldots + \alpha z + \alpha$$

è di Schur. In conclusione, $Q(z)$ ha un solo zero nella regione $\{z : \ |z| \geq 1\}$ e dunque anche nel caso (d) l'interconnessione non è mai internamente stabile. Infine, nel caso (b), l'interconnessione è internamente stabile se e solo se $b = -1$ e nel caso (c) l'interconnessione è internamente stabile se e solo se $a = -1$.

Esercizio 2. Si consideri l'interconnessione



dove la funzione di trasferimento discreta $P(z)$ è data da

$$P(z) = \frac{K}{z+a}.$$

Si vuole utilizzare la sintesi diretta per determinare la funzione di trasferimento $C(z)$ del controllore in modo che il sistema a catena chiusa abbia una funzione di trasferimento $W(z)$ del secondo ordine con grado relativo 1 e guadagno unitario e che siano soddisfatte, in prima approssimazione, le specifiche relative al tempo di salita assegnato t_r^* e alla massima sovra-elongazione assegnata m_p^*. Si assuma che il periodo di campionamento sia $T = t_r^*/10$.

1. Si determini, in funzione dei parametri assegnati, la funzione di trasferimento discreta $W(z)$ evidenziando l'eventuale presenza di parametri liberi nella scelta di $W(z)$.

2. Senza calcolare $C(z)$, si dica se il controllore che realizza la $W(z)$ calcolata al punto precedente è causale e si determini il grado relativo della relativa funzione di trasferimento $C(z)$.

3. Si determini la funzione di trasferimento $C(z)$ del controllore.

4. Si determino le condizioni che garantiscono stabilità interna dell'interconnessione.

Soluzione.

1. Si tratta di determinare i poli di $W(z)$ (lo zero sarà invece un parametro libero). Per farlo, si traducono le specifiche nel domino della frequenza a tempo continuo determinando una coppia di poli complessi coniugati di una funzione di trasferimento a tempo continuo che abbia il comportamento desiderato. A questo scopo, si utilizzano le formule note

$$\omega_n^* = \frac{1.8}{t_r^*}, \qquad \xi^* = \frac{|\log(m_p^*)|}{\sqrt{(\log(m_p^*))^2 + \pi^2}}$$

che permettono di determinare la coppia di poli "continui"

$$p_{1/2}^{cont} = -\omega_n^* \left(\xi^* \pm \sqrt{(\xi^*)^2 - 1}\right).$$

Si possono ora considerare i corrispondenti poli della funzione di trasferimento discreta:

$$p_{1/2}^{disc} = \mathrm{e}^{p_{1/2}^{cont} T}.$$

Dunque $W(z)$ dovrà avere la forma

$$W(z) = \frac{K_w(z - z_1)}{(z - p_1^{disc})(z - p_2^{disc})}$$

dove K_w deve essere scelto in modo che W abbia guadagno unitario ossia $W(1) = 1$. Dunque,

$$K_w = \frac{(1 - p_1^{disc})(1 - p_2^{disc})}{(1 - z_1)}.$$

Infine, z_1 è un parametro libero.

2. Poiché sia $P(z)$ sia $W(z)$ hanno grado relativo pari a 1, il controllore sarà causale e $C(z)$ avrà grado relativo nullo.

3. Si ha

$$
\begin{aligned}
C(z) &= \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1-W(z)} \\
&= \frac{(z+a)}{K} \frac{K_w(z-z_1)}{(z-p_1^{disc})(z-p_2^{disc})-K_w(z-z_1)}
\end{aligned}
$$

che ha grado relativo nullo come previsto.

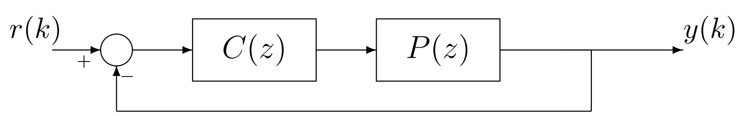
4. Per garantire stabilità interna dell'interconnessione si deve imporre che non ci siano cancellazioni "polo-zero" nella regione $\{z : |z| \geq 1\}$ fra $C(z)$ e $P(z)$. Pertanto, se $|a| < 1$, allora l'interconnessione è sempre internamente stabile. Se invece $|a| > 1$, possiamo sfruttare il grado di libertà relativo allo zero in z_1 per eliminare lo zero in $-a$ di $C(z)$ che provocherebbe la perdita di stabilità interna dell'interconnessione. A questo scopo basta imporre la condizione

$$(-a-p_1^{disc})(-a-p_2^{disc})-K_w(-a-z_1)=0$$

ossia

$$z_1 = -\frac{1}{K_w}[(-a-p_1^{disc})(-a-p_2^{disc})+K_w a].$$

Esercizio 3. Si consideri l'interconnessione



dove la funzione di trasferimento discreta $P(z)$ è data da

$$P(z) = \frac{(z-1/2)^2}{z(z+1)}.$$

Si determini la funzione di trasferimento $C(z)$ del controllore in modo che siano soddisfatte contemporaneamente le due condizioni seguenti:
1. Il sistema a catena chiusa abbia una funzione di trasferimento $W(z)$ con un polo dominante in $z = 1/2$ e tutti gli altri poli in $z = 0$.
2. Il sistema a catena chiusa insegua con errore asintoticamente nullo ingressi del tipo

$$r(k) = A\sin(2k), \qquad 0 < A < 1.$$

3. L'interconnessione sia internamente stabile.

Soluzione. Per la specifica 2. (relativa al comportamento di regime permanente), osservo che la trasformata di $r(k)$ è

$$R(z) = \frac{z\sin(2)}{z^2 - 2\cos(2)z + 1}$$

che ha due poli complessi coniugati sulla circonferenza unitaria in $p_{1/2} = \mathrm{e}^{\pm j2}$. Per il principio del modello interno, poiché $p_{1/2}$ non sono poli di $P(z)$, devo imporre che siano poli di $C(z)$, ossia impongo

$$C(z) = \frac{1}{z^2 - 2\cos(2)z + 1} C_1(z).$$

Posso includere il termine $\frac{1}{z^2-2\cos(2)z+1}$ in $P(z)$ e determinare $C_1(z)$ con il metodo dell'equazione diofantea. Nel dettaglio, definisco

$$\tilde{P}(z) = \frac{1}{z^2 - 2\cos(2)z + 1} P(z) = \frac{N_P(z)}{D_{\tilde{P}}(z)},$$

dove

$$N_P(z) := (z - 1/2)^2 = z^2 - z + 1/4,$$

e

$$D_{\tilde{P}}(z) = z(z+1)(z^2 - 2\cos(2)z + 1) = z^4 + az^3 + az^2 + z,$$

con

$$a := 1 - 2\cos(2).$$

La funzione di trasferimento $\tilde{P}(z)$ è strettamente propria e $n = \deg(D_{\tilde{P}}(z)) = 4$. Quindi, pongo

$$C_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

con

$$X(z) = x_3z^3 + x_2z^2 + x_1z + x_0, \qquad x_3 \neq 0,$$

polinomio di grado 3 e

$$Y(z) = y_3z^3 + y_2z^2 + y_1z + y_0$$

polinomio di grado al più 3. Per determinare i parametri x_i e y_i devo imporre

$$D_{\tilde{P}}(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D_W(z)$$

dove $D_W(z)$ è un polinomio di grado 7 con uno zero in $1/2$ e uno (di molteplicità pari a 6) nell'origine; ossia

$$D_W(z) = z^6(z - 1/2) = z^7 - (1/2)z^6.$$

L'equazione

$$D_{\tilde{P}}(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D_W(z)$$

si può scrivere come un sistema lineare in 8 equazioni e 8 incognite della forma

$$Ax = b$$

con

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a & 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 1/4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$x := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.3323 \\ 1.5948 \\ -0.3393 \\ 0.8464 \\ 1.5370 \\ 1.3573 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto,

$$C_1(z) = \frac{0.8464z^3 + 1.5370z^2 + 1.3573z}{z^3 - 2.3323z^2 + 1.5948z - 0.3393}$$

e

$$C(z) = \frac{1}{z^2 - 2\cos(2)z + 1} C_1(z) = \frac{0.8464z^3 + 1.5370z^2 + 1.3573z}{(z^3 - 2.3323z^2 + 1.5948z - 0.3393)(z^2 - 2\cos(2)z + 1)}$$

È ora opportuno fare alcune osservazioni.

1. Nell'equazione

$$D_{\tilde{P}}(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D_W(z)$$

sia il polinomio $D_W(z)$ sia il polinomio $D_{\tilde{P}}(z)$ — e, quindi, anche il polinomio $D_{\tilde{P}}(z)X(z)$, qualunque sia $X(z)$ — hanno uno zero nell'origine. Pertanto, anche $N_P(z)Y(z) = D_W(z) - D_{\tilde{P}}(z)X(z)$ deve avere uno zero nell'origine; ma, poiché $N_P(z)$ non ha zeri nell'origine, certamente $Y(z)$ dovrà avere uno zero nell'origine, ossia y_0 dovrà essere nullo, cosa che abbiamo effettivamente trovato risolvendo l'equazione. Potevamo però semplificare fin da subito il problema osservando che si doveva trovare $y_0 = 0$ e considerando quindi

$$Y(z) = y_3 z^3 + y_2 z^2 + y_1 z.$$

In tal modo si ottiene un sistema di 7 equazioni e 7 incognite.

2. In modo analogo a quanto fatto nel punto precedente, si può osservare che nell'equazione

$$D_{\tilde{P}}(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D_W(z)$$

i polinomi $D_W(z)$ e $D_{\tilde{P}}(z)X(z)$ hanno grado 7 (infatti sappiamo che $X(z)$ ha grado esattamente pari a 3). Invece, il polinomio $N_P(z)Y(z)$ ha grado minore o uguale a 5. Pertanto, il polinomio $N_P(z)Y(z)$ non ha alcuna influenza nel termine di grado massimo che quindi può essere ottenuto osservando che, poiché sia $D_W(z)$ sia $D_{\tilde{P}}(z)$ sono monici, anche $X(z)$ deve essere monico, ossia, $x_3 = 1$. Potevamo perciò semplificare fin da subito il problema ponendo $x_3 = 1$ e considerando quindi

$$X(z) = z^3 + x_2 z^2 + x_1 z + x_0.$$

In tal modo si riduce ulteriormente di una equazione e una incognita il problema.

3. Il polinomio $Y(z) = y_3 z^3 + y_2 z^2 + y_1 z$, e quindi la funzione di trasferimento $C(z)$, ha uno zero nell'origine che si cancella con il polo nell'origine di $P(z)$. Sappiamo dalla teoria che questa cancellazione non può compromettere la stabilità interna dell'interconnessione (perché abbiamo usato la tecnica dell'equazione diofantea). In effetti, sappiamo che questa cancellazione zero-polo non è critica perchè lo zero e il polo che si cancellano sono nell'origine che appartiene alla regione "stabile". Se avessimo invece trovato una cancellazione zero-polo nella regione "instabile" $\{z : \ |z| \geq 1\}$ dovevamo concludere che c'era stato un errore nei calcoli !

4. Il controllore $C(z)$ che abbiamo calcolato ha grado relativo pari a 2 e quindi introduce 2 passi di ritardo. Se avessimo voluto un controllore che non introduce ritardo o che introduce un solo passo di ritardo avremmo potuto aggiungere uno zero (rispettivamente doppio o semplice) nell'origine ossia considerare il controllore

$$C(z) = C_2(z)C_1(z)$$

con

$$C_2(z) := \frac{z^2}{z^2 - 2\cos(2)z + 1}$$

oppure, rispettivamente,

$$C_2(z) := \frac{z}{z^2 - 2\cos(2)z + 1}.$$

A questo punto si tratta di incorporare $C_2(z)$ con $P(z)$ e ripetere il ragionamento fatto in precedenza. Si noti però che in questo caso si può semplificare fin da subito le zero nell'origine aggiunto con il polo nell'origine di $P(z)$ (si noti che tale semplificazione è nella regione stabile e quindi non compromette la stabilità interna). Più nel dettaglio, consderiamo i due casi:
A. Nel caso di $C_2(z) := \frac{z}{z^2-2\cos(2)z+1}$ si considera

$$\tilde{P}(z) = C_2(z)P(z) = \frac{N_{\tilde{P}}(z)}{D_{\tilde{P}}(z)},$$

dove

$$D_{\tilde{P}}(z) = (1/z)z(z+1)(z^2 - 2\cos(2)z + 1) = z^3 + az^2 + az + 1,$$

con $a := 1 - 2\cos(2)$ e

$$N_{\tilde{P}}(z) = N_P(z) := (z - 1/2)^2 = z^2 - z + 1/4$$

A questo punto si può procedere come prima tenendo conto però che il grado di $D_{\tilde{P}}(z)$ questa volta è pari a 3 e quindi $X(z)$ e $Y(z)$ sono polinomi di secondo grado:

$$C_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

con

$$X(z) = x_2z^2 + x_1z + x_0, \qquad x_2 \neq 0,$$

e

$$Y(z) = y_2z^2 + y_1z + y_0$$

Per determinare i parametri x_i e y_i devo imporre come prima

$$D_{\tilde{P}}(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D'_W(z)$$

dove $D'_W(z)$ è un polinomio di grado 5 con uno zero in 1/2 e uno (di molteplicità pari a 4) nell'origine; ossia

$$D_W(z) = z^4(z - 1/2) = z^5 - (1/2)z^4.$$

B. Nel caso di $C_2(z) := \frac{z^2}{z^2-2\cos(2)z+1}$ si considera

$$\tilde{P}(z) = C_2(z)P(z) = \frac{N_{\tilde{P}}(z)}{D_{\tilde{P}}(z)},$$

dove

$$D_{\tilde{P}}(z) = (1/z)z(z+1)(z^2 - 2\cos(2)z + 1) = z^3 + az^2 + az + 1,$$

con $a := 1 - 2\cos(2)$ e

$$N_{\tilde{P}}(z) := z(z - 1/2)^2 = z^3 - z^2 + (1/4)z.$$

A questo punto si può procedere come nel caso A. Si noti però che in questo caso $\tilde{P}(z)$ ha grado relativo nullo e quindi non c'è la garanzia a priori che il controllore che si otterrà sia proprio. Possiamo comunque svolgere i calcoli sapendo che, eccetto che per casi particolarmente sfortunati, $C(z)$ sarà propria. Si noti inoltre che, in questo caso, si può ricorrere ad un ragionamento simile a quello svolto nell'osservazione 1. precedente per argomentare a priori che $x_0 = 0$ e quindi porre

$$X(z) = x_2 z^2 + x_1 z,$$

e ottenere un sistema di sole 5 equazioni e 5 incognite. Tali equazioni sono della forma

$$Ax = b$$

con

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & 1/4 & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$x := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ -0.0250 \\ 0.9500 \\ 0.3833 \\ 0.1000 \end{bmatrix}.$$

Si ha, pertanto,

$$C(z) = C_2(z)C_1(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2\cos(2)z + 1} \frac{0.95z^2 + 0.3833z + 0.1}{0.0500z^2 - 0.025z}$$

ossia

$$C(z) = \frac{0.95z^3 + 0.3833z^2 + 0.1z}{0.05z^3 + 0.0166z^2 + 0.0292z - 0.025}$$

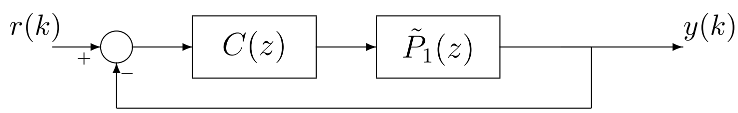
che è una funzione di trasferimento propria (cosa di cui a priori non avevamo garanzia).

Esercizio 4. Si consideri la funzione di trasferimento a tempo continuo

$$P_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

1. Si fissi il periodo di campionamento T in modo che il ritardo intrinseco del sistema a tempo discreto di funzione di trasferimento $\tilde{P}_1(z)$, ottenuto per tenuta e campionamento

(sincroni) da $P_1(s)$, sia pari a 0.1 secondi.
2. Si progetti la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore digitale in modo che il relativo sistema a catena rappresentato in figura insegua con errore che si annulla in un numero finito di passi un ingresso a gradino.



Soluzione.

1. La funzione di trasferimento $P_1(s)$ ha grado relativo pari a 2; pertanto la corrispondente funzione di trasferimento $\tilde{P}_1(z)$ avrà grado relativo pari a 1 salvo il caso eccezionale in cui T coincide esattamente con un tempo $\bar{t}$ in cui la risposta al gradino del sistema di funzione di trasferimento $P_1(s)$ si annulla. Assumiamo dunque (come ipotesi di progetto) che il grado relativo di $\tilde{P}_1(z)$ sia effettivamente pari a 1, salvo verificare questo fatto a posteriori. Se il grado relativo è pari a 1, il ritardo intrinseco del sistema è pari a T e quindi si tratta di imporre

$$T = 0.1 \quad \text{secondi}$$

Possiamo ria verificare che il grado relativo sia effettivamente pari a 1 calcolando $\tilde{P}_1(z)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)(s-2)}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{(s-1)}+\frac{C}{(s-2)}\right]\right]\right]
\end{aligned}$$

con

$$A := P_1(0) = 1/2$$

$$B := \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{P_1(s)}{s} = -1$$

$$C := \lim_{s\to 2}(s-2)\frac{P_1(s)}{s} = 1/2.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[A + B\mathrm{e}^{t} + C\mathrm{e}^{2t}\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[A\delta_{-1}(k) + Bp^k + C(p^2)^k\right]
\end{aligned}$$

con

$$p := \mathrm{e}^T = \mathrm{e}^{0.1} \simeq 1.105.$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1(z) &= A + B\frac{z-1}{z-p} + C\frac{z-1}{z-p^2} \\ &= \frac{(\frac{1}{2}-p+\frac{1}{2}p^2)z + p(\frac{1}{2}-p+\frac{1}{2}p^2)}{z^2-(p+p^2)z+p^3}\end{aligned}$$

e quindi possiamo confermare che il grado relativo di $\tilde{P}_1(z)$ è pari a 1: infatti

$$0 \neq \frac{1}{2} - p + \frac{1}{2}p^2 \simeq 0.0055.$$

Si invita il lettore a considerare la seguente domanda teorica: a questo punto possiamo dire con sicurezza che il valore trovato di T è l'unico che risolve il problema ?

2. Per avere errore a regime nullo in risposta al gradino, $C(z)$ deve avere un polo in $z = 1$. Incorporo, tale polo (assieme a uno zero nell'origine per non aumentare il ritardo) in $\tilde{P}_1(z)$ e considero

$$P_2(z) := \frac{z}{z-1}\tilde{P}_1(z) = \frac{N_{P_2}(z)}{D_{P_2}(z)} = \frac{n_2z^2 + n_1z}{z^3 + d_2z^2 + d_1z + d_0},$$

dove

$$\begin{cases} n_1 := p(\frac{1}{2} - p + \frac{1}{2}p^2) \simeq 0.0061 \\ n_2 := \frac{1}{2} - p + \frac{1}{2}p^2 \simeq 0.0055 \\ d_2 := -p - p^2 - 1 \simeq -3.33 \\ d_1 := p + p^2 + p^3 \simeq 3.68 \\ d_0 := -p^3 \simeq -1.35 \end{cases}$$

Per avere errore nullo in un numero finito di passi la funzione di trasferimento a catena chiusa deve avere una dinamica di tipo *dead-beat* ossia la $W(z)$ a catena chiusa deve avere solo poli nell'origine. Poiché $P_2(z)$ ha zeri e poli a modulo maggiore di 1, uso il metodo dell'equazione diofantea per progettare il controllore. Devo progettare

$$C_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{y_2z^2 + y_1z + y_0}{x_2z^2 + x_1z + x_0}$$

tale che

$$X(z)D_{P_2}(z) + Y(z)N_{P_2}(z) = z^5$$

ossia devo calcolare i parametri x_i e y_i, $i = 0, 1, 2$, in modo che sia soddisfatta la relazione

$$Ax = b$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 1 & n_1 & n_2 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & d_0 & d_1 & 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con semplici passaggi algebrici, si ottiene

$$x := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 0.97 \\ 0 \\ 426.6 \\ -554.3 \\ 213.6 \end{bmatrix}$$

In conclusione

$$C(z) = \frac{z}{z-1}\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{426.6z^2 - 554.3z + 213.6}{(z-1)(z+0.97)}$$

e

$$W(z) = \frac{2.4z^3 - 0.46z^2 - 2.2z + 1.3}{z^4}.$$