

Appunti del corso di
CONTROLLO DIGITALE

PROF. FRANCESCO TICOZZI

@ Department of Information Engineering (DEI) – UNIPd

6 marzo 2012 – 7 giugno 2012

INDICE

1	Introduzione	3
1.1	Presentazione del corso di Controllo Digitale	3
1.2	Cenni Storici	4
1.3	Vantaggi e Svantaggi del Controllo Digitale	4
2	Segnali, Sistemi e Trasformate a Tempo Discreto	7
2.1	Approccio I/O all'analisi di sistemi LTI a tempo discreto	7
2.2	Segnali a tempo discreto	7
2.3	Sistemi lineari SISO a tempo discreto	8
2.4	Trasformata \mathcal{Z}	10
2.5	Proprietà della trasformata \mathcal{Z}	12
3	Elementi di Teoria del Campionamento	26
3.1	Campionamento di Segnali per Modulazione d'Ampiezza	26
3.2	Campionamento e Relazione tra le Trasformate	28
3.3	Corrispondenza tra i piani s e z	30
3.4	Filtri Anti-Aliasing	31
3.5	Effetto della quantizzazione: cenni	34
4	Analisi di sistemi a tempo discreto	34
4.1	Richiami di Stabilità dei Sistemi a Tempo Discreto	37
4.2	Metodi per determinare la BIBO stabilità	38
5	Traduzione ed Analisi di Interconnessioni Continuo/Discreto	41
5.1	Conversione di sistemi I/O	42
5.2	Stabilità delle interconnessioni	46
6	Funzioni di risposta armonica: cenni	52
6.1	Diagramma polare o di Nyquist	52
7	Problema del controllo e fasi di progettazione	54
7.1	Specifiche sul comportamento a regime: Inseguimento	54
7.2	Specifiche sul regime transitorio	57
7.3	Traduzione delle specifiche per sistemi del II ordine (richiami)	59
7.4	Progettazione del sistema di controllo	61

INDICE

8	Sintesi di controllori digitali:	
	Metodi per emulazione	70
8.1	Introduzione	70
8.2	Traduzione in digitale di progetti $C(s)$ analogici (emulazione)	71
8.3	Regolatori P.I.D.	79
8.4	Sintesi con il margine di fase: richiami	81
8.5	Progettazione di reti elementari	83
8.6	Progettazione di P.I.D. - P.I. - P.D. con il margine di fase	85
9	Sintesi di controllori digitali:	
	Metodi di Sintesi Diretta	88
9.1	Sintesi diretta nel discreto "per cancellazione"	88
9.2	Metodo di Dahlin	91
9.3	Scelta di $W(z)$ tramite poli dominanti	91
9.4	Un'interpretazione alternativa della sintesi diretta	93
9.5	Compensatore di ritardo di Smith	94
9.6	Richiami di equazioni Diofantee	97
9.7	Sintesi con Equazione Diofantea	98
9.8	Sintesi di Controllori Digitali:	
	Inseguimento Deadbeat	101
9.9	Controllo deadbeat per P ottenuta per tenuta+campionamento	107
A	Trasformate \mathcal{Z} notevoli	111
B	Trasformate \mathcal{L} notevoli	112
C	Richiami di controllo a tempo continuo	113
C.1	Criterio di Routh-Hurwitz	113
C.2	Luogo delle radici	114
C.3	Diagramma di Nyquist	115

1 INTRODUZIONE

1.1 Presentazione del corso di Controllo Digitale

Lezione 1 (2 ore)
6 marzo 2013

Al giorno d'oggi la maggior parte dei sistemi di controllo, specialmente in ambito industriale, sono implementati impiegando dispositivi digitali (μP , DSP, FPGA, *etc.*) che utilizzano ed elaborano segnali campionati e quantizzati (vedi Fig.1). È perciò fondamentale per l'ingegnere del controllo avere una profonda comprensione del funzionamento di sistemi di controllo digitale. Questo corso sarà dedicato all'introduzione e all'utilizzo delle fondamentali tecniche di progettazione di sistemi di controllo digitale, e degli strumenti matematici necessari alla loro comprensione.

Tali sistemi sono talvolta erroneamente considerati semplicemente come approssimazione di sistemi di controllo analogici (elettronici, idraulici, *etc.*): questo è un approccio insoddisfacente perché impedisce di sfruttare al meglio le potenzialità proprie delle implementazioni digitali. Vedremo durante questo corso che quando il progetto del controllore digitale è ottenuto per approssimazione (o *emulazione*) del progetto a tempo continuo nel caso migliore i risultati, nel caso migliore, si avvicinano a quelli ottenuti con sistemi analogici. Quando il controllore invece è progettato direttamente nel digitale, le sue prestazioni possono anche superare quelle dei controllori analogici. Esistono inoltre fenomeni che si verificano solo a tempo discreto e che non hanno un corrispettivo a tempo continuo (si pensi ai sistemi a risposta impulsiva finita, FIR), e che possono venire sfruttati a vantaggio delle prestazioni del sistema controllato.

Alla luce di queste osservazioni, è quindi naturale che il corso di *Controllo Digitale* si collochi a mezza via tra corsi di natura prettamente metodologica e corsi applicativi. La prima parte del corso sarà dedicata allo studio delle tecniche matematiche e di analisi per *segnali e sistemi a tempo discreto*, seguendo il percorso già visto nei corsi di *Controlli Automatici*. In particolare si introdurranno metodi alle trasformate (nel discreto si impiegherà la trasformata \mathcal{Z}) e analisi modale nel dominio della variabile complessa. Particolare attenzione verrà posta nello studiare l'effetto del campionamento non solo sui segnali, ma anche nell'interconnessione di sistemi. A seguire verranno sviluppate tecniche di traduzione dal continuo al discreto di progetti di controllori analogici, accompagnate da tecniche di progettazione direttamente nel discreto. Le tecniche di controllo proposte includeranno non solo problemi di regolazione, ma anche di inseguimento asintotico o in tempo finito (tramite controllo *dead-beat*).

1.2 Cenni Storici

Lo sviluppo del controllo digitale è abbastanza recente e, dal punto di vista storico, è stato motivato dalla ricerca di sistemi di controllo adatti alla regolazione di impianti industriali complessi. La rapida diffusione a pressochè ogni applicazione di controllo moderno iniziò con lo sviluppo dei microprocessori.

I fondamentali passi avanti nella teoria che hanno permesso questa rivoluzione digitale anche nel controllo sono principalmente:

- *Teorema del campionamento*: dapprima introdotto da Nyquist per soli segnali sinusoidali poi enunciato nella sua forma completa da Shannon nel 1949.
- *Equazioni alle differenze*: un rinnovato interesse si ebbe verso gli anni '50-60 principalmente come strumento utile per applicazioni legate al campo del controllo.
- *Trasformata \mathcal{Z}* : concetto già noto a Laplace, venne ripreso da Hurewicz nel 1947. In seguito Ragazzini e Zadeh, ricercatori della Columbia University, coniarono il termine trasformata \mathcal{Z} (1952). Jury contribuì considerevolmente allo sviluppo della nuova teoria a cominciare dalla sua tesi di dottorato (1953).
- Dagli anni '60 la teoria del controllo digitale ebbe una rapida evoluzione grazie agli studi sull'*approccio in spazio di stato* formulato per sistemi a tempo discreto, allo sviluppo della *teoria del controllo ottimo e stocastico*, alla *teoria algebrica applicata a sistemi lineari* e più recentemente alle tematiche legate alla *teoria dell'identificazione* e del *controllo adattivo*.

Per maggiori informazioni si vedano le *slide* presentate in aula e il primo capitolo di [?].

1.3 Vantaggi e Svantaggi del Controllo Digitale

I principali **vantaggi** legati all'impiego di sistemi controllo digitale includono:

1. A livello *hardware*

- flessibilità (lo stesso tipo di controllore può interfacciarsi a sistemi fisici diversi, anche in contemporanea);
- standardizzazione delle componenti e loro robustezza;
- affidabilità;
- invarianza nel tempo (*aging* dei componenti trascurabile);
- minore effetto del rumore;
- minori dimensioni e minor costo (per effetto della produzione in serie);
- facilità di manutenzione e sostituzione;

2. A livello di progettazione e *software*

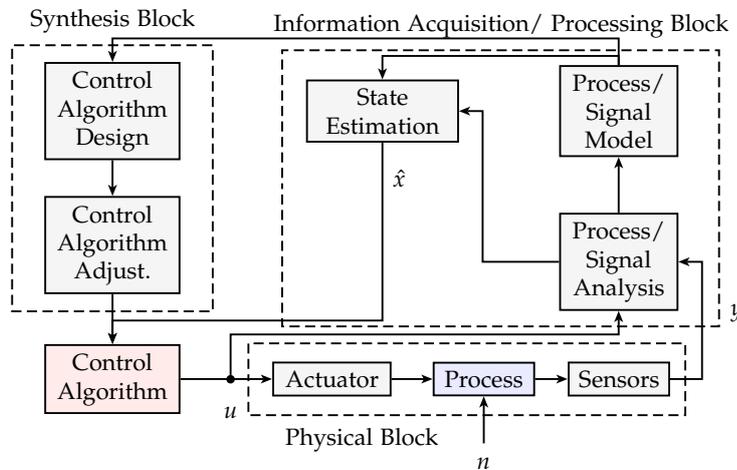


Figura 1: Potenziale architettura di un sistema di controllo digitale, che può includere blocchi di elaborazione del segnale, identificazione e adattamento. [?]

- migliori prestazioni ottenibili dal sistema controllato;
- algoritmi complessi più facili da implementare;
- possibilità di utilizzo di sistemi a risposta impulsiva finita (*Finite Impulse Response – FIR*);
- facilità nel generare segnali di riferimento;
- riconfigurabilità;
- scheduling delle operazioni;
- monitoraggio e acquisizione dati più semplice;
- possibilità di includere una interfaccia utente.

D'altra parte vi sono anche alcuni **svantaggi**, di cui è cruciale tener conto in fase di progettazione e scelta dell'implementazione, legati:

1. All'ambiente e alla tecnologia

- i dispositivi digitali per lavorare richiedono potenza elettrica;
- tali dispositivi non lavorano in ambienti estremi (alta/bassa temperatura, pressione, radiazione, *etc.*);

2. All'elaborazione digitale dei segnali

- la quantizzazione introduce non linearità, e potenzialmente cicli limite ed altri effetti indesiderati o dannosi;
- vi possono essere problemi legati al campionamento (*e.g.* aliasing);
- dispositivi digitali in genere presentano ritardi in fase di acquisizione e di elaborazione di segnali;
- vi sono difficoltà nell'eseguire l'elaborazione real-time per segnali "veloci";

3. Ad aspetti legati alla messa e mantenimento in opera

- il collaudo può risultare difficile;
- lo stato dell'arte della tecnologia HW cambia velocemente;
- lo sviluppo di SW (dedicato) richiede risorse significative (in termini di tempi e costi);
- tali dispositivi richiedono la scelta e lo sviluppo di protocolli e linguaggi di programmazione specifici;
- vi sono difficoltà nell'addestramento di personale abituato a lavorare con sistemi analogici.

2 SEGNALI, SISTEMI E TRASFORMATE A TEMPO DISCRETO

2.1 Approccio I/O all'analisi di sistemi LTI a tempo discreto

Lezione 2 (2 ore)
8 marzo 2013

Nei corsi di Controlli Automatici (o affini) sono state studiate metodologie di analisi e sintesi di sistemi e interconnessioni di sistemi a *tempo continuo*. In particolare si è visto che il comportamento ingresso-uscita (*input-output*, I/O) dei sistemi può essere convenientemente studiato in termini della trasformata (unilatera) di Laplace. Il successo dell'analisi I/O è determinato dalle seguenti ipotesi sui modelli e le loro conseguenze:

1. Si sceglie di considerare sistemi **lineari tempo-invarianti, causali** e a parametri concentrati che sono descritti da equazioni differenziali ordinarie (ODE nell'acronimo dall'inglese). Esse sono non omogenee se vi è la presenza di ingressi;
2. L'analisi e la soluzione di tali ODE è semplificata dall'utilizzo della Trasformata di Laplace unilatera;
3. La linearità del sistema garantisce che la soluzione possa essere scomposta in una risposta (o evoluzione) libera, che dipende solo dalle condizioni iniziali delle variabili di interesse, e una risposta forzata, corrispondente alla risposta agli ingressi con condizioni iniziali nulle;
4. Il comportamento I/O, ovvero la dipendenza della risposta forzata dagli ingressi, si può determinare considerando la Funzione di Trasferimento – F.d.T., d'ora in avanti – del sistema. Per la classe di sistemi considerati la F.d.T. risulta una funzione razionale fratta nella variabile complessa s .
5. Si ricorre alla analisi modale per caratterizzare e studiare le proprietà di stabilità e le prestazioni del sistema. Ciò corrisponde all'analisi dei poli della F.d.T..

La prima parte del corso è dedicata all'introduzione degli elementi principali necessari ad un'analoga trattazione per segnali e sistemi a *tempo discreto* o *campionati*.

2.2 Segnali a tempo discreto

2.1 DEFINIZIONE. Un segnale $x(k)$ a tempo discreto è una sequenza di dati o campioni, *i.e.* una funzione $x : \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $k \mapsto x(k)$.¹

Alcune classi rilevanti di segnali sono:

1. *Segnali limitati:* $\exists M < +\infty$, t.c. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|x(k)| \leq M$. Tali segnali generano lo spazio vettoriale ℓ_∞ dotato della norma $\|x\|_\infty := \inf M = \sup_k |x(k)|$. Tale spazio è quindi normato e completo (tutte le successioni di Cauchy convergono) e quindi è uno spazio di Banach.

¹con \mathbb{Z}_+ si indica l'insieme degli interi non negativi (quindi 0 è compreso).

2. *Segnali a energia finita*: $\sum_k |x(k)|^2 < \infty$. Lo spazio vettoriale generato si denota con ℓ_2 , spazio delle successioni a quadrato sommabile. Esso è naturalmente dotato di prodotto interno:

$$\langle x, y \rangle = \sum_k x^*(k)y(k),$$

ed è completo (tutte le successioni di Cauchy convergono) nella norma indotta dal prodotto interno $\|x\|_2 = (\sum_k |x(k)|^2)^{1/2}$. È quindi uno spazio di Hilbert.

3. *Segnali modulo sommabili*: $\sum_k |x(k)| < \infty$. A tale classe è associato lo spazio vettoriale ℓ_1 .

2.2 OSSERVAZIONE. In generale, lo spazio vettoriale ℓ_p delle successioni modulo- p sommabili è dotato della norma $\|x\|_p := (\sum_k |x(k)|^p)^{1/p}$ e vale $\ell_p \subsetneq \ell_s$ per $p < s$.

2.3 Sistemi lineari SISO a tempo discreto

Siano $\{u(k)\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ e $\{y(k)\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ i campioni del segnale d'ingresso e di uscita del sistema, rispettivamente. Vogliamo trovare una relazione **lineare** tra la "storia" dell'ingresso $u(\cdot)$ e quella dell'uscita $y(\cdot)$. Scriviamo pertanto

$$(2.1) \quad y(k) = \sum_{j \neq k} a_j(k)y(j) + \sum_l b_l(k)u(l).$$

Se ci limitiamo ai sistemi causali, in cui l'uscita del sistema dipende solamente dalla "storia" passata ed, eventualmente, presente dell'ingresso, la relazione (2.1) diviene

$$(2.2) \quad y(k) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} a_j(k)y(j) + \sum_{l=-\infty}^k b_l(k)u(l).$$

Nella pratica gli algoritmi di elaborazione di segnali digitali hanno capacità di memoria limitate. Con quest'ultima restrizione l'uscita all'istante (discreto) k dipende solo dagli ultimi n campioni dell'uscita stessa e dagli ultimi $m + 1$ campioni dell'ingresso (dove n e m sono due numeri interi e per l'ingresso si considerano $m + 1$ campioni per tenere conto anche del campione "presente", ossia corrispondente all'istante k). La (2.2) viene in tal caso sostituita da una equazione alle differenze del tipo

$$(2.3) \quad y(k) = \sum_{j=k-n}^{k-1} a_j(k)y(j) + \sum_{l=k-m}^k b_l(k)u(l).$$

Infine, se il sistema si può ritenere invariante nel tempo ossia se il suo comportamento è invariante rispetto a traslazioni temporali, i coefficienti $a_j(k)$ dipendono solo dalla differenza $k - j$ e i coefficienti $b_l(k)$ dipendono solo dalla

differenza $k - l$ cosicché si ha

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \sum_{j=k-n}^{k-1} a_{k-j}y(j) + \sum_{l=k-m}^k b_{k-l}u(l) \\
 (2.4) \quad &= \sum_{j=1}^n a_j y(k-j) + \sum_{l=0}^m b_l u(k-l).
 \end{aligned}$$

L'analisi I/O verrà sviluppata per sistemi in questa forma. Sistemi di questo tipo si ottengono per discretizzazione di modelli continui che descrivono, per esempio, sistemi meccanici o elettromagnetici classici. Vedremo, tuttavia, che ci sono sistemi discreti del tipo descritto dalla (2.4) che *non* possono essere ottenuti per discretizzazione di un sistema continuo lineare tempo invariante e di dimensione finita.

2.3 ESEMPIO. Vediamo come “discretizzare” la seguente equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti

$$(2.5) \quad a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) = b_0 u(t).$$

Sia T il periodo di campionamento; se i segnali $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ sono sufficientemente “lisci” (precisamente, di classe almeno C^n dove n è l'ordine della ODE cosicché, in questo caso, $n = 2$) si può approssimare per T piccoli l'operatore differenziale $\frac{d}{dt}$ con l'operatore rapporto incrementale $\frac{\Delta}{T}$. L'operatore di “differenza discreta” Δ applicato alla funzione f è definito dalla

$$(2.6) \quad \Delta f(t) = f(t) - f(t - T).$$

Definendo i segnali discreti

$$(2.7) \quad \tilde{y}(k) := y(kT), \quad \tilde{u}(k) := u(kT) \quad k \in \mathbb{Z},$$

con un po' d'algebra otteniamo

$$(2.8) \quad \left[\frac{d}{dt} y(t) \right]_{|t=kT} \sim \left[\frac{\Delta}{T} y(t) \right]_{|t=kT} = \frac{\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)}{T}$$

$$(2.9) \quad \left[\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right]_{|t=kT} \sim \left[\frac{\Delta^2}{T^2} y(t) \right]_{|t=kT} = \frac{\tilde{y}(k) - 2\tilde{y}(k-1) + \tilde{y}(k-2)}{T^2}.$$

Che sostituite nella (2.5) ne danno la versione discretizzata seguente

$$(2.10) \quad \tilde{a}_0 \tilde{y}(k) + \tilde{a}_1 \tilde{y}(k-1) + \tilde{a}_2 \tilde{y}(k-2) = b_0 \tilde{u}(k),$$

avendo definito $\tilde{a}_0 := \frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T}$, $\tilde{a}_1 := -\frac{2a_2}{T^2} - \frac{a_1}{T}$, $\tilde{a}_2 := \frac{a_2}{T^2}$. Si noti come i coefficienti del sistema discreto, e quindi anche effetti di mal condizionamento numerico, dipendano esplicitamente dal periodo di campionamento T . \diamond

2.4 Trasformata \mathcal{Z} .

La trasformata \mathcal{Z} gioca il ruolo della Trasformata di Laplace per i segnali a tempo discreto. Essa mappa sequenze di \mathbb{Z}_+ in funzioni nella variabile $z \in \mathbb{C}$.

2.4 DEFINIZIONE. Sia $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $k \mapsto g(k)$ un segnale a tempo discreto. Definiamo Trasformata \mathcal{Z} (unilatera)² di f la serie nella variabile complessa z

$$(2.11) \quad \mathcal{Z}[f] = F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k},$$

2.5 ESEMPIO. Sia $f(k)$ l'impulso discreto (o delta di Kronecker)

$$(2.12) \quad f(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La trasformata \mathcal{Z} di $\delta(k)$ è pari a

$$(2.13) \quad \mathcal{Z}[\delta] = 1.$$

◇

Occupiamoci ora della convergenza della trasformata \mathcal{Z} definita in (2.11). Vale il seguente risultato:

2.6 TEOREMA. Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)(z - z_0)^{-k}$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ converge assolutamente all'esterno di un cerchio di raggio ρ_0 centrato in z_0 e diverge al suo interno. Il "raggio di convergenza"³ $\rho_0 \in [0, +\infty]$ è dato dalla formula:

$$(2.14) \quad \rho_0 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|f(k)\|^{\frac{1}{k}}.$$

Il precedente risultato merita alcune riflessioni:

1. Ricordiamo che il \limsup o "limite superiore" di una successione $g(k)$ esiste sempre (anche quando la successione non ha limite) ed è definito come segue. Si definisca la successione

$$l(k) := \sup_{h \geq k} g(h)$$

allora

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} g(k) := \lim_{k \rightarrow \infty} l(k).$$

²Esiste anche la trasformata \mathcal{Z} bilatera definita da $\mathcal{Z}[f] = F(z) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$, tuttavia noi utilizzeremo solo la trasformata $\mathcal{Z}[f]$ unilatera, in quanto consideriamo per lo più segnali causali. Per approfondire l'argomento si vedano i testi in bibliografia.

³Si noti che ρ_0 può assumere anche il valore $+\infty$: ciò significa che il sommatoria non converge assolutamente in alcun punto del piano complesso.

Si noti che la successione $l(k)$ è necessariamente monotona non crescente pertanto ammette limite (finito o infinito). Dunque la formula (2.14) fornisce sempre un valore per il raggio di convergenza.

- Quando la successione $\|f(k)\|^{1/k}$ ammette limite, tale limite coincide necessariamente con il limite superiore e pertanto si può utilizzare la formula semplificata

$$(2.15) \quad \rho_0 := \lim_{k \rightarrow +\infty} \|f(k)\|^{1/k}$$

In altre parole, ρ_0 si può calcolare con la formula semplificata (2.15) se e solo se il limite a secondo membro di tale formula esiste.

- Le formule (2.14) e (2.15) sono basate sul *criterio della radice*. Una formula alternativa, basata sul *criterio del rapporto*, è la seguente:

$$(2.16) \quad \rho_0 := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f(k+1)}{f(k)} \right\|.$$

Anche questa formula (che di solito è molto più semplice da calcolare delle altre) vale se e solo se il relativo limite a secondo membro esiste.

- Non solo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)(z - z_0)^{-k}$ converge assolutamente all'esterno di un cerchio di raggio ρ_0 . Si può infatti dimostrare che all'interno del cerchio di raggio ρ_0 la serie *non* converge. Invece, la convergenza sui punti della circonferenza di ρ_0 può esserci o non esserci a seconda della specifica successione e quindi non vi sono risultati generali a riguardo.

2.7 DEFINIZIONE. Definiamo il *raggio di convergenza* (r.c.) della trasformata \mathcal{Z} in (2.11) come la costante ρ_0 definita dalla (2.14) e che può essere calcolata dalle formule semplificate (2.15) o (2.16) se i corrispondenti limiti a secondo membro esistono.

Dunque $F(z)$ converge per $|z| > \rho_0$ (cfr. Fig. 2), mentre sul confine $|z| = \rho_0$ non si può dire nulla in generale.

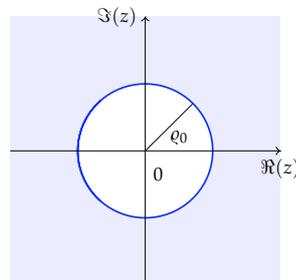


Figura 2: Regione di convergenza (in azzurro) $\mathcal{R}_c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_0\}$ della trasformata \mathcal{Z} .

2.8 ESEMPIO. Diamo alcuni esempi di calcolo di raggio di convergenza:

- Sia $f(k)$ il gradino unitario discreto (o funzione di Heaviside)

$$(2.17) \quad f(k) = \delta_{-1}(k) := \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La trasformata \mathcal{Z} di $f(k)$ e il raggio di convergenza, ricordando che la somma della serie geometrica di argomento a esiste ed è uguale a $\frac{1}{1-a}$ per $a < 1$, sono dati allora da

(2.18)

$$\mathcal{Z}[f] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1},$$

(2.19)

$$\varrho_0 = 1.$$

- Sia $f(k) = p^k$, $p \in \mathbb{C}$, allora

(2.20)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k z^{-k} = \frac{1}{1-pz^{-1}} = \frac{z}{z-p}$$

(2.21)

$$\varrho_0 = |p|.$$

Si noti che segnali di questo tipo emergono ad esempio dal campionamento di modi esponenziali con periodo fissato T : $e^{\lambda T k} = p^k$ con $p = e^{\lambda T}$.

- Sia $f(k) = 2^{k^2}$, allora $\mathcal{Z}[f]$ non è mai definita essendo $\varrho_0 = +\infty$.

◇

SFIDA. Si dia un esempio di successione il cui raggio di convergenza può essere calcolato con la (2.14) ma non con le formule semplificate (2.15) e (2.16).

2.5 Proprietà della trasformata \mathcal{Z}

Presentiamo in questo paragrafo le principali proprietà della trasformata \mathcal{Z} .

1. SIMMETRIA: Se $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $f \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)$, allora⁴

$$(2.22) \quad f^*(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_k f^*(k) z^{-k} = F^*(z^*).$$

Se f è a valori reali allora (2.22) implica $F(z) = F^*(z^*)$ ossia $F(z^*) = F^*(z)$.

⁴Qui e nel seguito si indica con f^* il complesso coniugato di f . Se f è un vettore (o una funzione a valori vettoriali) f^* indica il trasposto coniugato di f .

2. LINEARITÀ: Siano $F_1(z)$, $F_2(z)$ e ϱ_1, ϱ_2 le trasformate \mathcal{Z} e i raggi di convergenza delle funzioni $f_1, f_2 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, rispettivamente. Allora per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ vale

(2.23)

$$f := c_1 f_1 + c_2 f_2 \xrightarrow{\mathcal{Z}} c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z),$$

(2.24)

$$\varrho_0 \leq \max\{\varrho_1, \varrho_2\}.$$

- 2.9 ESEMPIO. Sia $f(k) = \cos(\vartheta k) = \frac{1}{2} (e^{j\vartheta k} + e^{-j\vartheta k})$. Allora utilizzando la (2.20) e la linearità della trasformata \mathcal{Z}

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\vartheta}} + \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}} \right) \\ (2.25) \quad &= \frac{z(z - \cos \vartheta)}{z^2 - 2 \cos \vartheta z + 1}. \end{aligned}$$

In maniera analoga per $g(k) = \sin(\vartheta k)$ si ottiene

$$(2.26) \quad \mathcal{Z}[g] = \frac{z \sin \vartheta}{z^2 - 2 \cos \vartheta z + 1}.$$

◇

3. TRASLAZIONE IN k : Vediamo ora due proprietà fondamentali che meritano particolare attenzione. Sia $f(k) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathcal{Z}[f] = F(z)$,

- *Anticipo*: $g(k) = f(k + a)$, $a \geq 0$, la trasformata \mathcal{Z} di g è

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[g] &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+a) z^{-k} \\ &= z^a \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+a) z^{-(k+a)} \\ (2.27) \quad &= z^a F(z) - \underbrace{\sum_{j=0}^{a-1} f(j) z^{a-j}}_{\Sigma_a}. \end{aligned}$$

- *Ritardo*: $g(k) = f(k - r)$, $r \geq 0$. Qui è bene distinguere due casi:

- $f(k) = 0$ per $k < 0$;
- $f(k)$ è definito su tutto \mathbb{Z} .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[g] &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-r)z^{-k} \\
 &= z^{-r} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-r)z^{-(k-r)} \\
 (2.28) \quad &= z^{-r}F(z) + \underbrace{\sum_{l=1}^r f(-l)z^{-(r-l)}}_{\Sigma_r},
 \end{aligned}$$

dove $\Sigma_r \equiv 0$ nel caso (a) mentre $\Sigma_r \neq 0$ nel caso (b).

2.10 OSSERVAZIONE. Formalmente l'operatore di traslazione temporale q è definito come una mappa sui segnali $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ tale che:

$$\begin{aligned}
 q[f(k)] &:= f(k+1), \\
 q^{-1}[f(k)] &:= f(k-1).
 \end{aligned}$$

Il comportamento è illustrato in Fig. 3, e corrisponde ad un passo di anticipo. L'operatore q è invertibile, e il suo inverso q^{-1} è il ritardo di un passo, in maniera che $q \circ q^{-1}$ sia l'identità.

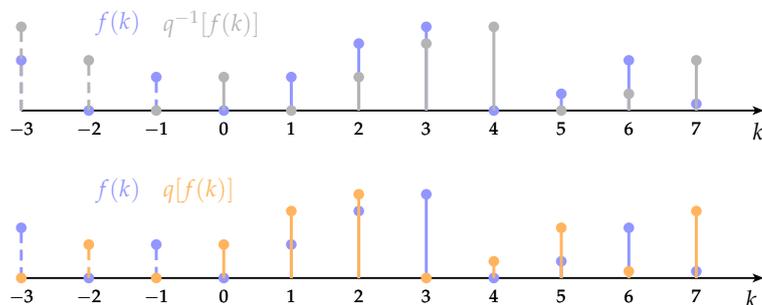


Figura 3: Traslazione temporale del segnale $f(k)$.

Alla luce delle proprietà (2.27),(2.28) si è tentati ad identificare l'azione dell'operatore q sulle trasformate \mathcal{Z} con la moltiplicazione per z e quella dell'operatore inverso q^{-1} con la moltiplicazione per z^{-1} . Questo non è però corretto, e porterebbe a grossolani errori: infatti la trasformata \mathcal{Z} unilatera è definita per segnali su \mathbb{Z}_+ , o per la parte causale di un segnale su \mathbb{Z} .

È evidente ad esempio che l'azione di q^{-1} come definita sopra non è sufficiente a determinare il campione $f(0)$ di un segnale, definito solo per \mathbb{Z}_+ . Questo problema viene spesso ovviato, tacitamente, assumendo che " $f(-1) = 0$ ", ovvero che se $g = q^{-1}[f]$, $g(1) = 0$.

Questo corrisponde al caso (a) visto sopra. Se invece di f conosco anche la storia passata, devo includere il temrine Σ_r .

Riassumendo: nel definire l'anticipo e il ritardo dobbiamo quindi preoccuparci di nuovi campioni che entrano ed escono dal dominio di interesse, \mathbb{Z}_+ . Questo si traduce per le trasformate \mathcal{Z} nella presenza delle sommatorie Σ_a, Σ_r , presenti in (2.27) e (2.28) che giocano il ruolo di "condizioni iniziali" e che tengono conto dei campioni di f che escono o entrano nel dominio \mathbb{Z}_+ di \mathcal{Z} .

4. TRASLAZIONE PERIODICA: Sia $g(k)$ un segnale discreto in \mathbb{Z} tale che $g(k) = 0$ per $k < 0$, e sia $f(k)$ la funzione di "ripetizione periodica" di $g(k)$ con periodo N , i.e.

$$(2.29) \quad f(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(k - iN).$$

Il caso particolare ove $g(k)$ assume valori non nulli solo nell'intervallo $0 \leq k < N$ è illustrato in Fig.4. In tal caso la ripetizione periodica $f(k)$ risulta essa stessa periodica di periodo N .

La trasformata \mathcal{Z} di tale ripetizione periodica di periodo N si ricava sfruttando la linearità e la proprietà legata al ritardo (con condizioni iniziali nulle):

$$(2.30) \quad F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-iN} G(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} G(z) = \underbrace{\frac{z^N}{z^N - 1}}_{=: \Theta_N(z)} G(z).$$

La moltiplicazione per $\Theta_N(z)$ corrisponde all'azione dell'"operatore di traslazione periodica" di periodo N nel dominio delle trasformate \mathcal{Z} .

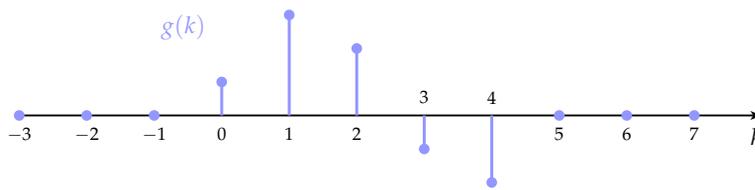


Figura 4: Esempio di segnale $g(k)$ con $N = 5$ utilizzato per la traslazione periodica.

2.11 ESEMPIO. Sia $f(k) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione periodica

$$f(k) := \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Tale funzione può essere vista come la traslazione periodica dell'impulso

discreto (2.12) di periodo $N = 2$. Pertanto dalla relazione (2.30) abbiamo

$$F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] = \mathcal{Z} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \delta(k - i2) \right] = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

◇

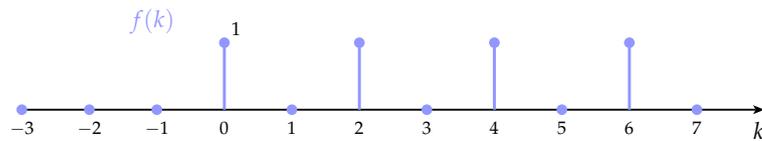


Figura 5: funzione $f(k)$ utilizzata nell'esempio 2.11.

5. TRASLAZIONE LOGARITMICA IN z (riscaldamento nel piano \mathbb{C}): Data $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ con raggio di convergenza ρ_0 , allora

$$(2.31) \quad p^k f(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) p^k z^{-k} = F\left(\frac{z}{p}\right), \quad \text{r.c. } \rho'_0 = |p| \rho_0.$$

Anche questa proprietà ci tornerà utile per l'analisi modale di sistemi a tempo discreto, come suggerisce il seguente esempio.

2.12 ESEMPIO. Sia $f(k) = \lambda^k \cos(\vartheta k)$, allora ricordando la trasformata \mathcal{Z} del coseno (2.25) e sfruttando la (2.31)

$$(2.32) \quad \begin{aligned} F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] &= F\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{\frac{z}{\lambda} \left(\frac{z}{\lambda} - \cos \vartheta\right)}{\frac{z^2}{\lambda^2} - 2 \cos \vartheta \frac{z}{\lambda} + 1} \\ &= \frac{z(z - \lambda \cos \vartheta)}{z^2 - 2 \cos \vartheta \lambda z + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Osserviamo anche che la funzione $f(k)$ può essere interpretata come la versione campionata di un modo oscillatorio smorzato. ◇

6. INTEGRAZIONE DISCRETA IN k : Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$. L'operazione di inte-

grazione discreta nel dominio delle trasformate \mathcal{Z} assume la forma⁵

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^k f(l) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \left(\sum_{l=0}^k f(l) \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} z^{-l} f(l) \left(\sum_{k=l}^{\infty} z^{l-k} \right) \\
 (2.33) \quad &= \frac{1}{1-z^{-1}} F(z) = \frac{z}{z-1} F(z).
 \end{aligned}$$

2.13 ESEMPIO. Sia $f(k) = k$, la funzione rampa a tempo discreto. Tale funzione è pari all'integrale discreto fino al tempo $k-1$ del gradino unitario discreto (2.17), allora dalla (2.33), includendo un passo di ritardo, si ottiene:

$$(2.34) \quad F(z) = z^{-1} \left(\frac{z}{z-1} \right) \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

◇

7. DERIVAZIONE DISCRETA: Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, dalla definizione dell'operatore Δ (2.6) e per la proprietà di traslazione in k (2.28) abbiamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[\Delta f(k)] &= \mathcal{Z}[f(k) - f(k-1)] \\
 &= F(z) - z^{-1}F(z) - f(-1) \\
 (2.35) \quad &= (1 - z^{-1})F(z) - f(-1).
 \end{aligned}$$

In generale la trasformata \mathcal{Z} della derivata discreta di f di ordine n è data da

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[\Delta^n f(k)] &= \mathcal{Z} \left[\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} f(k-l) \right] \\
 (2.36) \quad &= (1 - z^{-1})^n F(z) + \sum_{h=0}^{n-1} z^{-h} \sum_{l=h+1}^n (-1)^l \binom{n}{l} f(h-l).
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso si noti la sommatoria che include i termini $f(-\ell)$, per $\ell = 1, \dots, n$ e che gioca il ruolo dell'effetto delle condizioni iniziali per la trasformata di Laplace unilatera della derivata di un segnale.

OSSERVAZIONE. Si noti che per ad una differenza Δ^n corrisponde (in generale) un termine che dipende da n campioni con k negativi. Questo si può spiegare intuitivamente notando che nell'equivalente trasformata di Laplace delle derivate venivano coinvolti i valori delle prime n de-

⁵Si noti la somiglianza della formula trovata con quella della ripetizione periodica (2.30): per quale motivo?

rivate calcolate per $t \rightarrow 0^-$: la stessa cosa avviene nel discreto, ma per specificare il valore della n -esima differenza in $k = 0$ ho bisogno di conoscere gli n campioni precedenti (1 per la differenza lineare, 2 per la concavità/convessità e così via).

8. ANALITICITÀ E DERIVAZIONE IN z : La trasformata \mathcal{Z} , ove converge, è analitica.⁶ Perciò siccome tutte le funzioni analitiche in un punto x_0 contenuto nella regione di convergenza sono derivabili (più precisamente infinitamente derivabili), abbiamo che, data $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$

$$(2.37) \quad \frac{d}{dz}F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k)f(k)z^{-k-1} = -z^{-1}\mathcal{Z}[kf(k)].$$

Dunque dalla relazione (2.37) si ottiene:

$$(2.38) \quad \mathcal{Z}[kf(k)] = -z \frac{d}{dz}F(z).$$

2.14 ESEMPIO. Diamo alcuni esempi di trasformate \mathcal{Z} notevoli ottenute sfruttando la proprietà (2.38)

- Sia $f(k) = k^2$ per $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k)] &= \mathcal{Z}[k \cdot k] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= -z \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2z}{(z-1)^3} \right) \\ (2.39) \quad &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \end{aligned}$$

- Sia $f(k) = \binom{k}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k)] &= \mathcal{Z} \left[\frac{k(k-1)}{2} \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z(z-1)}{(z-1)^2(z-1)} \right] \\ (2.40) \quad &= \frac{z}{(z-1)^3}. \end{aligned}$$

- Sia $f(k) = \binom{k}{l}$, allora

$$(2.41) \quad \mathcal{Z}[f(k)] = \frac{z}{(z-1)^{l+1}}.$$

⁶Ricordiamo che una funzione analitica è una funzione localmente espressa da una serie di potenze convergente.

Vediamo ora una dimostrazione per induzione su l della (2.41).

Dimostrazione.

Base dell'induzione: è facile osservare che per $l = 0, 1$ la relazione (2.41) è verificata in quanto $\mathcal{Z}\left[\binom{k}{0}\right] = \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \frac{z}{z-1}$ e $\mathcal{Z}\left[\binom{k}{1}\right] = \mathcal{Z}[k] = \frac{z}{(z-1)^2}$ (cfr. equazioni (2.17) e (2.34)).

Passo induttivo: supponiamo vera la (2.41) per $l - 1$, allora notando che è possibile scrivere

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{l}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{k!}{l!(k-l)!}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{k}{l}\binom{k-1}{l-1}\right],$$

e per le proprietà della derivata discreta (2.38) e della traslazione in k (2.28)⁷

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k}{l}\binom{k-1}{l-1}\right] = -\frac{z}{l} \frac{d}{dz} \left(z^{-1} \frac{z}{(z-1)^l} \right) = \frac{z}{(z-1)^{l+1}}.$$

□

- Sia $f(k) = \binom{k}{l} p^{k-l}$, per quanto ricavato dall'esempio precedente e per la proprietà di traslazione logaritmica (2.31) si ottiene l'utile formula

$$(2.42) \quad \mathcal{Z}[f(k)] = \frac{1}{p^l} \frac{z/p}{(z/p-1)^{l+1}} = \frac{z}{(z-p)^{l+1}}.$$

◇

9. **COMPORAMENTO ASINTOTICO:** Sia $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ con $|z| > \varrho_0 \in \mathbb{R}$ finito. Allora

$$(2.43) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = f(0).$$

2.15 **OSSERVAZIONE.** Si noti l'analogia con il *Teorema del valore iniziale* per la trasformata di Laplace.

2.16 **ESEMPIO.** Sia $f(k) = \cos(2k) + 3^k$, sappiamo che la trasformata \mathcal{Z} di $f(k)$ risulta essere (cfr. (2.20) e (2.25))

$$F(z) = \frac{z(z - \cos 2)}{z^2 - 2 \cos 2z + 1} + \frac{z}{z - 3}.$$

Verifichiamo la proprietà appena enunciata

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = 1 + 1 = 2 = f(0).$$

⁷Si suppone che $f(k) \equiv 0$ per $k < 0$.

◇

2.17 OSSERVAZIONE. Se $f(k)$ è nulla per $k < r$ una generalizzazione della proprietà (2.43) è allora la seguente

$$(2.44) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} z^r F(z) = f(r).$$

10. TEOREMA DEL VALORE FINALE: Se esiste finito,

$$(2.45) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z).$$

2.18 ESEMPIO. Vediamo tre esempi di applicazione (corretta e non) del Teorema del valore finale:

- Sia $f(k) = 0.9^k + 1$. Allora essendo $\lim_{z \rightarrow \infty} f(k) = 1$ si può applicare la (2.45) ed effettivamente

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{z}{z-0.9} + \frac{z}{z-1} \right) = 1.$$

- Sia $f(k) = \sin(\vartheta k)$ con $\vartheta \neq h\pi$, $h \in \mathbb{Z}_+$. Il limite $\lim_{z \rightarrow \infty} f(k)$ in questo caso non esiste e non si può utilizzare la (2.45). Se lo facessi senza controllare, otterrei erroneamente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = 0.$$

- Sia $f(k) = k2^k$, in questo caso il limite $\lim_{z \rightarrow \infty} f(k)$ diverge addirittura a $+\infty$ e quindi il Teorema non è applicabile. Si noti come un'applicazione "cieca" del Teorema porterebbe al risultato (errato)

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) (-z) \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{2}{(z-2)^2} = 0!$$

◇

11. TEOREMA DI CONVOLUZIONE: Siano $f(k), g(k)$ due funzioni definite per $k \geq 0$ e $F(z), G(z)$ le rispettive trasformate \mathcal{Z} . Definiamo la *convoluzione discreta* di $f(k)$ e $g(k)$

$$(2.46) \quad h(k) := f(k) \otimes g(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(l)g(k-l).$$

Allora, indicata con $H(z)$ la trasformata \mathcal{Z} di $h(k)$,

$$(2.47) \quad H(z) = F(z)G(z).$$

Dimostrazione. Se f è causale vale:

$$h(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(l)g(k-l) = \sum_{l=0}^{+\infty} f(l)g(k-l).$$

Trasformando si ottiene:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} f(l)g(k-l)z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} f(l) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} g(k-l)z^{-k} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} f(l) \left(\sum_{k'=-l}^{+\infty} g(k')z^{-k'-l} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} f(l)z^{-l} \left(\sum_{k'=0}^{+\infty} g(k')z^{-k'} \right) \\ &= F(z)G(z), \end{aligned}$$

dove $k' := k - l$ e nella penultima uguaglianza della catena abbiamo usato il fatto che g è causale. \square

Antitrasformata di funzioni $F(z)$ razionali e proprie

Nel caso di funzioni razionali e proprie, vi è una formula esplicita per il calcolo delle relative antitrasformate. Sia $F(z)$ una funzione razionale e propria che può quindi essere rappresentata nella forma

$$(2.48) \quad F(z) = \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^l}{\sum_{l=0}^n a_l z^l},$$

dove $r := n - m \geq 0$ è il grado relativo di $F(z)$. Dividiamo la (2.48) per z (passaggio la cui utilità sarà chiara in seguito, data la forma delle trasformate notevoli che andremo ad utilizzare) e definiamo

$$(2.49) \quad F_1(z) := \frac{F(z)}{z} = \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^l}{z \sum_{l=0}^n a_l z^l}.$$

Fattorizziamo ora il denominatore di $F_1(z)$. Otteniamo:

$$(2.50) \quad F_1(z) = \frac{N(z)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)^{n_i}},$$

con $p_0 = 0$ la radice in zero di $z \sum_{l=0}^n a_l z^l$ (si noti che la radice p_0 non è presente se $F(z)$ ha uno zero nell'origine. Altrimenti, la molteplicità n_0 di p_0 è pari alla molteplicità del polo nell'origine di $F(z)$ aumentata di 1 cosicché se $F(z)$ non ha zeri né poli nell'origine la molteplicità di p_0 è pari a 1).

Espandiamo ora $F_1(z)$ in fratti semplici:

$$(2.51) \quad F_1(z) = \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} \frac{A_{i,l}}{(z-p_i)^{l+1}}.$$

Il coefficienti $A_{i,l}$ sono calcolabili, per esempio, come segue:

$$(2.52) \quad A_{i,n_i-1} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{n_i} F_1(z);$$

$$(2.53) \quad A_{i,n_i-2} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{n_i-1} \left(F_1(z) - \frac{A_{i,n_i-1}}{(z-p_i)^{n_i}} \right);$$

$$(2.54) \quad A_{i,n_i-3} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{n_i-2} \left(F_1(z) - \frac{A_{i,n_i-1}}{(z-p_i)^{n_i}} - \frac{A_{i,n_i-2}}{(z-p_i)^{n_i-1}} \right);$$

⋮

$$(2.55) \quad A_{i,l} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{l+1} \left(F_1(z) - \sum_{k=l+2}^{n_i} \frac{A_{i,k-1}}{(z-p_i)^k} \right).$$

Ora, moltiplicando la (2.51) per z e trattando separatamente i termini relativi al polo nell'origine, otteniamo

$$(2.56) \quad F(z) = \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} \underbrace{A_{i,l} \frac{z}{(z-p_i)^{l+1}}}_{F_{p_i,l}} + \sum_{l=0}^{n_0} \underbrace{A_{0,l} \frac{1}{z^l}}_{F_{0,l}}.$$

Grazie alle (2.13) e (2.42) (ecco quindi rivelata l'utilità di dividere per z) conosciamo le antitrasformate delle funzioni $F_{p_i,l}(z)$ e $F_{0,l}(z)$

$$(2.57) \quad F_{p_i,l}(z) = A_{i,l} \frac{z}{(z-p_i)^{l+1}} \xrightarrow{z^{-1}} \frac{A_{i,l}}{p_i^l} \binom{l}{k} p_i^k,$$

$$(2.58) \quad F_{0,l}(z) = A_{0,l} z^{-l} \xrightarrow{z^{-1}} A_{0,l} \delta(k-l).$$

Poiché una mappa lineare biettiva (in questo caso la trasformata \mathcal{Z}) ha inversa anch'essa lineare, sostituendo le (2.57) e (2.58) appena ricavate nella (2.56), otteniamo

$$(2.59) \quad \boxed{f(k) = \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} \frac{A_{i,l}}{p_i^l} \binom{l}{k} p_i^k + \sum_{l=0}^{n_0} A_{0,l} \delta(k-l).}$$

2.19 OSSERVAZIONE. Si noti che se la funzione razionale ha grado relativo r , i primi r campioni di $f(k)$, ossia, $f(0), f(1), \dots, f(r-1)$ sono necessariamente nulli. L'intero r può dunque essere considerato come il "ritardo implicito" nel segnale. Questo fatto può essere usato come utile "sanity check" per verificare il risultato ottenuto dalle operazioni di antitrasformazione appena descritte.

2.20 OSSERVAZIONE. Si noti che nell'ipotesi di avere (come generalmente accade) $f(k)$ reale, allora per la proprietà di simmetria della trasformata \mathcal{Z} (2.22),

la funzione razionale $F(z)$ ha coefficienti reali e se esiste un polo immaginario $p = \varrho e^{j\vartheta}$ allora appare anche il suo complesso coniugato $p^* = \varrho e^{-j\vartheta}$.

Come nel caso a tempo continuo, alla coppia di segnali antitrasformati complessi $\binom{k}{l} p^k$ e $\binom{k}{l} p^{*k}$ posso sostituire combinazioni lineari dei segnali reali $\binom{k}{l} \varrho^k \cos(\vartheta k)$ e $\binom{k}{l} \varrho^k \sin(\vartheta k)$. Esplicitamente, notando che, essendo \Re e \Im rispettivamente le funzioni parte reale e immaginaria, vale $\Re(A_l e^{-jl\vartheta}) = \Re(A_l^* e^{jl\vartheta})$ e $\Im(A_l e^{-jl\vartheta}) = -\Im(A_l^* e^{jl\vartheta})$, si ottiene la riscrittura:

$$(2.60) \quad \begin{aligned} \frac{A_l}{p^l} \binom{k}{l} p^k + \frac{A_l^*}{p^{*l}} \binom{k}{l} p^{*k} &= \varrho^{k-l} \binom{k}{l} \left[A_l e^{j(k-l)\vartheta} + \bar{A}_l e^{-j(k-l)\vartheta} \right] \\ &= \frac{1}{\varrho^l} \binom{k}{l} \varrho^k \left[2\Re(A_l e^{-jl\vartheta}) \cos(\vartheta k) - 2\Im(A_l e^{-jl\vartheta}) \sin(\vartheta k) \right]. \end{aligned}$$

In particolare se supponiamo per semplicità la molteplicità del polo p unitaria ($n_p = 1$), la decomposizione in fratti semplici della funzione $F_p(z) := \frac{N'(z)}{(z-p)(z-p^*)}$ si può scrivere nella forma

$$(2.61) \quad \begin{aligned} F_p(z) &= \frac{N'(z)}{(z-p)(z-p^*)} = \frac{Az}{z-p} + \frac{A^*z}{z-p^*} \\ &= \frac{z(\alpha(z - \varrho \cos \vartheta) - \beta \varrho \cos \vartheta)}{z^2 - 2z\varrho \cos \vartheta + \varrho^2}, \end{aligned}$$

con

$$(2.62) \quad 2A = \alpha + j\beta = M e^{j\varphi}.$$

Da (2.61) antitrasformando si ottiene quindi il modo reale

$$(2.63) \quad \mathcal{Z}^{-1}[F_p(z)] = M \varrho^k \cos(k\vartheta + \varphi).$$

Concludiamo la sezione con esempio che illustri il calcolo dell'antitrasformata \mathcal{Z} di una funzione razionale.

2.21 ESEMPIO. Sia

$$F(z) = \frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26}{z(z-1)(z+2)^2(z^2 - 2z + 2)}.$$

Notiamo subito che $F(z)$ ha grado relativo pari a $r = 2$ e che ha un polo nell'origine. Visto che tale polo corrisponde semplicemente ad un passo di ritardo, lo possiamo scorporare dal problema semplificando un po' i conti. Più precisamente possiamo definire la funzione

$$F_0(z) := zF(z) = \frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26}{(z-1)(z+2)^2(z^2 - 2z + 2)}$$

e calcolare l'antitrasformata di F_0 . Dopo di che l'antitrasformata di F si otterrà immediatamente ritardando di un passo quella di F_0 . Procediamo quindi come illustrato in precedenza definendo

$$F_1(z) = \frac{F_0(z)}{z} (= F(z)) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C_1}{z+2} + \frac{C_2}{(z+2)^2} + \frac{D}{z-p} + \frac{D^*}{z-p^*},$$

dove $p := 1 + j = \sqrt{2} \exp(j\pi/4)$ e il complesso coniugato $p^* = 1 - j = \sqrt{2} \exp(-j\pi/4)$ sono gli zeri di $(z^2 - 2z + 2)$ e i coefficienti incogniti si ottengono tramite le formule introdotte più sopra:

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} zF_1(z) = -13/4,$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_1(z) = 2,$$

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)^2 F_1(z) = 3/2,$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \left[F_1(z) - \frac{\overbrace{C_2}^{3/2}}{(z+2)^2} \right] = 5/4,$$

$$D = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)F_1(z) = -j.$$

Dunque

$$F_0(z) = zF_1(z) = A + B\frac{z}{z-1} + C_1\frac{z}{z+2} + C_2\frac{z}{(z+2)^2} + D\frac{z}{z-p} + D^*\frac{z}{z-p^*}$$

la cui antitrasformata si calcola immediatamente per ispezione:

$$f_0(k) = A\delta(k) + B\delta_{-1}(k) + C_1(-2)^k + C_2k(-2)^{k-1} + Dp^k + D^*(p^*)^k.$$

Naturalmente f_0 , essendo l'antitrasformata di una funzione razionale a coefficienti reali, deve risultare reale. Infatti, i termini complessi Dp^k e $D^*(p^*)^k$ sono (per ciascun valore di k) l'uno il complesso coniugato dell'altro. Pertanto la loro somma è reale: $Dp^k + D^*(p^*)^k = 2\text{Re}[Dp^k]$. Mettendo in evidenza la decomposizione cartesiana di $D = \alpha + j\beta$ e la decomposizione polare di $p = \rho \exp(j\theta)$, si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} Dp^k + D^*(p^*)^k &= 2\text{Re}[Dp^k] = 2\text{Re}[(\alpha + j\beta)\rho^k(\cos(k\theta) + j\sin(k\theta))] \\ &= 2\alpha\rho^k\cos(k\theta) - 2\beta\rho^k\sin(k\theta). \end{aligned}$$

Nel nostro caso specifico, $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\rho = \sqrt{2}$ and $\theta = \pi/4$ cosicché:

$$f_0(k) = -\frac{13}{4}\delta(k) + 2\delta_{-1}(k) + \frac{5}{4}(-2)^k + \frac{3}{2}k(-2)^{k-1} + 2(\sqrt{2})^k \sin(k\pi/4).$$

Si noti che questa espressione vale *solo* per $k \geq 0$. Si noti anche che F_0 ha grado relativo pari a 1 e quindi si deve avere $f_0(0) = 0$: sostituendo $k = 0$ nell'espressione precedente, si verifica facilmente che $f_0(0) = -\frac{13}{4} + 2 + \frac{5}{4} = 0$

il che, pur non garantendo la correttezza dell'espressione ottenuta, è una utile verifica.

Infine, $f(k)$ si ottiene ritardando $f_0(k)$ di un passo:

$$f(k) = -\frac{13}{4}\delta(k-1) + 2\delta_{-1}(k-1) + \frac{5}{4}(-2)^{k-1} + \frac{3}{2}(k-1)(-2)^{k-2} \\ + 2(\sqrt{2})^{k-1}\sin((k-1)\pi/4), \quad k > 0$$

Naturalmente per $k = 0$ (e per valori negativi di k) si ha $f(k) = 0$. Infatti, l'espressione trovata per $f_0(k)$ valeva solo per $k \geq 0$.

Si invita il lettore a rifare i conti senza passare per F_0 : si troverà un'espressione apparentemente diversa per $f(k)$ ma che fornisce effettivamente gli stessi valori per ogni $k \geq 0$.

3 ELEMENTI DI TEORIA DEL CAMPIONAMENTO

Lezione 5 (2 ore)
20 marzo 2012

3.1 Campionamento di Segnali per Modulazione d' Ampiezza

I vantaggi nell'utilizzo di segnali campionati sono molteplici. Ne abbiamo già visti alcuni, in termini di prestazioni e di implementazioni fisiche, per quel che riguarda il settore della teoria del controllo (vedi §1). Altri motivi dell'utilizzo del campionamento riguardano l'ambito del "signal processing & communication": segnali campionati, infatti, sono più facili da trasmettere, da elaborare, da correggere e da codificare in maniera protetta.

3.1 ESEMPIO (rumore negli ADP). Un ADP, acronimo per Avalanche Photo Diode (fotodiode a valanga), è un sensore che può rilevare l'"arrivo" di un singolo fotone amplificando l'effetto fotoelettrico. Nell'utilizzo di tali sensori sorge spesso il problema dei *dark counts*, ossia dei segnali in uscita provocati da emissioni spontanee di fotoni all'interno del fotodiode quando questo è acceso. Di solito si assume costante la probabilità f_{DC} di avere dark counts nell'unità di tempo. Sia N_{DC} il numero di dark counts, allora se si lascia l'ADP acquisire tutto il tempo si ha

$$\mathbb{E}[N_{DC}T] = \int_0^T f_{DC} d\tau = f_{DC}T.$$

Si vede allora che è più conveniente in termini di numero di dark counts (e quindi di errore nella rilevazione) trasmettere l'informazione codificata in "impulsi", cioè l'acquisizione dei dati avviene solo durante intervalli di durata $\Delta t \ll T$ distanziati di un periodo T_0 , giacché in questo caso

$$\mathbb{E}[N_{DC}T] = \sum_{i=0}^{T/T_0} f_{DC}\Delta t = \frac{T}{T_0}f_{DC}\Delta t,$$

e facendo tendere $\Delta t \rightarrow 0$ possiamo trascurare l'effetto dei dark counts su periodi finiti. \diamond

Esistono diversi tipi di campionamento, tra i quali

- campionamento PAM (Pulse Amplitude Modulation);
- campionamento PWM (Pulse Width Modulation);
- campionamento PFM (Pulse Frequency Modulation).

Nella teoria del controllo si preferisce utilizzare una modulazione PAM, in quanto tale trasformazione preserva (almeno idealmente) la linearità del sistema (con tutti i vantaggi che ne conseguono).

Sia $f(t)$ un segnale continuo in ingresso al blocco di campionamento PAM di Fig.6 con periodo (fisso) di campionamento T e $f_h(t)$ il segnale in uscita. Tale segnale si ottiene per *modulazione* del segnale di ingresso con una portante a pettine, che supporremo per semplicità con denti rettangolari, di base h e ampiezza $1/h$. Dunque f_h assume il valore del segnale in ingresso negli

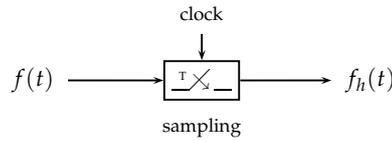


Figura 6: Blocco di campionamento.

intervalli di ampiezza h centrati agli istanti kT , moltiplicato per un guadagno $1/h$. Si noti che questo fa sì che l'integrale dell'uscita su ogni intervallo $[T - \frac{T}{2}, T + \frac{T}{2}]$ sia pari al valor medio di $f(t)$ su $[T - \frac{h}{2}, T + \frac{h}{2}]$.

Il valore $f(kT)$ si ottiene quindi al limite di campionamento ideale $h \rightarrow 0$. In questo caso possiamo rappresentare matematicamente il segnale campionato come il segnale di ingresso modulato da un treno di impulsi continui (*Dirac comb*):

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

ottenendo:

$$(3.1) \quad f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT).$$

Se $f(t)$ è una funzione causale, ossia identicamente nulla per valori negativi di t , la (3.1) si riduce a

$$(3.2) \quad f_\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT).$$

3.2 OSSERVAZIONE. Si ricorda che l'impulso di Dirac non è una funzione bensì una distribuzione, definita dalla sua azione integrale (o meglio, convoluzionale) sulle funzioni ℓ^∞ :

$$\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)f(\tau)d\tau = f(t).$$

Dalla (3.2) si verifica facilmente che:

$$(3.3) \quad \int_{\tau=kT-T/2}^{kT+T/2} f_\delta(\tau)d\tau = f(kT), \quad \forall k.$$

L'integrale della distribuzione f_δ chiarisce l'equivalenza delle due scritte nella (3.2).

3.3 OSSERVAZIONE. E' a questo punto evidente che il segnale continuo $f_\delta(t)$ e

quello discreto $\tilde{f}(k) = f(kT)$ contengono la stessa informazione: posso passare da uno all'altro (matematicamente) per integrazione e viceversa per moltiplicazione per un treno di impulsi. Considerare f_δ offre quindi un modo matematicamente coerente di rappresentare un segnale discreto usando segnali a tempo continuo.

L'utilizzo di f_δ offre anche un altro vantaggio: ci permette di legare la trasformata \mathcal{Z} alla trasformata di Laplace in modo più diretto.

3.2 Campionamento e Relazione tra le Trasformate

3.4 OSSERVAZIONE. Si ricorda che la *trasformata unilatera di Laplace* è definita per $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ come:

$$(3.4) \quad \mathcal{L}[f(t)] = \int_{\tau=0}^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

da cui si ricava facilmente che, ad esempio:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta(t - kT)] = e^{-kTs}.$$

Altre trasformate di Laplace utili sono riportate in Appendice B.

Consideriamo ora una funzione $f(t)$ causale e procediamo a trasformare secondo Laplace la relativa espressione (3.2):

$$(3.5) \quad F_\delta(s) = \mathcal{L}[f_\delta(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \equiv \mathcal{Z}[\tilde{f}(k)],$$

avendo definito $z := e^{Ts}$. Abbiamo quindi che la trasformata \mathcal{Z} di $\tilde{f}(k)$ è equivalente alla trasformata di Laplace del segnale continuo f_δ che lo rappresenta.

Vogliamo però esplorare in maggior dettaglio il legame tra $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $F_\delta(s) = \mathcal{L}[f_\delta(t)]$ e $\tilde{F}(z) = \mathcal{Z}[\tilde{f}(k)]$.

Cerchiamo quindi una relazione che leghi la trasformata di Laplace di una generica funzione $f(t)$ alla trasformata \mathcal{L} dello stesso segnale modulato in ampiezza $f_\delta(k)$, in maniera da chiudere il diagramma di relazioni matematiche rappresentato di seguito.

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ \downarrow \otimes \varphi(t) & & \uparrow \text{??} \\ f_\delta(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F_\delta(s) \\ \uparrow \approx & & \downarrow z = e^{Ts} \\ \tilde{f}(k) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & \tilde{F}(z) \end{array}$$

Analizziamo più in dettaglio la relazione (3.5). L'esponentiale complesso che appare in tale relazione $z := e^{Ts}$ è, come noto, periodico in $\Im(s)$ con

periodo $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Infatti $e^{sT} = e^{sT+j2\pi N} = e^{(s+j\frac{2\pi}{T}N)T}$, $N \in \mathbb{Z}$. Si deduce quindi che anche $F_\delta(s) = \tilde{F}(e^{sT})$ è periodica in $\Im(s)$ di periodo Ω , in quanto dipende da s solo tramite e^{sT} .

Più esplicitamente, possiamo riscrivere la (3.2) nella forma

$$(3.6) \quad f_\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = f(t)\varphi(t),$$

avendo definito $\varphi(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ e ricordando che $f(t)$ causale. Essendo $\varphi(t)$ periodica di periodo T è sviluppabile in serie di Fourier,

$$(3.7) \quad \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega t}.$$

Possiamo anche calcolare esplicitamente i coefficienti a_k dell'espansione in serie:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{1}{T},$$

ossia i coefficienti a_k sono tutti uguali e pari a $\frac{1}{T}$. Possiamo ora sostituire questi coefficienti nella (3.7). Otteniamo

$$(3.8) \quad \varphi(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\Omega t}$$

Infine, utilizzando questa espressione nella (3.6), otteniamo

$$(3.9) \quad f_\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = f(t)\varphi(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)e^{jk\Omega t},$$

Per una nota proprietà delle trasformate di Laplace, la trasformata di Laplace della (3.9) risulta

$$(3.10) \quad F_\delta(s) := \mathcal{L}[f_\delta(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s - jk\Omega).$$

E quindi la Trasformata di Fourier di $f_\delta(t)$, $F_\delta(j\omega)$, è periodica di periodo Ω (pulsazione di campionamento). Essa, infatti è ottenuta per ripetizione periodica infinita di $F(j\omega)$. Possiamo quindi ricostruire $F(s)$ a partire da $F_\delta(s)$ tramite un filtro passa basso ideale se valgono le condizioni del *teorema del campionamento*.

3.5 TEOREMA (Shannon, 1949). *Un segnale $f(t)$ è ricostruibile univocamente dai campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ per interpolazione se e solo se esso ha banda limitata $\omega_B = 2\pi B$ e la pulsazione di campionamento $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ soddisfa $\Omega > 2\omega_B$.*

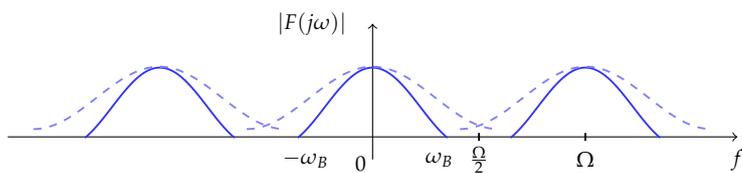


Figura 7: Modulo della trasformata di Fourier di $f_\delta(t)$ espressa dalla (3.10). In blu per un segnale a banda limitata, in azzurro tratteggiato per un segnale a banda illimitata (fenomeno dell'aliasing).

In conclusione, se la banda del segnale $f(t)$ è minore di $\frac{\Omega}{2}$, (ossia, se $F(j\omega) = 0 \forall \omega > \frac{\Omega}{2}$) troviamo che $F(s)$ è legata a $F_\delta(s)$ dalla relazione

$$(3.11) \quad F(s) = A(s)F_\delta(s)$$

dove $A(s)$ è un filtro *passa basso ideale* la cui funzione di trasferimento $A(s)$ è tale che $A(j\omega) = T$ se $|\omega| \leq \Omega/2$, e $A(j\omega) = 0$ altrimenti.

3.3 Corrispondenza tra i piani s e z

Come viene mappato il piano s nel piano z quando operiamo il passaggio dal continuo al discreto? Affrontiamo il problema cominciando con un esempio, che ne motiva chiaramente lo studio.

3.6 ESEMPIO. Se $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, allora $F(s) = \frac{1}{s-a}$. D'altra parte, $\tilde{f}(k) = (e^{aT})^k$, $k \geq 0$ e $\tilde{F}(z) = \frac{z}{z-e^{aT}}$, con T periodo di campionamento.

Più in generale se $f(t) = q_n(t)e^{at}$, $t \geq 0$, con $q_n(t)$ polinomio in t di grado n , allora $F(s) = \frac{Q_n(s)}{(s-a)^{n+1}}$, con $Q_n(s)$ opportuno polinomio in s di grado n . Nel dominio \mathcal{Z} , $\tilde{f}(k) = \tilde{q}_n(k)(e^{aT})^k$, $k \geq 0$ e $\tilde{F}(z) = \frac{z\tilde{Q}_n(z)}{(z-e^{aT})^{n+1}}$.

Pertanto, per trasformate che sono funzioni razionali, ad un polo $s = a$ di $F(s)$ corrisponde un polo $z = e^{aT}$ di $\tilde{F}(z)$, entrambi con la stessa molteplicità. \diamond

Abbiamo visto nella sezione precedente che la trasformazione indotta dal campionamento con periodo T è $z = e^{sT}$, con $s = \sigma + j\omega$, periodica in ω . Se vogliamo trovare una corrispondenza tra i piani del dominio s e z notiamo che la striscia primaria $\mathfrak{S} := \{s : s = \sigma + j\omega, -\frac{\Omega}{2} < \omega < \frac{\Omega}{2}\}$ è mappata in maniera iniettiva su tutto il piano complesso a meno dell'origine, la quale corrisponderebbe a $\sigma \rightarrow -\infty$. I modi stabili a tempo continuo sono associati ad esponenziali complessi con parte reale (dell'esponente) non positiva. Pertanto la parte di striscia "stabile" viene mappata all'interno del cerchio unitario S^1 , come è illustrato nella Fig.8.

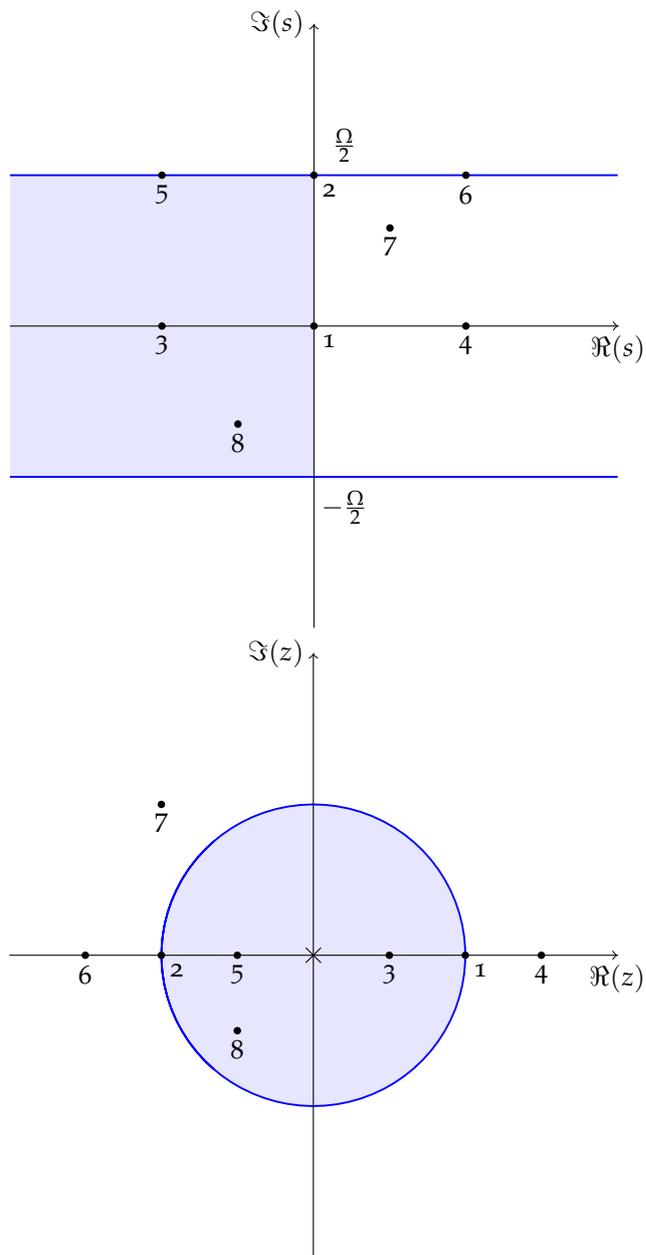


Figura 8: Corrispondenza tra i piani s e z.

3.4 Filtri Anti-Aliasing

Per evitare il fenomeno dell'aliasing (che è inevitabilmente presente visto che, in pratica, il segnale non ha mai banda perfettamente limitata essendo sempre presenti componenti ad alta frequenza) prima di campionare, si filtra il segnale con un filtro passa-basso detto *filtro Anti-Aliasing* (A.A.). Idealmente,

Lezione 6 (2 ore)
23 marzo 2012

si vorrebbe che la risposta in frequenza $\tilde{A}(j\omega)$ del filtro fosse perfettamente "rettangolare":

$$A(j\omega) := \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \Omega/2 \\ 0 & |\omega| > \Omega/2 \end{cases}$$

Tali filtri (passa-basso ideale) non sono però implementabili con algoritmi espressi come equazioni alle differenze a memoria finita, e vengono quindi sostituiti con versioni approssimate.

Se il filtro Anti-Aliasing è non ideale, impone una distorsione del segnale. In effetti, l'inclusione di un filtro A.A. non ideale nella catena di elaborazione del segnale, e quindi di controllo, modifica la *dinamica* del sistema complessivo e di ciò va tenuto conto in fase di progettazione.

3.7 OSSERVAZIONE. Il filtro passa basso A.A. ha effetti (tipicamente negativi) sulla stabilità, sulla reiezione del rumore e sul comportamento nel transitorio del sistema. Solitamente vengono utilizzati filtri passa basso del primo o secondo ordine, di Bessel o di Butterworth.

Si consideri il circuito di Fig.9. Esso implementa un filtro di Butterworth del secondo ordine. Utilizzando i seguenti valori: $C_1 = \frac{2\zeta C}{3}$, $C_2 = \frac{3C}{2\zeta}$, $\omega_n = \frac{1}{RC}$, $C^2 = C_1 C_2$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la sua F.d.T. è data da:

$$(3.12) \quad \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{-1}{sR^2C_1C_2 + 3RC_1s + 1} = \frac{-1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{s\zeta}{\omega_n} + 1},$$

con ω_n banda passante ai 3dB del filtro.

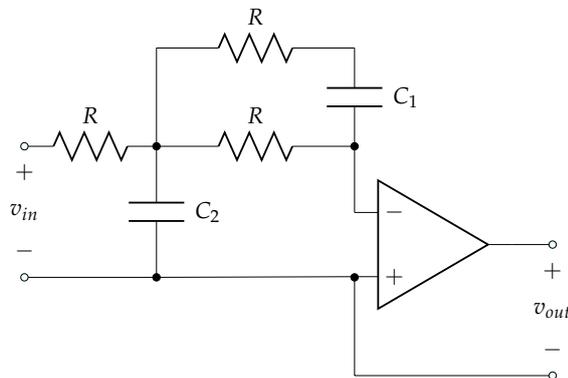


Figura 9: Filtro di Butterworth del secondo ordine.

Un filtro di questo tipo attenua bene il rumore alle alte frequenze, ma come svantaggio ha quello di diminuire il tempo di risposta del sistema, che può avere effetti negativi per la stabilità.

Studiamo più nel dettaglio gli effetti causati dalla presenza del filtro A.A. sulla stabilità del sistema retroazionato di Fig.10. Supponiamo innanzitutto

che il filtro sia del secondo ordine con F.d.T. (essenzialmente il filtro implementato in Figura 9 a meno del segno che può essere sistemato invertendo le polarità):

$$(3.13) \quad A(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

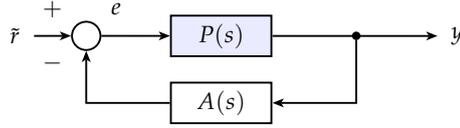


Figura 10: Interconnessione in retroazione con filtro anti-aliasing.

Dal diagramma di Nyquist si osserva che il filtro modifica il margine di fase introducendo uno sfasamento

$$(3.14) \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_n\omega_c}{\omega_n^2 - \omega_c^2}\right),$$

dove ω_c è la pulsazione di attraversamento di $P(s)$. Scegliendo $\omega_n \gg \omega_c$ otteniamo la stima

$$(3.15) \quad \varphi \simeq -2\frac{\xi\omega_c}{\omega_n}.$$

Definiamo ora l'attenuazione del filtro alla pulsazione di Nyquist $\frac{\Omega}{2}$ (con Ω pulsazione di campionamento); essa è definita da

$$(3.16) \quad a = \left| \frac{1}{A\left(j\frac{\Omega}{2}\right)} \right| = \left| 1 - \left(\frac{\Omega}{2\omega_n}\right)^2 + j\frac{\Omega\xi}{\omega_n} \right|,$$

di modo che, per esempio, diremo che il filtro attenua di un fattore $a = 20$ se $\left| A\left(j\frac{\Omega}{2}\right) \right| = 1/20$. Per pulsazioni $\Omega \gg 2\omega_n$ l'attenuazione a è approssimata da

$$(3.17) \quad a \simeq \left(\frac{\Omega}{2\omega_n}\right)^2.$$

Scrivendo ω_n in funzione dell'attenuazione, dalla (3.17) e sostituendo il risultato ottenuto nel ritardo di fase (3.14), si ricava una stima dello sfasamento indotto dal filtro, utile per una progettazione di primo tentativo

$$(3.18) \quad \varphi \simeq -4\xi \left(\frac{\omega_c}{\Omega} \sqrt{a}\right).$$

3.8 ESEMPIO. Siano date le specifiche: $a = 10$, $|\varphi| < 0.1$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sia noto inoltre ω_c . Si trovi Ω , pulsazione di campionamento, che soddisfi le specifiche richieste.

Una immediata applicazione della (3.18) porge

$$|\varphi| < 0.1 \Rightarrow \frac{\Omega}{\omega_c} > \frac{4\sqrt{5}}{0.1} \simeq 90.$$

◇

3.5 Effetto della quantizzazione: cenni

Nei sistemi di elaborazione di dati digitali oltre al campionamento bisogna tenere conto anche della *quantizzazione*. Per effetto della quantizzazione il segnale viene discretizzato nelle ampiezze ed assume valori in un insieme finito di simboli (*livelli di quantizzazione*). Mentre la discretizzazione nel tempo è lineare (almeno per il campionamento PAM) la quantizzazione non è lineare. Per ovviare al problema, tuttavia, si può considerare il segnale in ingresso $x(k)$ al blocco di quantizzazione come somma di due contributi, il valore di quantizzazione assunto, $x_q(k)$, e il rumore introdotto dalla quantizzazione $\Delta x(k)$, *i.e.*

$$(3.19) \quad x(k) = x_q(k) + \Delta x(k).$$

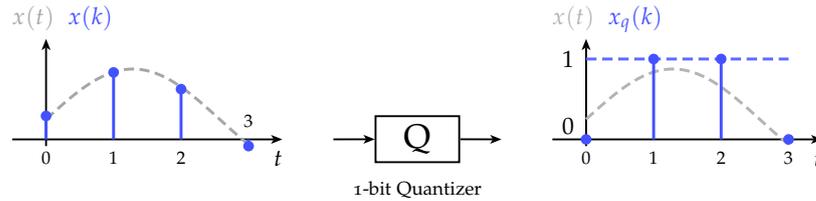


Figura 11: Effetto della quantizzazione sul segnale campionato $x(k)$.

4 ANALISI DI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Consideriamo l'equazione alla differenze

$$(4.1) \quad y(k) = \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) + \sum_{l=0}^N b_l u(k-l).$$

Prendiamo la trasformata \mathcal{Z} della (4.1), ricordando la proprietà di traslazione in k (2.28),

$$\begin{aligned} Y(z) &:= \mathcal{Z}[y(k)] \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right)}_{\tilde{A}(z)} Y(z) + \underbrace{\left(\sum_{l=0}^N b_l z^{-l} \right)}_{B(z)} U(z) + \underbrace{\sum_{r=1}^N a_r \sum_{k=1}^r y(-k) z^{-r+k}}_{C(z)} \\ (4.2) \quad &= \tilde{A}(z)Y(z) + B(z)U(z) + C(z) \end{aligned}$$

Si osservi che, poichè tipicamente l'ingresso $u(k)$ è causale, il termine $C(z)$ dipende solo dal "passato" di $y(k)$. Isolando ora $Y(z)$ otteniamo

$$(4.3) \quad Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)}}_{H(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} = Y_f(z) + Y_l(z)$$

avendo definito $A(z) := 1 - \tilde{A}(z)$. $H(z)$ è detta *Funzione di Trasferimento (F.d.T.) discreta o in z*. Mentre $Y_f(z)$ e $Y_l(z)$ rappresentano le trasformate \mathcal{Z} della *risposta forzata* e *risposta libera*, rispettivamente, del sistema. La prima, come ben noto, dipende dal (la trasformata \mathcal{Z} del) segnale d'ingresso mentre la seconda dalle sole condizioni iniziali $\{y(-l)\}_{l=1}^N$.

La risposta forzata $y_f := \mathcal{Z}^{-1}[Y_f(z)]$ può essere ottenuta anche nel dominio dei tempi k senza l'utilizzo delle trasformate \mathcal{Z} , scrivendo l'ingresso $u(k)$ nella forma

$$(4.4) \quad u(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} u(l)\delta(k-l).$$

Indicando con $h(k)$ la *risposta impulsiva* del sistema con condizioni iniziali identicamente nulle e utilizzando nella (4.4) le proprietà di linearità, causalità ($h(k) \equiv 0$ e $u(k) \equiv 0$ per $k < 0$) e tempo-invarianza del sistema, abbiamo

$$(4.5) \quad \begin{aligned} y(k) = y_f(k) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} u(l)h(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(k-l) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} h(l)u(k-l) = \sum_{l=0}^k h(l)u(k-l) \\ &= h(k) \otimes u(k), \end{aligned}$$

e per il Teorema di convoluzione (2.47) deve essere:

$$(4.6) \quad H(z) = \mathcal{Z}[h(k)],$$

ossia $H(z)$ è la trasformata \mathcal{Z} della risposta impulsiva.

Per sistemi LTI a memoria finita, $H(z)$ è razionale, è quindi la relativa anti-trasformata si ottiene mediante la decomposizione in fratti semplici illustrata in §2.5. Rivediamo i passi principali del procedimento per il caso in questione: da $H(z)$ si ricava la parte razionale propria con grado relativo nullo $H_0(z)$,

quindi si procede nell'ordine

$$\begin{aligned} \frac{H_0(z)}{z} &= \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} A_{i,l} \frac{1}{(z-p_i)^{l+1}} + \sum_{l=0}^{n_0} \frac{A_{0,l}}{z^{l+1}} \\ \Rightarrow H_0(z) &= \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} A_{i,l} \frac{z}{(z-p_i)^{l+1}} + \sum_{l=0}^{n_0} A_{0,l} z^{-l} \\ \xrightarrow{z^{-1}} h^0(k) &= \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} \frac{A_{i,l}}{p_i^l} \underbrace{\binom{k}{l} p_i^k}_{\text{modi del sistema}} + \sum_{l=0}^{n_0} A_{0,l} \delta(k-l) \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \Rightarrow h(k) = h^0(k-r).$$

In definitiva $h(k)$ è la versione ritardata di $h^0(k)$ (infatti essendo per ipotesi $h(k)$ causale non abbiamo eventuali condizioni iniziali). Si possono fare ora alcune osservazioni:

1. Tramite il procedimento illustrato in (4.7) abbiamo scomposto $h(k)$ in *modi elementari discreti*, i quali hanno il seguente comportamento:

- se $|p_i| < 1 \Rightarrow$ modi convergenti (stabili);
- se $|p_i| > 1 \Rightarrow$ modi divergenti (instabili);
- se $|p_i| = 1 \Rightarrow$ modi divergenti per $n_i > 1$, limitati altrimenti.

2. se si ha il solo polo $p = 0$ con molteplicità n_0 , la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{N(z)}{z^{n_0}}$$

dove $N(z)$ è un polinomio di grado pari al più a n_0 . Possiamo dunque riscrivere la la funzione di trasferimento nella forma

$$H(z) = \sum_{l=0}^{n_0} \frac{A_l}{z^l}$$

dove A_{n_0} è certamente non nullo. La risposta impulsiva risulta quindi

$$(4.8) \quad h(k) = \sum_{l=0}^{n_0} A_l \delta(k-l).$$

La sommatoria in (4.8) è finita e quindi $h(k)$ va esattamente a zero in n_0 passi. Questo tipo di sistemi, che non hanno un analogo a tempo continuo, prendono il nome di *sistemi FIR (Finite-Impulse Response)*.

3. Il grado relativo r , come già accennato, corrisponde al numero di passi di ritardo intrinseco, cioè vero e proprio, a differenza del ritardo di sistemi a tempo continuo.

Vediamo ora un esempio che, nella sua semplicità, evidenzia alcuni aspetti su cui fare attenzione per evitare grossolani errori.

4.1 ESEMPIO. Consideriamo il sistema descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + ay(k-1) = u(k) + au(k-1).$$

La F.d.T. del sistema è

$$(4.9) \quad H(z) = \frac{z+a}{z+a} = 1.$$

Giunti a questo punto è errato dire che $y(k) = u(k)$ in quanto bisogna tenere conto delle condizioni iniziali! Non possiamo dimenticarci della risposta libera $y_l(k)$ che in questo caso risulta pari a $y_l(k) = (-a)^k y(0)$. Infatti nel caso di $|a| > 1$ il sistema diverge se $y(0) \neq 0$! Questo esempio mostra quindi che:

- quando si lavora con la F.d.T. si guarda ad una sola parte del comportamento del sistema, la risposta forzata $y_f(k)$;
- se ci sono cancellazioni zero-polo bisogna prestare attenzione alla risposta libera $y_l(k)$;
- se i parametri del sistema, in questo caso a , sono soggetti a piccole variazioni, si possono avere problemi in presenza delle cancellazioni di poli instabili.

◇

4.1 Richiami di Stabilità dei Sistemi a Tempo Discreto

4.2 DEFINIZIONE (asintotica stabilità). Un sistema LTI (Σ) si dice *asintoticamente stabile* se

$$(4.10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y_l(k) = 0 \quad \forall \text{ condizione iniziale } \{y(-1), y(-2), \dots\},$$

ove y_l è la risposta libera del sistema relativa a $u(k) \equiv 0, \forall k$.

Dalla (4.3) si vede quindi che (Σ) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli zeri di $A(z)$ hanno modulo minore (strettamente) di uno e quindi sono all'interno (strettamente) del cerchio unitario S^1 .

4.3 DEFINIZIONE (BIBO stabilità). Un sistema LTI (Σ) si dice *BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabile* se la risposta forzata y_f a un segnale (causale) limitato è limitata, *i.e.*

$$(4.11) \quad \forall u \in \ell_+^\infty, y_f(k) = h(k) \otimes u(k) \in \ell_+^\infty.$$

La risposta forzata $y_f(k) = \sum_{l=0}^k h(l)u(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(k-l)$ è un funzionale lineare su ℓ_∞ , $\Sigma_l^{(k)} : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordando che i funzionali lineari limitati su ℓ_∞ sono associati alle funzioni modulo-sommabili ℓ_1 allora il sistema (Σ) è BIBO stabile se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < M$, *i.e.* $h \in \ell_1$.

Inoltre dalla decomposizione in modi elementari di (Σ) si ha che il sistema è BIBO stabile se e solo se i poli di $H(z)$ sono all'interno (strettamente) del cerchio unitario, cioè $|p_i| < 1$.

Bisogna infine porre particolare attenzione ai seguenti fatti:

- (Σ) asintoticamente stabile \implies (Σ) BIBO stabile, in quanto i poli di $H(z)$ sono un sottoinsieme degli zeri di $A(z)$;
- in assenza di cancellazioni zero-polo in $H(z)$: (Σ) asintoticamente stabile \iff (Σ) BIBO stabile.

4.2 Metodi per determinare la BIBO stabilità

Dato un sistema il cui comportamento ingresso-uscita sia descritto da una funzione razionale $H(z)$

$$(4.12) \quad H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)^{n_i}},$$

dall'analisi svolta fino a questo punto siamo in grado di decidere se il sistema è o meno BIBO stabile studiando la posizione dei poli di $H(z)$. Tuttavia se conosciamo solo $D(z)$ e non la sua forma fattorizzata esistono dei metodi veloci per determinare se tutte le radici sono all'interno del cerchio unitario?

È ben noto che nel caso a tempo continuo esistono criteri quali quello di Routh-Hurwitz per decidere se un polinomio è di *Hurwitz*, ossia se tutti i suoi zeri sono a sinistra dell'asse immaginario. Nel caso a tempo discreto, è invece più rilevante stabilire se gli zeri di un polinomio assegnato si trovano tutti all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano complesso. A tal fine risulta utile la seguente definizione.

4.4 DEFINIZIONE. Un polinomio $A(z)$ si dice *polinomio di Schur* se tutti i suoi zeri si trovano all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano complesso.

Considereremo due approcci per stabilire se un polinomio è di Schur:

1. utilizzare un criterio "dedicato": *criterio di Jury*.
2. ricondursi al caso a tempo continuo per poi applicare i metodi già noti: *trasformazione bilineare*.

Vediamo dunque i due criteri nel dettaglio.

Criterio di Jury

Sia $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$ con $a_0 > 0$. Costruiamo la *tabella di Jury* come rappresentato di seguito ove i coefficienti b_i e, per analogia, i successivi c_i, \dots, r_i si calcolano come

$$(4.13) \quad b_i := \frac{1}{a_0} \det \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{bmatrix}.$$

a_0	a_1	a_2	\cdots	\cdots	\cdots	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\cdots	\cdots	\cdots	a_0
b_0	b_1	b_2	\cdots	\cdots	b_{n-1}	0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\cdots	\cdots	b_0	0
c_0	c_1	c_2	\cdots	c_{n-2}	0	0
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\cdots	c_0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
r_0	0	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	0

Si noti che dalla (4.13) si ha che $b_n = 0$, come rappresentato nella tabella. Vale il seguente risultato:

4.5 TEOREMA. *Si consideri un polinomio $A(z)$ e la corrispondente tabella di Jury costruita come illustrato più sopra. Il polinomio $A(z)$ è di Schur se e solo se tutti i coefficienti $a_0, b_0, c_0, \dots, r_0$ hanno lo stesso segno.*

Se indichiamo con $\{p_k\}_{k=1}^n$ le radici di $A(z)$ il teorema precedente è riassunto dalla seguente formula:

$$(4.14) \quad |p_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n \iff \frac{b_0}{a_0} > 0, \frac{c_0}{a_0} > 0, \dots, \frac{r_0}{a_0} > 0.$$

Si noti che, appurato che, ad esempio, $b_0 > 0$, si può trascurare nel calcolo della riga successive il fattore $1/b_0$ che apparirebbe in (4.13), in quanto riscalfare una coppia di righe per una costante positiva non cambia le conclusioni sul segno degli elementi delle seguenti.

4.6 ESEMPIO. Si consideri l'equazione:

$$z^3 + z^2 + z + \frac{1}{2} = 0.$$

Costruiamo la relativa tabella di Jury (Tab.1) come descritto sopra.

1	1	1	1/2
1/2	1	1	1
3/4	1/2	1/2	0
1/2	1/2	3/4	0
5/12	1/6	0	0
1/6	5/12	0	0
7/20	0	0	0

Tabella 1: Tabella di Jury relativa all'esempio 4.6.

In questo caso tutti i coefficienti della prima colonna della tabella sono strettamente positivi, allora si può concludere che le radici sono all'interno del

cerchio unitario. In effetti da un'analisi al calcolatore si ottengono le tre radici $p_{1,2} = -0.1761 \pm j0.8607$, $p_3 = -0.6487$, di modulo $|p_{1,2}| = 0.878$, $|p_3| = 0.647$.

◇

Trasformazione bilineare o di Möbius

Questa trasformazione che indicheremo con $M(\cdot)$, mappa biunivocamente i punti interni al cerchio unitario (eccetto il punto $(0, -1)$ il quale verrebbe mappato in $-\infty$) nel semipiano sinistro del piano complesso:

$$(4.15) \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto s = M(z) := \frac{z-1}{z+1}.$$

Si noti che

$$z = M^{-1}(s) = \frac{1+s}{1-s}.$$

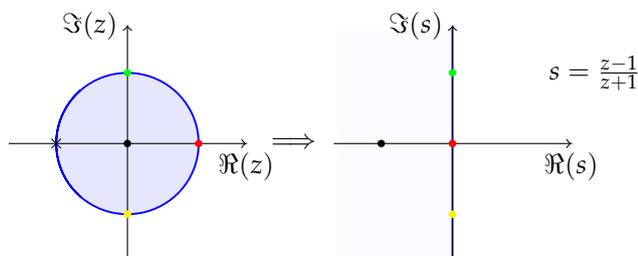


Figura 12: Trasformazione bilineare o di Möbius.

Vediamo in formule quanto mostrato graficamente in Fig.12. A tal proposito sia $p_i = a + jb$ radice di un polinomio $A(z)$ tale che $|p_i| = a^2 + b^2 < 1$. Utilizzando allora il cambio di variabili (4.15) abbiamo:

$$p_i^s := \frac{p_i - 1}{p_i + 1} = \frac{a^2 - 1 + b^2 + j2b}{(a + 1)^2 + b^2},$$

e quindi effettivamente

$$\Re(p_i^s) = \frac{a^2 - 1 + b^2}{(a + 1)^2 + b^2} < 0.$$

Quindi, data una funzione razionale $H(z)$, possiamo studiarne la stabilità calcolando

$$H_c(s) := H(z) \Big|_{z=M^{-1}(s)=\frac{1+s}{1-s}}$$

e utilizzando i criteri di Routh-Hurwitz noti da Controlli Automatici (si veda anche l'Appendice C.1 a queste note).

5 TRADUZIONE ED ANALISI DI INTERCONNESSIONI CONTINUO/DISCRETO

Lezione 7 (2 ore)
5 aprile 2013

Grazie alla linearità e al teorema di convoluzione, il comportamento ingresso/uscita delle interconnessioni di sistemi LTI causali a memoria finita si può dedurre con le usuali regole di calcolo, già viste in controlli automatici.

A titolo di esempio, si consideri il sistema interconnesso a tempo continuo di Fig.13 (in alto) con la nota F.d.T. $W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$. Nel caso a tempo discreto, se tutti i blocchi del sistema sono discreti e sincroni (Fig.13 in basso), allora per il Teorema di convoluzione e la linearità abbiamo, in perfetta analogia:

$$(5.1) \quad \tilde{W}(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)}$$

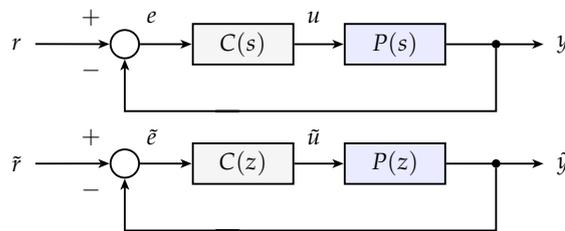


Figura 13: Interconnessione di sistemi a tempo continuo e suo equivalente a tempo discreto.

Il resto della sezione sarà dedicato ai metodi di traduzione esatta del comportamento ingresso/uscita di sistemi continui nel discreto tenendo conto dell'effetto del campionamento PAM e dell'interfaccia D/A.

Avendo già analizzato l'effetto del campionamento PAM, prendiamo ora in considerazione lo schema a blocchi di Fig.14 caratterizzato dalla presenza di convertitori A/D e D/A. Studiamo in particolare il comportamento dell'interfaccia D/A: una scelta tipica (almeno per sistemi di controllo) è l'interpolatore di ordine zero (*Zero Order Holder*, ZOH, indicato con H_0 nelle interconnessioni), il quale mantiene il segnale costante al valore assunto inizialmente nell'intero periodo di campionamento.

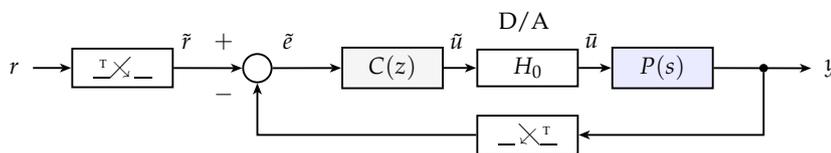


Figura 14: Interconnessione di sistemi a tempo continuo e discreto.

In termini del segnale continuo modulato con il treno di impulsi

$$u_\delta(t) := \sum_k u(k)\delta(t - kT)$$

si può pensare a H_0 come a un integratore a finestra mobile su $(t - T, t]$. Il segnale in uscita da H_0 risulta quindi pari a:

$$(5.2) \quad \bar{u}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k) (\delta_{-1}(t - kT) - \delta_{-1}(t - (k + 1)T)),$$

che nel dominio s diviene

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \bar{U}(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u(k) \frac{1}{s} (e^{-ksT} - e^{-(k+1)sT}) \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u(k) e^{-ksT}}_{U_\delta(s) = \mathcal{L}[u_\delta(t)]}, \end{aligned}$$

dove T è il periodo di campionamento. Dunque dalla (5.3) si vede immediatamente che la F.d.T. del ZOH nella variabile s è

$$(5.4) \quad H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Utilizzeremo in seguito questo risultato per il calcolo della funzione di trasferimento discreta equivalente.

5.1 OSSERVAZIONE.

- In alternativa all'interpolatore di ordine zero è possibile in linea di principio utilizzare interpolatori di ordine superiore, ad esempio il *first order hold* (FOH). Essi tuttavia, a causa dell'azione derivativa, tipicamente accentuano il rumore nel segnale ricostruito;
- Gli interpolatori di ordine zero sono generalmente più facile da costruire (richiedono amplificatori operazionali e resistori), veloci ed economici;
- Anticipiamo, ma vedremo più avanti in dettaglio, che una caratteristica degli interpolatori ZOH è quella di ricostruire un segnale che "assomiglia" a quello originale con ritardo di mezzo periodo di campionamento.

5.1 Conversione di sistemi I/O

Nell'analisi e progettazione di sistemi di controllo digitale sono di particolare interesse due tipi di conversione:

1. *Modello del processo dal continuo al discreto*: rappresentato in Fig.15 e utilizzato ad esempio quando si vuole progettare il controllore nel discreto per un processo a tempo continuo.
2. *Modello del controllore dal discreto al continuo*: rappresentato in Fig.16 e utilizzato ad esempio quando si ha già un progetto del controllore continuo e si vuole realizzarne la versione discreta tramite μP .

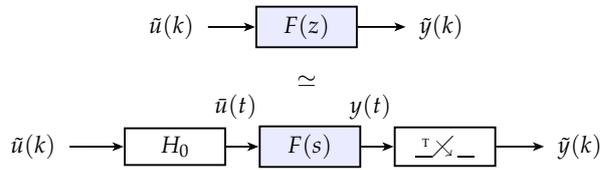


Figura 15: Modello del processo dal continuo al discreto.

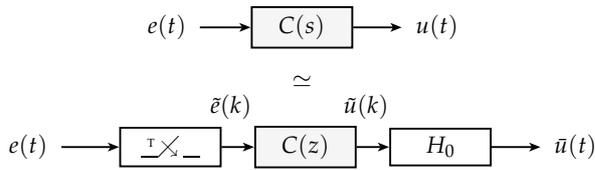


Figura 16: Modello del controllore dal discreto al continuo.

In altre parole, nel primo caso siamo interessati ad avere un metodo per descrivere con una F.d.T. a tempo discreto un sistema a tempo continuo inserito in un'interconnessione con segnali a tempo discreto tra ZOH e campionatore, mentre nel secondo vorremmo trovare una F.d.T. a tempo continuo che approssimi il comportamento di un sistema discreto tra campionatore e ZOH in un'interconnessione con segnali a tempo continuo.

Concentriamoci sul primo caso, e consideriamo ora un sistema continuo *causale* con F.d.T. $F(s)$ e cerchiamo di capire cosa succede se interponiamo tale sistema tra un holdere e un campionatore (Fig.17), supponendo campionamento e tenuta *sincroni* di periodo T .

Studiamo l'effetto di $H(s) := F(s)H_0(s)$ sul segnale d'ingresso campionato per modulazione

$$u_\delta(t) = \sum_{l=0}^{\infty} u(l)\delta(t - lT),$$

ipotizzando $h(t) := \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(t - \tau)u_\delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t h(t - \tau) \left(\sum_{l=0}^{\infty} u(l)\delta(\tau - lT) \right) d\tau \\ (5.5) \quad &= \sum_{l=0}^{\infty} u(l) \left(\int_0^t h(t - \tau)\delta(\tau - lT) d\tau \right). \end{aligned}$$

Si noti che

$$\int_0^t h(t-\tau)\delta(\tau-lT) d\tau = \begin{cases} h(t-lT) & \text{se } lT \leq t \\ 0 & \text{se } lT > t \end{cases}$$

Si noti anche che, poiché il sistema di funzione di trasferimento $F(s)$ è causale per ipotesi e causale è chiaramente anche l'holder di funzione di trasferimento $H_0(s)$, si ha che $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ è una funzione causale ossia nulla per valori negativi di t . Pertanto si ha

$$\int_0^t h(t-\tau)\delta(\tau-lT) d\tau = h(t-lT).$$

Sostituendo questa espressione nella (5.5) e indicando con $\tilde{h}(k) := h(kT)$, si ottiene la versione campionata di $y(t)$ che risulta essere

$$(5.6) \quad \tilde{y}(k) = y(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{h}(k-l)u(l).$$

Passando alle \mathcal{Z} trasformate la (5.6) diventa, grazie al teorema di convoluzione:

$$(5.7) \quad \tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z)\tilde{U}(z),$$

con $H(z)$ trasformata \mathcal{Z} di \tilde{h} , versione campionata di $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_0(s)F(s)]$.

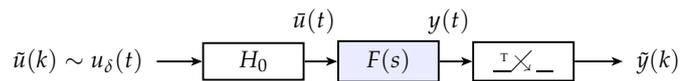


Figura 17: Schema a blocchi dell'architettura holder+ $F(s)$ +campionatore.

Sia $\mathcal{S}[\cdot, T]$ l'operatore di campionamento di periodo T , definito da:

$$\mathcal{S}[f(t), T] = \tilde{f}(k) = f(kT), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Talvolta, per brevità indicheremo l'operatore $\mathcal{S}[\cdot, T]$ anche con l'espressione $\mathcal{S}_T[\cdot]$.

Da quanto osservato sopra, utilizzando la relazione (5.4) e la linearità degli operatori di antitrasformazione di Laplace, di campionamento e di trasforma-

ta \mathcal{Z} abbiamo

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}(z) &= \mathcal{Z} \left[\mathcal{S}[\mathcal{L}^{-1}[H_0(s)F(s)]; T] \right] \\
 &= \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} F(s) \right]; T \right] \right] \\
 (5.8) \quad &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s} \right]; T \right] \right].
 \end{aligned}$$

Spesso, con abuso di notazione, si indica $H(z) := (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{F(s)}{s} \right]$. Si noti che la traduzione effettuata è esatta.

5.2 OSSERVAZIONE.

- Si deve porre attenzione al fatto che l'effetto sul segnale d'uscita della sequenza *tenuta+campionamento* è diverso da quello causato dalla sequenza inversa *campionamento+tenuta*. Nel primo caso l'operazione complessiva è l'operatore identità *sui segnali a tempo discreto*, nel secondo invece l'uscita $\hat{f}(t)$ risulta essere tipicamente diversa dall'ingresso $f(t)$: è evidente che in questo caso $\hat{f}(t)$ risulta *sempre* una funzione costante a tratti. Evidentemente tale trasformazione fa perdere l'informazione relativa al segnale continuo originale fuori dagli istanti di campionamento.
- Nonostante l'osservazione precedente, il metodo illustrato può venire utilizzato per *approssimare* con un sistema discreto un progetto di controllore continuo: si noti infatti che tale traduzione, rappresentata in Figura 16 implica l'utilizzo di campionatore e ZOH nell'ordine dato, che quindi comporta perdita di informazione. In tal uso il metodo è chiamato anche *conversione per invarianza della risposta a gradino*, in quanto, ricordando che $\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$ e $\mathcal{Z}^{-1}[\delta_{-1}(k)] = (1 - z^{-1})^{-1}$, la (5.8) è equivalente a imporre

$$(5.9) \quad \mathcal{Z}^{-1} \left[H(z) \frac{z}{z-1} \right] \equiv \mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s} \right]; T \right],$$

ovvero che la risposta *a gradino* del sistema a tempo discreto "approssimato" coincida alla risposta del sistema continuo desiderato negli istanti di campionamento.

- Si noti che per $F(s)$ razionale, grazie alle regole di antitrasformazione di Laplace e \mathcal{Z} -trasformata, i poli di $F(s)$ si trasformano in poli di $H(z)$ seguendo la relazione già vista per il campionamento:

$$s = p_i \rightarrow z = e^{p_i T}$$

Ma cosa succede agli zeri? In generale data una F.d.T. $F(s)$ si ha che:

- alcuni zeri di $F(s)$ diventano zeri di $F(z)$ (F.d.T. "campionata") ma *non* rispettano la relazione $z = e^{sT}$ (ciò avviene solo al limite $T \rightarrow 0$);

- in $F(z)$ appaiono altri zeri dovuti al campionamento.
- La presenza di tale zeri aggiuntivi (o *evocati*) si può almeno intuitivamente spiegare come segue: se la $\frac{F(s)}{s}$ è la risposta indiciale di un sistema continuo, strettamente proprio e senza ritardo, essa vale zero in $t = 0$ ed è diversa da zero quasi ovunque per $t > 0$, essendo una combinazione lineare di modi. Allora tipicamente la $H(z)$ data dalla (5.8) ha grado relativo pari a 1, essendo (a meno del termine $1 - z^{-1} = (z - 1)/z$ che però ha grado relativo nullo) la trasformata \mathcal{Z} della versione campionata della stessa risposta indiciale, *indipendentemente dal grado relativo di $F(s)$* . Ciononostante potrebbe darsi che che
 - $F(s)$ non sia razionale fratta ed abbia un “ritardo interno” $T' > T$:
 $W(s) = e^{T's} F_0(s)$;
 - $F(s)$ sia razionale fratta ma abbia zeri instabili tali che $f(T) = 0$.

In questi casi, il grado relativo risulta chiaramente almeno pari a 2. Concludiamo la sezione con un esempio di utilizzo della (5.8).

5.3 ESEMPIO. Convertire in z mediante la (5.8) la F.d.T. $G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$. Svolgendo i conti abbiamo

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta_{-1}(t) - 2e^{-t} + e^{-2t},$$

da cui

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\delta \circ 1 - (2e^{-t})^k + (e^{-2t})^k \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{z}{z-e^{-2T}} \right) \\ &= \frac{(e^{-T}-1)^2(z+e^{-T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

Si noti in particolare come il grado relativo r sia passato da 2 a 1, con l'introduzione di uno zero $z_1 = -e^{-T}$ non presente a tempo continuo. \diamond

5.2 Stabilità delle interconnessioni

Stabilità di una retroazione negativa

Consideriamo lo schema a blocchi di Fig.18, con F.d.T.

$$(5.10) \quad W(z) = \frac{kC(z)P(z)}{1+kC(z)P(z)} = \frac{kN_c(z)N_p(z)}{\underbrace{D_c(z)D_p(z)}_{=:D(z)} + k \underbrace{N_c(z)N_p(z)}_{=:N(z)'}}$$

dove si è posto $C(z) = \frac{N_c(z)}{D_c(z)}$ e $D(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)}$.

Per studiare la stabilità di $W(z)$ si distinguono i casi

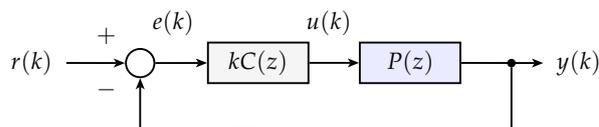


Figura 18: Retroazione negativa con guadagno k .

1. k costante: si utilizzano i criteri già visti (criterio Jury, trasformazione bilineare);
2. k variabile: *luogo delle radici*.

Per il tracciamento del luogo delle radici in z si utilizzano le stesse regole del caso a tempo continuo (si veda l'appendice per un compendio), con l'accortezza di considerare come luogo di punti critici di attraversamento non più $\Re(z) = 0$, come nel caso continuo, ma $\Re(z)^2 + \Im(z)^2 = 1$, ossia la circonferenza unitaria. La regione di stabilità infatti si trova ora all'interno del cerchio unitario.

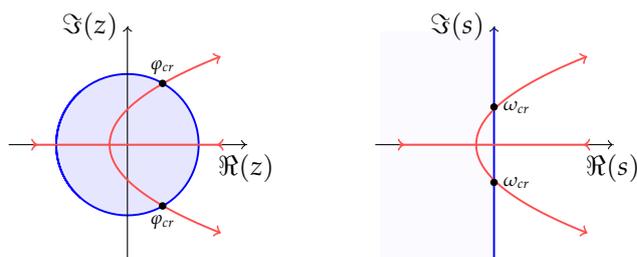


Figura 19: Luogo delle radici (in rosso) nel dominio z e s e punti critici di attraversamento.

Per trovare i guadagni critici k_{cr} per i quali si passa da un comportamento stabile a instabile si deve risolvere l'equazione

$$(5.11) \quad k_{cr}N(e^{j\varphi_{cr}}) + D(e^{j\varphi_{cr}}) = 0.$$

Questo è particolarmente utile nel caso in cui dal luogo delle radici si evince che $z = \pm 1$ sono inclusi tra i punti di attraversamento.

5.4 ESEMPIO. Sia $N(z) = c \in \mathbb{R}^+$ e $D(z) = z + \frac{1}{2}$. Il grado relativo è $r = 1$ e quindi si ha un asintoto. Il luogo (positivo) delle radici è mostrato in Fig. 20.

In questo caso l'equazione (5.11) è semplice da risolvere e porge

$$k_{cr}c + (-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow k_{cr} = \frac{1}{2c}.$$

◇

5.5 ESEMPIO. Consideriamo lo schema a blocchi di Fig.21 in alto, con $P(s) = \frac{1}{s+1}$ e cerchiamo il suo sistema a tempo discreto equivalente (Fig.21 in basso).

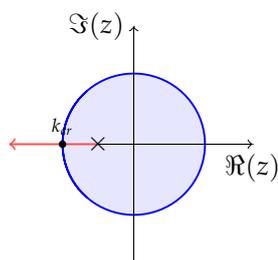


Figura 20: Luogo delle radici (in rosso) dell'esempio 5.4.

Dalla (5.8) abbiamo che, con un po' di conti,

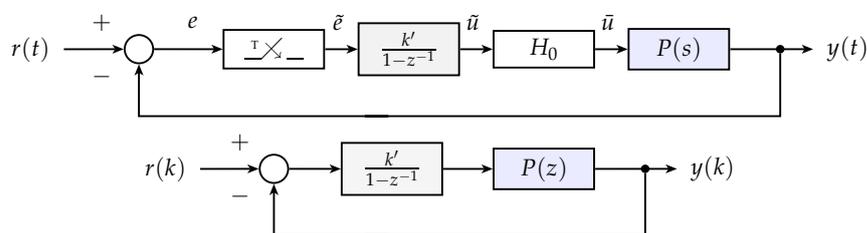


Figura 21: Schema a blocchi dell'esempio 5.5 e suo equivalente a tempo discreto.

$$\begin{aligned}
 P(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right]; T \right] \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right]; T \right] \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\delta_{-1}(t) - e^{-t}; T \right] \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right) \\
 &= \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.
 \end{aligned}$$

Vogliamo ora studiare la stabilità in catena chiusa e la sua dipendenza da k' e T :

$$k' \frac{N(z)}{D(z)} = k' \frac{z}{z-1} \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = k \frac{z}{(z-1)(z - e^{-T})},$$

dove è stato definito $k := k'(1 - e^{-T})$. Il relativo luogo delle radici è rappresentato in Fig.22, dove si vede che $\varphi_{cr} = \pi$, per cui dalla (5.11)

$$0 = k_{cr} + (-1 - 1)(-1 - e^{-T}) \Rightarrow k_{cr} = 2(1 + e^{-T}) \Rightarrow k'_{cr} = \frac{2(1 + e^{-T})}{1 - e^{-T}}.$$

Dall'espressione trovata per k'_{cr} si nota che per T grandi k'_{cr} diminuisce e

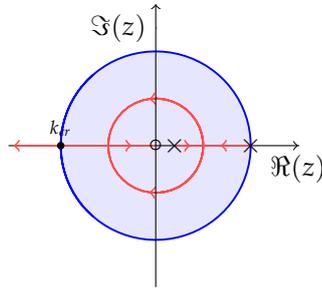


Figura 22: Luogo delle radici qualitativo (in rosso) dell'esempio 5.5.

quindi si rischia di uscire dalla regione di stabilità.

◇

In generale per calcolare i punti di attraversamento della circonferenza unitaria si può ricorrere alla trasformazione bilineare (4.15), che, ricordiamo, è una mappa biiettiva $\mathcal{B}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \{\Re(\mathbb{C}) < 0\}$, $z = e^{j\varphi} \mapsto w = j\vartheta$, a meno del caso $z = -1$, il quale tuttavia come notato in precedenza è facile da studiare tramite (5.11). Grazie a tale cambiamento di variabili la (5.11) può quindi essere ricondotta alla forma

$$(5.12) \quad kN(z) + D(z) = 0 \Rightarrow kN\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + D\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 0$$

ossia, definendo $N'(w) := N\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ e $D'(w) := D\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$

$$kN'(w) + D'(w) = 0,$$

e quindi i k_{cr} possono essere calcolati con i metodi classici (Tabella di Routh scritta in funzione di k) e applicando la trasformazione inversa si possono ottenere anche i z_{cr} e gli angoli φ_{cr} , risolvendo $e^{j\varphi_{cr}} = \frac{1+j\omega_{cr}}{1-j\omega_{cr}}$.

In alternativa i punti di attraversamento si possono trovare applicando il criterio di Jury in funzione di k .

5.6 ESEMPIO. Si trovino i k_{cr} del sistema retroazionato di Fig.23.

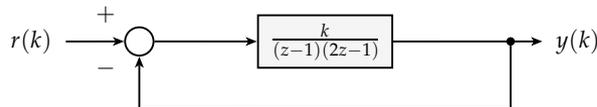


Figura 23: Sistema a catena chiusa dell'esempio 5.6.

In questo caso, il denominatore della funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è $Q(z) := k + 2z^2 - 3z + 1$ con $z = e^{j\varphi}$. Operando la

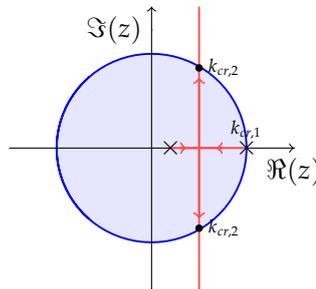


Figura 24: Luogo delle radici qualitativo (in rosso) dell'esempio 5.6.

trasformazione bilineare

$$Q\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 2\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} - 3\frac{(1+w)(1-w)}{(1-w)^2} + (k+1)\frac{(1-w)^2}{(1-w)^2}.$$

Il numeratore di Q

$$N_Q(w) = (6+k)w^2 + 2(1-k)w + k,$$

è hurwitziano per $0 < k < 1$. Quindi $k_{cr,1} = 0 \Rightarrow w_{cr,1} = 0 \Rightarrow z_{cr,1} = 1$ e $k_{cr,2} = 1 \Rightarrow w_{cr,2,3} = \pm j\frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow z_{cr,2,3} = \frac{3 \pm j\sqrt{7}}{4}$. \diamond

Stabilità interna di un'interconnessione

Si consideri un'interconnessione descritta da uno schema a blocchi, ove ad ogni blocco (SISO) è associata una F.d.T. $P_i(z)$, con relativa uscita y_i . Si aggiunga un ingresso ausiliario u_i tramite un nodo sommatore immediatamente prima di ogni blocco.

5.7 DEFINIZIONE. L'interconnessione originale si dice *internamente stabile* se la F.d.T. (complessiva, tenendo conto di tutta l'interconnessione) $W_{il}(z)$ da ogni ingresso u_i a ogni uscita y_i è BIBO stabile per ogni blocco.

5.8 ESEMPIO. Si consideri lo schema a blocchi di Fig.25, con $F(z) = \frac{z+2}{z-1/2}$ e $G(z) = \frac{z-1/2}{(z+2)(z-1/3)}$. In questo caso sebbene la F.d.T. da r a y sia BIBO stabile

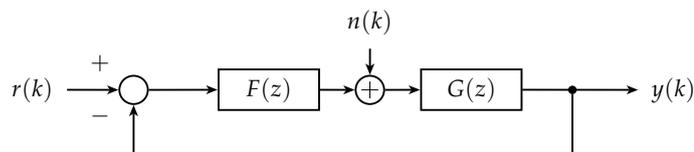


Figura 25: Schema a blocchi dell'esempio 5.8.

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{z + \frac{2}{3}},$$

la F.d.T. da n a y risulta instabile per la mancata cancellazione del polo in -2

$$\frac{Y(z)}{N(z)} = \frac{z - \frac{1}{2}}{(z + 2)(z + 2/3)}.$$

Quindi in questo caso il sistema non è internamente stabile. \diamond

5.9 PROPOSIZIONE. *Consideriamo la classe di interconnessioni con un unico anello di retroazione negativa. Se $P_l(z) = \frac{N_l(z)}{D_l(z)}$ sono tutti coprimi il sistema è internamente stabile se e solo se*

1. $\bar{D}(z) := \prod_l N_l(z) + \prod_l D_l(z)$ ha radici p_i tali che $|p_i| < 1$,
2. $\bar{D}(z)$ ha lo stesso grado di $\prod_l D_l(z)$.

6 FUNZIONI DI RISPOSTA ARMONICA: CENNI

Lezione 9 (2 ore)
12 aprile 2013

A tempo continuo uno degli strumenti chiave per la progettazioni di controllori e per l'analisi della stabilità è lo studio della risposta a segnali periodici o, più in generale, armonici (cfr. diagrammi di Bode e di Nyquist). Analizziamo il caso a tempo discreto. Sia $G(z)$ la F.d.T. di un sistema LTI a memoria finita e sia $u(k) = u_0 \cos(k\vartheta_0 + \Psi_0)$ l'ingresso del sistema. Come per i sistemi a tempo continuo l'uscita (forzata) tende asintoticamente ad un segnale con la stessa pulsazione ϑ_0 dell'ingresso

$$(6.1) \quad y(k) \longrightarrow y_0 \cos(k\vartheta_0 + \chi_0),$$

con ampiezza e fase determinati dalla *risposta armonica*:

$$(6.2) \quad G(e^{j\vartheta}) = M(\vartheta)e^{j\varphi(\vartheta)},$$

$$(6.3) \quad y_0 = M(\vartheta_0)u_0 = |G(e^{j\vartheta_0})|u_0,$$

$$(6.4) \quad \chi_0 = \Psi_0 + \varphi(\vartheta_0) = \Psi_0 + \arg(G(e^{j\vartheta_0})).$$

Se $G(z)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile allora vale $y(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y_f(k)$ per ogni condizione iniziale.

6.1 OSSERVAZIONE. Essendo la risposta armonica una funzione di $e^{j\vartheta}$, essa è periodica di periodo 2π ed è anche simmetrica se G è a coefficienti reali: $G(e^{-j\vartheta}) = G(e^{j\vartheta})^*$. Quindi per conoscere $G(e^{j\vartheta})$ basta studiarla per $\vartheta \in [0, \pi]$.

Sorge a questo punto un problema: non esiste un metodo sistematico per tracciare l'andamento asintotico della risposta armonica. Tali andamenti possono essere tracciati qualitativamente o per via numerica.

6.1 Diagramma polare o di Nyquist

Come nel caso continuo il diagramma di Nyquist è la rappresentazione nel piano complesso della risposta armonica $G(e^{j\vartheta})$

$$(6.5) \quad G(e^{j\vartheta}) = \Re(G(e^{j\vartheta})) + j\Im(G(e^{j\vartheta})), \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Esso si rivela un utile strumento nello studio della stabilità grazie al *criterio di Nyquist*

6.2 PROPOSIZIONE (criterio di Nyquist). Dato un sistema LTI a tempo discreto con F.d.T. dell'anello $G(z)$. Siano

- N : numero di giri (in senso orario) di $G(e^{j\vartheta})$ attorno a $-1 + j0$;
- Z : numero di zeri di $1 + G(z)$ di modulo maggiore di 1;
- P : numero di poli di $G(z)$ di modulo maggiore di 1.

Allora il sistema in catena chiusa è BIBO stabile ($Z = 0$) se e solo se $N = -P$.

Tale risultato si dimostra riconducendosi al caso a tempo continuo tramite trasformazione bilineare; in altri termini si fa coincidere $G(e^{j\theta})$ con $\hat{G}(j\omega)$, ove $\hat{G}(w) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}}$.

6.3 COROLLARIO (criterio di Nyquist ridotto). Se $P = 0$ allora il sistema in catena chiusa è BIBO stabile ($Z = 0$) se e solo se $N = 0$.

7 PROBLEMA DEL CONTROLLO E FASI DI PROGETTAZIONE

Per specificare un problema di controllo dobbiamo specificare i seguenti “ingredienti”:

1. Un modello nominale del sistema da controllare (più l'eventuale incertezza del modello);
2. Le variabili di controllo ed eventuali loro vincoli, o limiti nella loro scelta.
3. delle specifiche sulle uscite del sistema. Quelle di nostro interesse in particolare riguardano:
 - stabilità (asintotica, BIBO, interna) del sistema da controllare,
 - problemi di regolazione e inseguimento (il vero e proprio obiettivo del controllo) e quindi specifiche sul *regime permanente*,
 - specifiche sul *regime transitorio*, le quali seguono due possibili approcci nel tempo o nella frequenza e si suddividono a loro volta in specifiche riguardanti
 - precisione dinamica
 - trade-off tra prontezza e filtraggio.

Una soluzione di un problema di controllo è, ove ciò è possibile, una scelta delle variabili di controllo tali che le specifiche su transitorio e regime permanente siano soddisfatte.

Per quanto riguarda le specifiche sulle uscite, la stabilità è già stata trattata in §4.1, quindi qui analizzeremo i punti rimanenti, ossia le specifiche sul regime permanente e transitorio.

7.1 Specifiche sul comportamento a regime: Inseguimento

L'approccio più generale per studiare e progettare sistemi di controllo per l'inseguimento di *classi di segnali* si basa sul *principio del modello interno*. Vediamo nel dettaglio di che cosa si tratta: consideriamo un problema di inseguimento (discreto o continuo) descritto dallo schema a blocchi di Fig.26.

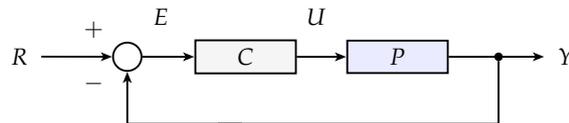


Figura 26: Schema a blocchi per il problema di inseguimento del riferimento R .

Sia R la trasformata (\mathcal{Z} o \mathcal{L}) del riferimento da inseguire, supponiamo tale trasformata razionale fratta della forma

$$(7.1) \quad R = \frac{N_R}{D_R}.$$

Scriviamo inoltre la F.d.T. della catena aperta nella forma

$$(7.2) \quad CP = \frac{N_{CA}}{D_{CA}}.$$

In questo modo, la trasformata dell'errore E è data da

$$(7.3) \quad \begin{aligned} E &= \frac{N_E}{D_E} \\ &= R - \frac{CP}{1+CP}R \\ &= \frac{1}{1+CP}R \\ &= \frac{D_{CA}}{N_{CA} + D_{CA}} \frac{N_R}{D_R}. \end{aligned}$$

Nel caso a tempo continuo si ottiene l'inseguimento del riferimento a regime se

$$(7.4) \quad |y(t) - r(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

e ciò avviene se e solo se D_E è hurwitziano. A tempo discreto l'inseguimento si ha se

$$(7.5) \quad |y(k) - r(k)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

e ciò si verifica se e solo se D_E ha radici con modulo strettamente minore di uno, cioè all'interno del cerchio unitario (per semplicità, con un lieve abuso del termine, in tal caso diremo che D_E è *stabile*). Notiamo ora che dalla (7.3) vale $\text{radici}(D_E) \subseteq \text{radici}(N_{CA} + D_{CA}) \cup \text{radici}(D_R)$, per via delle possibili cancellazioni. Sappiamo tuttavia che dalle specifiche sulla stabilità $N_{CA} + D_{CA}$ deve essere stabile, e pertanto avere radici all'interno del cerchio unitario. A questo punto rimangono due possibilità:

1. D_R è stabile,
2. D_R non è stabile.

Nel primo caso l'inseguimento è garantito; nel secondo invece D_R può essere fattorizzato in una parte stabile S_R e una instabile I_R , i.e.

$$(7.6) \quad D_R = S_R I_R.$$

Per eliminare l'effetto dei modi non convergenti indotti da I_R sull'errore E devo cancellarne i poli in (7.3). *Ipotizzando* N_R e D_R *coprime*, l'unica cancellazione possibile è tra D_{CA} e I_R . Riassumendo: se p_i^R è radice (instabile) di D_R :

- se è anche radice di D_{CA} allora si ha l'inseguimento asintotico,
- se invece non è radice di D_{CA} , non c'è inseguimento.

La conclusione a cui siamo giunti non è altro che una formulazione del principio del modello interno per sistemi LTI, a tempo discreto e in descrizione I/O.

7.1 PROPOSIZIONE (Principio del modello interno). *Per un sistema in retroazione negativa stabile, l'inseguimento asintotico di un riferimento $r(k)$ con trasformata \mathcal{Z} razionale $R(z) = \frac{N_R}{D_R}$, con N_R e D_R coprimi, è possibile se e solo se le radici instabili di D_R sono anche radici di D_{CA} .*

Si noti che la condizione $\text{radici}(I_R) \subseteq \text{radici}(D_{CA})$ garantisce automaticamente l'inseguimento asintotico per *tutti i segnali che abbiano trasformata \mathcal{Z} con poli instabili inclusi nelle radici di I_R .*

7.2 ESEMPIO (Tipo dell'anello e inseguimento di gradini e rampe). Consideriamo il paradigma di controllo di Fig.26. Nel caso a tempo continuo se il riferimento era una rampa di ordine l , $R(s) = \frac{A}{s^l}$ per avere l'inseguimento a regime era necessario aggiungere un numero di poli in zero $\Delta = l - n_0$ in $C(s)$, con n_0 numero di poli in zero presenti in $P(s)$. A tempo discreto consideriamo la rampa di ordine l

$$R(z) = \frac{Az^{\tilde{l}}}{(z-1)^{\tilde{l}}},$$

con $\tilde{l} - l < 0$ il ritardo intrinseco del segnale. Per ottenere l'inseguimento con errore nullo a regime, dal principio del modello interno

$$\text{se } P(z) = \frac{N_P(z)}{\tilde{D}_P(z)(z-1)^{n_P}} \implies C(z) = \frac{N_C(z)}{\tilde{D}_C(z)(z-1)^{\Delta}},$$

con $\Delta := l - n_P$. Inoltre non si deve dimenticare di scegliere un $\tilde{D}_C(z)$ tale che $N_C(z)N_P(z) + (z-1)^l \tilde{D}_P(z)\tilde{D}_C(z)$ sia stabile. \diamond

7.3 ESEMPIO (Inseguimento di sinusoidi). Dato l'ingresso $u(k) = u_0 \cos(\vartheta_0 k + \Psi_0)$ dalla (6.1) sappiamo che la risposta (forzata) del sistema è ancora una sinusoide con ampiezza e fase date dalla risposta armonica del sistema:

$$y(k) = y_0 \cos(\vartheta_0 k + \chi_0).$$

Per avere inseguimento a regime naturalmente deve essere $u_0 \equiv y_0$ e $\Psi_0 \equiv \chi_0$. Se $\Psi_0 \equiv 0$, la trasformata \mathcal{Z} dell'ingresso è data dalla (2.25)

$$U(z) = u_0 \frac{z(z - \cos \vartheta_0)}{z^2 + 2z \cos \vartheta_0 + 1}.$$

In generale tramite la formule di addizione trigonometriche è semplice ricavare anche la trasformata \mathcal{Z} dell'ingresso nel caso $\Psi_0 \neq 0$:

$$u_0 \cos(\vartheta_0 k + \Psi_0) = u_0 \cos(\vartheta_0 k) \cos \Psi_0 - u_0 \sin(\vartheta_0 k) \sin \Psi_0,$$

$$U(z) = \frac{u_0 \cos(\Psi_0)z(z - \cos \vartheta_0) - u_0 \sin(\Psi_0)z(\sin \vartheta_0)}{z^2 + 2z \cos \vartheta_0 + 1}.$$

Come si nota in entrambi i casi il denominatore di $U(z)$ rimane lo stesso e i poli sono dati da $p_{1,2} = \cos \vartheta_0 \pm j\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_0} = e^{\pm j\vartheta_0}$. In questo caso per il principio del modello interno, se $P(z)$ non ha poli in $e^{\pm j\vartheta_0}$, $C(z)$ deve essere della forma

$$C(z) = \frac{N(z)}{\tilde{D}_C(z)(z^2 - 2z \cos \vartheta_0 + 1)},$$

e tale che

$$N_C(z)N_P(z) + \tilde{D}_C(z)(z^2 - 2z \cos \vartheta_0 + 1)D_P(z)$$

sia stabile. ◇

7.2 Specifiche sul regime transitorio

Le specifiche sul regime transitorio mirano ad ottenere caratteristiche di prontezza e precisione del sistema. Come accennato inizialmente vi sono due modi di tradurre tali caratteristiche in parametri aggiustabili:

- *dominio del tempo*: le principali specifiche in t sono date dalla risposta a gradino del sistema e sono rappresentate in Fig.27:
 - *tempo di salita t_r* : tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore di regime della risposta a gradino;
 - *tempo di assestamento al 5% $t_{a,5\%}$* : istante del tempo a partire dal quale le variazioni attorno al valore di regime della risposta a gradino sono confinate entro il $\pm 5\%$ del valore di regime⁸;
 - *massimo di picco m_p* : valore massimo assunto dal segnale.

Intuitivamente si può dire che t_r “regola” le specifiche di prontezza mentre m_p quelle di precisione.

- *dominio della frequenza*: seguendo questo approccio specifichiamo un andamento desiderato della risposta in frequenza $W(j\omega)$ (Fig.28). Solitamente si cerca di avere $|W(j\omega)| \simeq 1$ per $\omega < B_1$, se il riferimento ha banda limitata $B_1 \sim B_{3dB} =: B$, $|W(j\omega)| \simeq 0$ per $\omega > B_2$, banda oltre la quale è presente solo rumore. Si danno quindi delle tolleranze Δ_1 e Δ_2 sui valori entro i quali $|W(j\omega)|$ deve essere confinata. In particolare, si richiede che il massimo modulo M della risposta armonica sia non troppo maggiore di 1.

⁸Il tempo di salita viene anche indicato con t_s e il tempo di assestamento con $t_{s,5\%}$, non utilizzeremo tuttavia tale simbologia per evitare confusione.

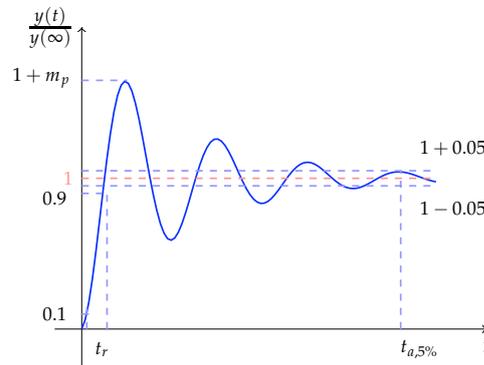


Figura 27: Specifiche sul regime transitorio nel dominio del tempo: m_p , t_r e $t_{a,5\%}$.

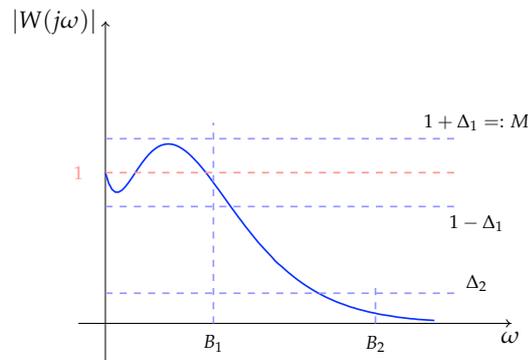


Figura 28: Specifiche sul regime transitorio nel dominio della frequenza: Δ_1 , Δ_2 , B_1 e B_2 .

Esistono infine delle utili relazioni empiriche che legano i parametri descritti nei due approcci:

$$(7.7) \quad \boxed{Bt_r \simeq 0.4}$$

$$(7.8) \quad \boxed{1 + m_p \simeq M}$$

7.4 OSSERVAZIONE. Vi sono altre tipi di specifiche oltre a quelle già citate, *e.g.*

- Stabilizzazione interna.
- Ottimalità: tra tutti gli ingressi viene scelto quello che minimizza un certo funzionale di costo $\mathfrak{J}(y, u)$, che tipicamente rappresenta l'energia.
- Robustezza: si cercano delle specifiche rispettate da una classe di modelli, o segnali d'ingresso, che rappresentano l'incertezza del modello.

7.3 Traduzione delle specifiche per sistemi del II ordine (richiami)

Supponiamo di voler progettare un controllore C per un processo $P(s)$ in retroazione, tale che la F.d.T. in catena chiusa $W(s)$ abbia certe caratteristiche, Un modo comune di procedere consiste nell'approssimare $W(s)$ con una F.d.T. del secondo ordine

$$(7.9) \quad W(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

dove

- ω_n : pulsazione naturale,
- ζ : coefficiente di smorzamento,
- k : guadagno in continua.

I poli della (7.9) sono

$$(7.10) \quad p_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right).$$

Se $\zeta \geq 1$ si hanno due poli reali (caso sovrasmorzato), se $\zeta < 1$ si hanno due poli complesso coniugati (caso sottosmorzato).

La risposta a gradino del sistema è data da

$$(7.11) \quad w_{-1}(t) = \delta_{-1}(t) - \frac{e^{\sigma t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\sin(\omega_d t + \varphi)),$$

dove $\sigma := \Re(p_{1,2}) = -\omega_n\zeta$, $\omega_d := |\Im(p_{1,2})| = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ e φ tale che $\sin \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\cos \varphi = \zeta$.

Se si deriva la (7.11) e si cerca il primo punto estremo, si ottengono il tempo di picco t_p e il valore di picco m_p

(7.12)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

(7.13)

$$m_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \pi}$$

Inoltre dagli involucri $1 \pm e^{\sigma t}$ si possono stimare il tempo di assestamento al

5% e al 1%:

(7.14)

$$t_{a,5\%} \simeq \frac{3}{|\sigma|}$$

(7.15)

$$t_{a,1\%} \simeq \frac{4.6}{|\sigma|}$$

Per il calcolo del tempo di salita esistono diversi approcci:

- se si conosce il valore di ζ , si utilizza la seguente relazione approssimata valida per $\zeta \in [0.5, 0.7]$

$$(7.16) \quad t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

- si sfrutta la relazione

$$(7.17) \quad t_r B \simeq 0.35 \div 0.4$$

dalla quale si può poi calcolare anche

$$(7.18) \quad \omega_n = \frac{2\pi B}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{2-\zeta^2} + 4\zeta^4}$$

- si calcola tramite

$$(7.19) \quad \omega_n t_r \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \varphi$$

Date le specifiche su t_r , $t_{a,5\%}$, m_p la regione del piano complesso che soddisfa tali specifiche è data dall'intersezione di

$$(7.20) \quad \begin{cases} \omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta \geq \frac{|\ln m_p|}{\sqrt{\ln^2 m_p + \pi^2}} \\ |\sigma| \geq \frac{3}{t_{a,5\%}} \end{cases}$$

ed è rappresentata in Fig.29.

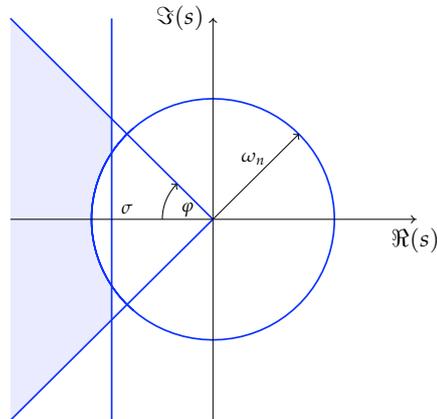


Figura 29: Regione ammissibile per il soddisfacimento delle specifiche in regime transitorio.

7.4 Progettazione del sistema di controllo

I passi chiave nella progettazione di un sistema di controllo digitale sono:

Lezione 10 (2 ore)
13 aprile 2012

1. acquisizione (o costruzione) del modello (lineare o linearizzato, a tempo continuo o discreto);
2. acquisizione e traduzione delle specifiche, in particolare
 - comportamento asintotico richiesto;
 - $|\sigma|$, ζ , ω_n , per un sistema del II° ordine, che si ricavano a partire da m_p , t_r , t_d nel dominio del tempo (oppure da B_1 , B_2 , Δ_1 , Δ_2 nel dominio della frequenza, si veda la sezione precedente).
3. scelta dell'architettura di controllo e scelta del tipo di controllore;
4. scelta del periodo di campionamento;
5. progettazione/tuning (dei parametri liberi)
6. simulazione e verifica delle prestazioni;
7. scelta dei sensori, attuatori, convertitori A/D - D/A;
8. ingegnerizzazione.

Avendo già trattato nelle sezioni precedenti i primi due punti, nel seguito ci concentreremo sulle fasi 3,4 e 5.

Scelta dell'architettura di controllo

Vi sono quattro principali strutture di controllo: controllo in catena aperta, controllo in catena chiusa, controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltro, controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltro e feed-forward.

Vediamo, almeno qualitativamente, pro e contro di ogni soluzione, facendo riferimento alle seguenti caratteristiche dell'architettura (espresse nel dominio della frequenza, Fig.30):

- indicando con W la F.d.T. totale del sistema, per le proprietà di inseguimento vogliamo $|W| \simeq 1$ per pulsazioni $\omega < B_1$;
- per le proprietà di filtraggio del rumore vogliamo $|W| < \Delta_2$ per valori $\omega > B_2$;
- se W_{N_i} è la F.d.T. di un eventuale disturbo, vogliamo che essa sia "piccola" (stabilità interna);
- vogliamo che il sistema sia robusto; un parametro che si utilizza per quantificare la robustezza di un sistema è la *funzione di sensibilità*

$$(7.21) S_P^W = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta W/W}{\Delta P/P} = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln P};$$

- non vogliamo sovraccaricare l'attuatore (vincolo di capacità), quindi se $A = \frac{U}{R}$ cerchiamo A "piccola".

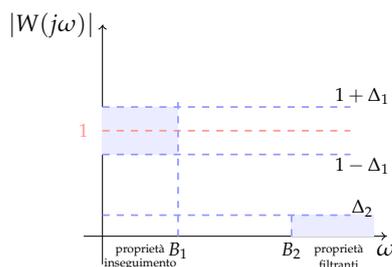


Figura 30: Caratteristiche desiderate del sistema nel dominio della frequenza.

1. *Controllo in catena aperta (open loop)* (Fig.31). È la più semplice architettura di controllo, e viene utilizzata quando risulta problematico misurare l'uscita e utilizzarla per la retroazione. Per soddisfare le specifiche sopra elencate si deve avere
 - $C \simeq \frac{1}{P}$ sotto a B_1 ;
 - $C \ll 1$ sopra a B_2 ;

rimangono però $W_{N_1} \simeq P$, $W_{N_2} \simeq 1$ e $S_P^W = 1$ e pertanto il sistema manca di robustezza. Inoltre $A = C \simeq \frac{1}{P}$ si rischia quindi di sovraccaricare l'attuatore se P è "piccolo", ovvero ha zeri nella banda di interesse.

2. *Controllo in catena chiusa (feedback)* (Fig.32). In questo caso la F.d.T. del sistema è $W = \frac{CP}{1+CP}$. Inoltre, $W_{N_1} = \frac{P}{1+CP}$, $W_{N_2} = \frac{1}{1+CP}$ e $S_P^W = S_C^W =$

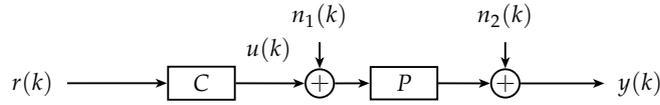


Figura 31: Architettura di controllo in catena aperta (con eventuali disturbi).

$\frac{1}{1+CP}$. Tutte queste F.d.T. devono essere BIBO-stabili se si richiede stabilità interna del sistema interconnesso. Per il soddisfacimento delle proprietà di inseguimento dobbiamo avere $|C| \gg \frac{1}{|P|}$, ossia, $|CP| \gg 1$ sotto a B_1 e per avere buone proprietà filtranti $|C||P| \ll 1$ sopra a B_2 . Così sotto a B_1 otteniamo $W_{N_1}, W_{N_2} \simeq 0$ e $S_P^W, S_C^W \simeq 0$. Bisogna poi valutare con attenzione la F.d.T. di attuazione $A = \frac{C}{1+CP}$, in quanto sotto a B_1 si ha $|A| \simeq \frac{1}{|P|}$, che per P "piccoli" può provocare un sovraccarico nell'attuatore, mentre sopra a B_2 si ha $|A| \simeq |C|$. Quindi con un controllo in catena chiusa si hanno rilevanti miglioramenti rispetto al modello in catena aperta. In aggiunta C può contenere componenti di modello interno così da ottenere un inseguimento asintotico esatto del riferimento.⁹

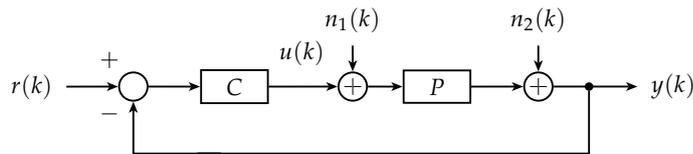


Figura 32: Architettura di controllo in catena chiusa (con eventuali disturbi).

3. *controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltra* (Fig.33). In questo schema l'azione dinamica del controllo viene suddivisa tra L , C , H . La F.d.T. totale del sistema è $W = \frac{PCL}{1+HPC}$, inoltre $W_{N_1} = \frac{P}{1+HPC}$ e $W_{N_2} = S_P^W = \frac{1}{1+HPC}$. La F.d.T. di attuazione è pari a $A = \frac{LC}{1+HPC}$, si nota allora che L dà la libertà di ripartire opportunamente i compiti di controllo cosicché A rimanga piccola, C introduce componenti di modello interno, mentre H viene tipicamente utilizzata per la stabilizzazione. Bisogna infine porre particolare attenzione nella realizzazione del blocco L in quanto $S_L^W = 1$.
4. *controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltra e feed-forward* (Fig.34). Iniziamo col notare che se $e(k)$ (l'errore in ingresso a C) è nullo allora lo schema come un controllo in catena aperta attraverso il blocco F di feedforward, la catena chiusa invece "agisce" quando le cose "vanno male" (presenza di disturbi, valori di uscita errati, etc). Intuitivamente:
 - F controlla il comportamento nominale, se si assume P nota $F \simeq \frac{1}{P}$ sotto a B_1 (per soddisfare le proprietà di inseguimento);

⁹Tuttavia se P è instabile ci sono dei limiti a ciò che si può fare, soprattutto per quel che riguarda la sensibilità ai disturbi (cfr. integrali di Bode).

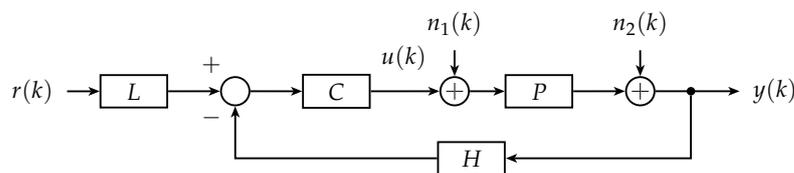


Figura 33: Architettura di controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltro (con eventuali disturbi).

- H viene usato per stabilizzare il sistema;
- C si utilizza per le componenti di modello interno;
- L si usa per il pre-filtraggio, così da avere $L \simeq 1$ sotto B_1 .

La F.d.T. totale è data da $W = \frac{(F+LC)P}{1+CPH}$, la F.d.T. di attuazione si decompone in due parti, una dovuta al feed-forward e l'altra alla retroazione, $A = F + \frac{LC}{1+CPH} = A_F + A_R$, mentre le W_{N_1} e W_{N_2} non cambiano rispetto al caso senza feed-forward. Infine le componenti che lavorano in catena aperta devono essere calibrate con cura per ottenere un valore complessivo all'incirca unitario ($|F||P| \simeq 1$).

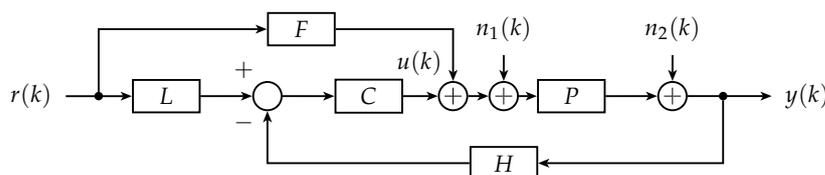


Figura 34: Architettura di controllo in catena chiusa a due parametri con prefiltro e feed-forward (con eventuali disturbi).

Scelta del periodo di campionamento

Questa fase è caratteristica del controllo digitale di sistemi continui. Il periodo di campionamento T deve soddisfare alcuni *vincoli* e deve essere poi scelto in base ad alcuni *criteri*, che verranno analizzati nel seguito.

VINCOLO PRINCIPALE. Se si utilizza un sistema basato su μP , $T \geq T_c$, dove con T_c si indica il tempo di calcolo necessario all'algoritmo di controllo e di una serie di altri fattori/funzioni, sotto elencati:

- test sul segnale di ingresso ($e(k) \stackrel{?}{\in} [e_{min}, e_{max}]$);
- filtraggio digitale (e.g. "smoothing" per il calcolo della derivata);
- condizionamento del segnale (eliminare BIAS, adattamento valore);
- stima o estrazione del valore del segnale (se si può solo misurare $\tilde{y}(k) = f(y(k))$, dobbiamo calcolare $f^{-1}(\tilde{y}(k))$);

- gestione delle interfacce I/O (operazioni di creazione di *log*, memorizzazione dati, *interrupt*, visualizzazione dati);
- sharing del μP tra più processi (se la produzione dell'output da mandare al processo i -esimo, P_i , richiede un tempo T_i , allora $T \geq \sum_i T_i$).

CRITERI PER LA SCELTA DI T . Diamo una lista di criteri che devono essere presi in considerazione per la scelta del periodo di campionamento T :

- *Limitazione della variabilità (roughness) del segnale di controllo*. Se al tempo kT il controllore produce l'ingresso $\tilde{u}(k)$, il sistema evolve come fosse in catena aperta fino all'elaborazione del campione successivo. Se consideriamo lo schema di Fig.35, allora se T è troppo grande rispetto alla banda passante di $P(s)$, $N(s)$, $R(s)$ o questi sono instabili allora si ha $\tilde{e}(k+1)$ grande, questo implica $u(k+1)$ grande e (potenzialmente) molto diverso da $u(k)$. Sorgono di conseguenza problemi di:
 - saturazione del segnale d'ingresso;
 - eccitazione di risonanze meccaniche;
 - instaurazione di cicli limite dovuti alle non linearità.

Questi problemi sono spesso critici per molte applicazioni (si pensi ad esempio alle applicazioni biomediche).

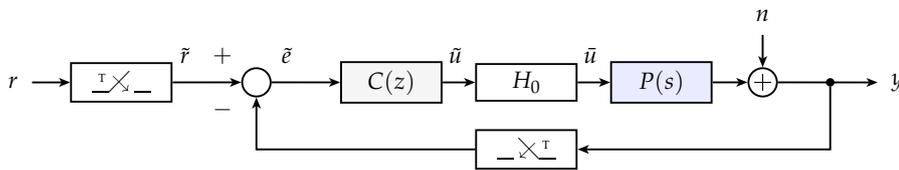


Figura 35: Schema a blocchi di un sistema di controllo digitale.

- *Reiezione di disturbi aleatori*. Consideriamo gli schemi a tempo continuo e discreto di Fig.36 e sia w un rumore bianco di media nulla e varianza unitaria. Supponiamo che $C(s)$ sia tale che la F.d.T. totale in catena chiusa possa essere approssimata con una coppia di poli dominanti associati a $\zeta = 0.7$ (smorzamento) e $\omega_b = 2$ rad/s (banda passante). Si ipotizza inoltre che il corrispettivo controllore discreto $C(z)$ sia progettato per riprodurre le stesse caratteristiche in catena chiusa.

Si ha allora, come è illustrato in Fig.37 che

- per $\frac{\Omega}{\omega_b} < 10$, con Ω pulsazione di campionamento, si ha un peggioramento della sensibilità al rumore per il sistema discreto,
- per $\frac{\Omega}{\omega_b} > 20$, l'indice $\frac{\mathbb{E}[|y(k)|^2]}{\mathbb{E}[|y(t)|^2]}$ rimane al di sotto del valore 1.2 e quindi si ha una ridotta sensibilità al rumore per il sistema discreto.

Pertanto come *rule of thumb* per avere una buona reiezione al rumore in ingresso si può scegliere $\Omega > 20\omega_b$.

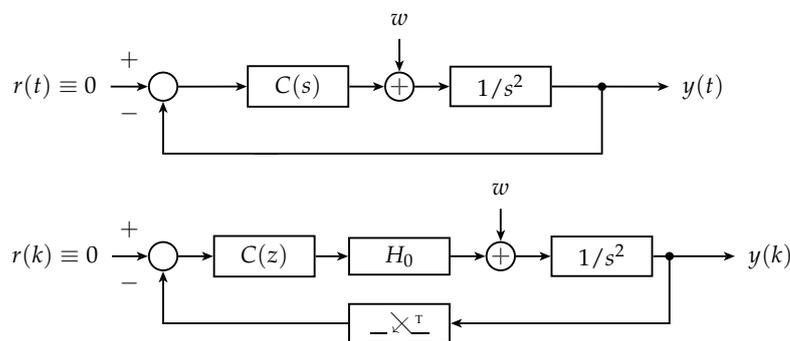


Figura 36: Schema a blocchi utilizzato per confrontare la reiezione di disturbi aleatori in un sistema continuo e in uno discreto.

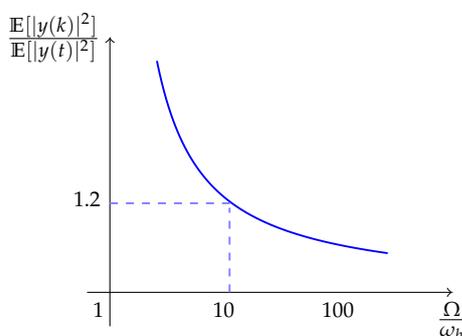


Figura 37: Andamento di $\frac{\mathbb{E}[|y(k)|^2]}{\mathbb{E}[|y(t)|^2]}$ al variare di $\frac{\Omega}{\omega_b}$.

- *Dinamica del sistema e ritardi.* Supponiamo che ad un certo tempo t_g si “accenda” un riferimento a gradino $r(t) = \delta_{-1}(t - t_g)$ o inizi ad agire un disturbo w . Siano $(k - 1)T$ e kT i tempi di acquisizione dei campioni immediatamente precedenti e successivi. Allora il controllore “vede” il gradino (o il disturbo) solo al campione kT (Fig.38). Dunque c’è un ritardo di $\Delta = kT - t_g$ e, nel caso peggiore (il gradino inizia non appena è passato l’istante kT), $\Delta = T$. Poiché, come già visto, la “velocità” o prontezza del sistema dipende dal tempo di salita t_r , questo fenomeno di ritardo influisce negativamente sul tempo di salita e quindi sulle prestazioni nel transitorio del sistema. Per evitare ciò si vuole tipicamente

$$(7.22) \quad T \leq \frac{t_r}{10},$$

o equivalentemente $\Omega \geq \frac{2\pi 10}{t_r}$.

7.5 ESEMPIO (sistema del I° ordine). Sia $G(s) = \frac{k}{1+s\tau}$, con $\tau \in \mathbb{R}_+$ costan-

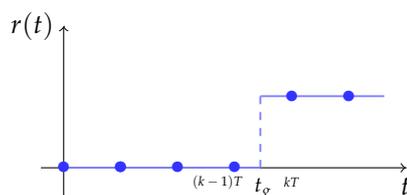


Figura 38: Ritardo dovuto al tempo di campionamento T sulla risposta ad un gradino $\delta_{-1}(t - t_g)$ in ingresso.

te di tempo del sistema. Si trova che $t_r \simeq 2.3\tau$. Per avere $t_r \geq 10T$ deve essere $\frac{\tau}{T} \geq 4.3$. Introducendo $\omega_t = \frac{1}{\tau}$, pulsazione di taglio, nel dominio della frequenza ciò si traduce dicendo che $\frac{\Omega}{\omega_t} = \frac{2\pi\tau}{T} \geq 25 \div 30$. \diamond

7.6 ESEMPIO (sistema del II° ordine). Sia $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, si può allora stimare il tempo di salita tramite una formula equivalente a quelle introdotte in §7.3,

$$(7.23) \quad t_r \simeq \frac{e^{\frac{\varphi}{\tan(\varphi)}}}{\omega_n},$$

dove ricordiamo $\cos(\varphi) = \zeta$. Se vogliamo $t_r \geq 10T$, dalla (7.23) abbiamo

$$\omega_n T \leq \frac{e^{\frac{\varphi}{\tan(\varphi)}}}{10}.$$

Se ad esempio $\zeta = 1/\sqrt{2}$, allora $\varphi = \pi/4$ e $\tan \varphi = 1$. Dalla condizione espressa sopra si ha: $\omega_n T \leq 0.2$, $\frac{\Omega}{\omega_n} \geq 32$. \diamond

- *ritardo indotto dall'interpolatore.* Come già brevemente accennato in §5.1 l'interpolatore di ordine zero introduce un "ritardo" dell'ordine di $T/2$, come illustrato in Fig.39.

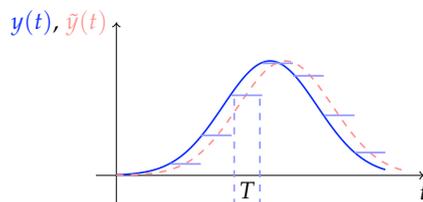


Figura 39: Ritardo introdotto dallo ZOH sul segnale di uscita, il segnale $y(t)$, in blu, rappresenta il segnale non ritardato mentre $\tilde{y}(t)$, in rosso tratteggiato, l'approssimazione del segnale ritardato a causa dello holder.

In riferimento allo schema di Fig.35, abbiamo che la F.d.T. del processo

appare come $\tilde{P}(s) \simeq e^{-sT/2}P(s)$. Si ha quindi una rotazione oraria del diagramma di Nyquist con conseguente diminuzione del margine di fase di

$$(7.24) \quad \Delta\varphi = \frac{\omega_a}{2/T},$$

con ω_a pulsazione di attraversamento della F.d.T. dell'anello. Se indichiamo con φ_M la massima diminuzione tollerabile del margine di fase, deve essere soddisfatta la disuguaglianza

$$(7.25) \quad \frac{\omega_a}{2/T} \leq \varphi_M \implies \Omega \geq \frac{\omega_a \pi}{\varphi_M}.$$

- *Effetto del filtro anti-aliasing.* Anche questo aspetto è già stato trattato nella sezione §3, facendo riferimento in particolare a filtri di Butterworth del II° ordine. Abbiamo visto che per ottenere una attenuazione a alla pulsazione $\Omega/2$ con smorzamento ζ una stima della variazione del margine di fase φ è data da (3.18). Dunque, se è presente un filtro anti-aliasing, al ritardo introdotto dall'interpolatore dobbiamo aggiungere il ritardo introdotto dal filtro A.A. cosicché, detta al solito φ_M la massima diminuzione tollerabile del margine di fase, dobbiamo imporre

$$(7.26) \quad \varphi_M \geq \frac{\omega_a}{2/T} + 4\zeta\sqrt{a}\frac{\omega_a}{\Omega}$$

da cui, usando la $T = 2\pi/\Omega$, e risolvendo per Ω ,

$$(7.27) \quad \Omega \geq \frac{\omega_a[\pi + 4\zeta\sqrt{a}]}{\varphi_M},$$

dove ω_a è la pulsazione di attraversamento della F.d.T. dell'anello e φ_M è la massima diminuzione tollerabile del margine di fase.

- *sensibilità alle variazioni parametriche.* Consideriamo il sistema del I° ordine $G(s) = \frac{k}{1+s\tau}$, la sua versione discretizzata è della forma $G(z) = \frac{b}{z-a}$ con $a = e^{-T/\tau}$ e $b = k(1 - e^{-T/\tau})$. Se non si conosce τ con precisione, oppure è un parametro variabile, per $\Delta\tau$ piccoli si ha

$$(7.28) \quad \Delta a \simeq \frac{da}{d\tau} \Delta\tau \implies \frac{\Delta a}{a} \simeq \frac{T}{\tau} \frac{\Delta\tau}{\tau}.$$

La sensibilità alle variazioni parametriche è quindi lineare in T e per T grandi, se $C(z)$ non cambia, si ha un comportamento peggiore.

Concludiamo il paragrafo con alcune considerazioni di carattere pratico riguardo alla scelta del periodo di campionamento, riportate in Tab.2.

7.4. PROGETTAZIONE DEL SISTEMA DI CONTROLLO

VARIABILI DA CONTROLLARE	ORDINE DI T
livello liquido serbatoio, temperatura	secondi, frazioni di s
pressione, portata	decine di ms
tensione, corrente elettrica	$\sim ms$
elettronica di potenza	decine di μs
elettronica allo stato solido, applicazioni di MQ	$\sim ns$

Tabella 2: Esempi di scelta dell'ordine di grandezza del periodo di campionamento T .

8 SINTESI DI CONTROLLORI DIGITALI:
METODI PER EMULAZIONE

8.1 Introduzione

Consideriamo qui il problema di realizzare un controllore nel discreto $C(z)$ per un processo a tempo continuo $P(s)$, come illustrato in Fig.40.

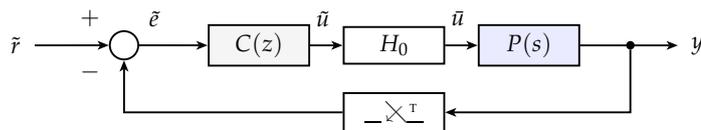


Figura 40: Sintesi di $C(z)$.

Ci sono diversi approcci per “produrre” un $C(z)$ adatto:

- **METODI PER EMULAZIONE.** È un approccio approssimato che segue la seguente procedura:
 - si considera $\tilde{P}(s) = e^{-s\frac{T}{2}}P(s)$, per tener conto del ritardo introdotto dallo ZOH;
 - si progetta $C(s)$ nel continuo;
 - si traduce, in maniera approssimata, $C(s)$ nel dominio z , $\tilde{C}(z) \simeq C(s)$.
- **SINTESI MEDIANTE TRASFORMAZIONE BILINEARE.** Consta dei seguenti passi:
 - si calcola $\tilde{P}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right]; T \right] \right]$;
 - si utilizza la trasformazione bilineare¹⁰ $\tilde{P}_1(w) := \tilde{P}(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}}$;
 - si progetta $\tilde{C}_1(w)$ nel continuo;
 - si opera la trasformazione inversa $\tilde{C}(z) = \tilde{C}_1(w) \Big|_{w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$.

Utilizzando questo metodo non vi sono approssimazioni e si ha un’allocalizzazione esatta dei poli.

- **SINTESI DIRETTA NEL DISCRETO.** In questo caso i passi sono:
 - si traduce $\tilde{P}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right]; T \right] \right]$;
 - si progetta $C(z)$ direttamente nel discreto, con la formula della sintesi diretta o con l’equazione diofantea.

Nelle sezioni che seguono analizzeremo più in dettaglio il primo e il terzo approccio.

¹⁰Si noti che abbiamo utilizzato un “fattore di scala” $\frac{T}{2}$ nella trasformazione; in generale ciò è irrilevante ai fini del risultato della trasformazione, il motivo della scelta sarà chiaro in seguito.

8.2 Traduzione in digitale di progetti $C(s)$ analogici (emulazione)

Supponiamo di avere un $C(s)$ desiderato e di volerlo realizzare nel discreto come $\tilde{C}(z)$. Questo implicherà delle approssimazioni dovute alla banda finita permessa dal campionamento e dal ritardo introdotto dallo ZOH.

1. 1° GRUPPO DI METODI. È noto che una F.d.T. rappresenta un sistema di equazioni differenziali (o integrali). Per la traduzione dal dominio s al dominio z vogliamo approssimare l'operatore di derivazione temporale $\frac{d}{dt}$ (problema di analisi numerica), oppure direttamente la relazione di mappatura dei poli $z = e^{sT}$. Esistono a tal scopo tre possibilità principali:

- *metodo di Eulero in Avanti (EA).*

$$(8.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x(t+T) - x(t)}{T},$$

con T periodo di campionamento. Nel dominio delle trasformate si traduce come

$$(8.2) \quad s \simeq \frac{z-1}{T}.$$

Inoltre con questo metodo $z = e^{sT}$ è come se stessimo utilizzando l'approssimazione

$$(8.3) \quad e^{sT} \simeq 1 + sT;$$

- *metodo di Eulero all'Indietro (EI).*

$$(8.4) \quad \frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x(t) - x(t-T)}{T},$$

che nel dominio delle trasformate diviene

$$(8.5) \quad s \simeq \frac{1-z^{-1}}{T}.$$

A questo corrisponde l'approssimazione

$$(8.6) \quad e^{sT} \simeq \frac{1}{1-sT};$$

- *metodo di Tustin.* Esso corrisponde ad un'approssimazione trapezoidale della derivata:

$$(8.7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t+T) + x(t)}{2} \right) \simeq \frac{x(t+T) - x(t)}{T}.$$

Con tale metodo $z = e^{sT}$ è approssimato da

$$(8.8) \quad z = e^{sT} \simeq \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}},$$

da cui

$$(8.9) \quad s = \frac{2z-1}{Tz+1}.$$

Si noti che la trasformazione di Tustin è una versione riscalata della trasformazione bilineare.

Scelta una delle approssimazioni sopra elencate, si calcola

$$(8.10) \quad \tilde{C}(z) = C(s) \Big|_{s=(8.2), (8.5), (8.9)}$$

Bisogna porre poi particolare attenzione alla stabilità e quindi alla mappatura del semipiano sinistro $\Re(s) < 0$ nei diversi metodi. Questo è rappresentato graficamente in Fig.41. Si vede allora che il metodo di Eulero in avanti è abbastanza sconsigliato perché potrebbe rendere la F.d.T. instabile (a meno di utilizzare T molto "piccoli").

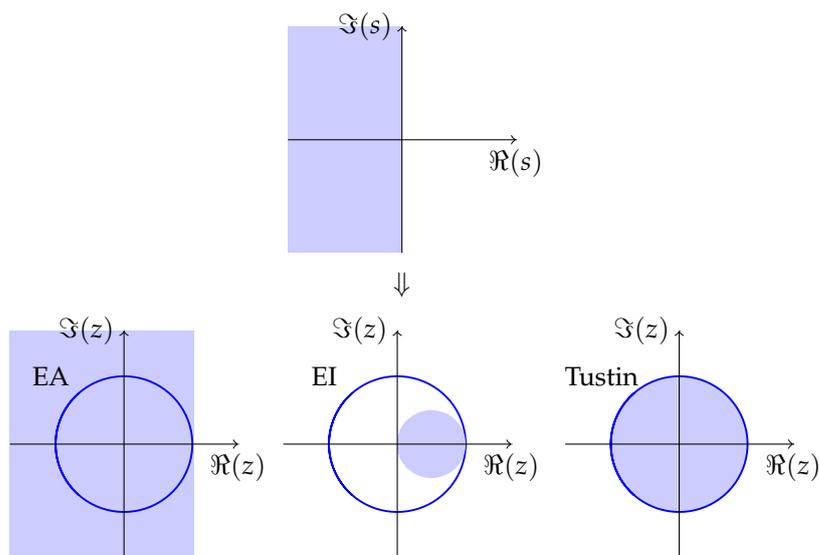


Figura 41: Mappatura del semipiano sinistro nei tre metodi.

2. METODO MATCHED POLE-ZERO (MPZ). Se sappiamo la relazione di ri-mappatura *esatta* dei poli, possiamo cercare di utilizzarla direttamente, e considerare approssimazioni solo per quanto riguarda la mappatura in z degli zeri. Questo approccio si traduce nel metodo MPZ: consideriamo una F.d.T. $C(s)$ e procediamo come segue:

- Si calcolano poli e zeri di $C(s)$ e si scrive quest'ultima in forma di

Evans

$$(8.11) \quad C(s) = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (s - \hat{z}_i)}{s^\nu \prod_{i=1}^n (s - \hat{p}_i)},$$

dove si è evidenziato il polo nell'origine per ragioni che saranno chiare in seguito.

- Si mappano i poli e zeri trovati in $z = e^{sT}$, ottenendo la $C_1(z)$

$$(8.12) \quad C_1(z) := \frac{\prod_{i=1}^m (z - e^{\hat{z}_i T})}{(z - 1)^\nu \prod_{i=1}^n (z - e^{\hat{p}_i T})}.$$

- Si aggiungono a $C_1(z)$ l zeri in -1 , in modo da non avere eccessivo ritardo.

$$(8.13) \quad C_2(z) = C_1(z)(z + 1)^l.$$

In pratica, detto $r := n + \nu - m$ il grado relativo di $C_1(z)$, si pone $l = r$, se vogliamo un ritardo nullo, o $l = r - 1$ se vogliamo che il controllore introduca un passo di ritardo durante il quale il μP abbia il tempo di calcolare l'algoritmo di controllo (quasi mai si sceglie $l < r - 1$). Si noti che gli zeri in -1 vengono introdotti quando il grado relativo di $C_1(z)$ (che è pari al grado relativo di $C(s)$) è maggiore di 0. In tal caso $C(s)$ ha degli "zeri all'infinito" ossia "zeri a frequenza infinita". Gli zeri che introduciamo in -1 sono il corrispondente discreto di questa situazione. Infatti, sono zeri alla massima frequenza discreta che è appunto $e^{j\pi} = -1$.

- Si fissa il guadagno K_D in maniera che $C(s)$ e $\tilde{C}(z)$ abbiano lo stesso guadagno asintotico

$$(8.14) \quad \tilde{C}(z) = K_D C_2(z).$$

Per fare ciò consideriamo separatamente due casi:

$\nu = 0$. In questo caso $C(s)$ non ha poli in zero e quindi $C_2(s)$ non ha poli in 1, ciò significa che il guadagno in continua a tempo continuo $C(0)$ deve essere uguale al guadagno in continua $\tilde{C}(1)$ a tempo discreto ossia

$$(8.15) \quad C(0) = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (-\hat{z}_i)}{\prod_{i=1}^n (-\hat{p}_i)} = \tilde{C}(1) = K_D \frac{\prod_{i=1}^m (1 - e^{\hat{z}_i T})}{\prod_{i=1}^n (1 - e^{\hat{p}_i T})} 2^l;$$

da cui

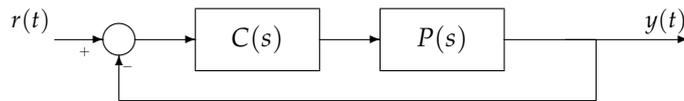
$$(8.16) \quad K_D = K_E \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{\hat{p}_i T}) \prod_{i=1}^m (-\hat{z}_i)}{2^l \prod_{i=1}^m (1 - e^{\hat{z}_i T}) \prod_{i=1}^n (-\hat{p}_i)}.$$

$\nu \neq 0$. Più complesso è il caso in cui $C(s)$ presenta un polo nell'origine e quindi $C_2(z)$ presenta un polo in 1 della medesima molteplicità ν . In tal caso, infatti, $C(0)$ e $C_2(1)$ non sono definiti. Per ottenere lo stesso guadagno asintotico si considerano i soli poli di $C(s)$ diversi da zero e i soli poli di $C_2(z)$ diversi da 1. Per tenere conto dell'effetto nel guadagno del polo non considerato (con la corrispondente molteplicità ν) si moltiplica il guadagno per T^ν ottenendo:

$$(8.17) \quad K_D = K_E T^\nu \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{\hat{p}_i T}) \prod_{i=1}^m (-\hat{z}_i)}{2^l \prod_{i=1}^m (1 - e^{\hat{z}_i T}) \prod_{i=1}^n (-\hat{p}_i)}.$$

8.1 OSSERVAZIONE.

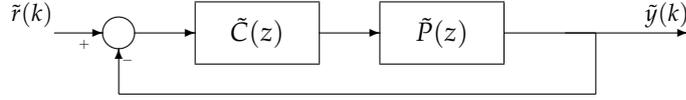
- (i) Si noti che la formula (8.17) vale anche per il caso $\nu = 0$ (si è trattato separatamente il caso $\nu = 0$ solo per ragioni espositive).
- (ii) Si noti che il fatto di moltiplicare per T^ν è consistente con le regole relative al tipo. Consideriamo per esempio lo schema in figura



dove la funzione di trasferimento $C(s)$ del controllore ha un polo semplice nell'origine e guadagno di Bode K_B e la funzione di trasferimento $P(s)$ è senza poli nell'origine e ha guadagno di Bode unitario (si noti che quest'ultima ipotesi non lede la generalità. Infatti, se il guadagno di Bode di $P(s)$ fosse diverso da 1 potremmo sempre incorporarlo nel guadagno di Bode di $C(s)$). Si supponga che la catena chiusa sia BIBO stabile e si consideri il riferimento $r(t) = t \cdot 1(t)$ a rampa unitaria di trasformata $R(s) = 1/s^2$. Poichè il tipo del sistema è pari a 1 l'errore a regime è il reciproco del guadagno di bode della funzione di trasferimento $C(s)P(s)$ della catena di azione diretta, cioè

$$(8.18) \quad e_r = \frac{1}{K_B}.$$

Consideriamo ora la versione discreta rappresentata in figura



dove supponiamo ancora la catena chiusa BIBO stabile e consideriamo $\tilde{P}(z)$ ottenuta da $P(s)$ per tenuta e campionamento, cosicchè $\tilde{P}(z)$ non ha poli in 1 e $\tilde{P}(1) = 1$. La versione campionata del riferimento è $\tilde{r}(k) = Tk \cdot \delta_{-1}(k)$ cosicchè

$$(8.19) \quad \tilde{R}(z) = T \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Quindi, se $\tilde{C}(z)$ ha un polo semplice nell'origine e $\tilde{C}_0(z) := (z-1)\tilde{C}(z)$ assume valore K'_B in 1, ossia $\tilde{C}_0(1) = K'_B$, allora dal teorema del valore finale, l'errore a regime risulta

$$(8.20) \quad \tilde{e}_r = \frac{T}{K'_B}$$

che coincide con l'errore a regime $e_r = \frac{1}{K_B}$ che si era ottenuto a tempo continuo se si fissa

$$(8.21) \quad K'_B = TK_B$$

come prevede la (8.17). Questo ragionamento si può ovviamente ripetere per il caso di $C(s)$ con un polo nell'origine di molteplicità ν e un riferimento canonico di trasformata $R(s) = 1/s^{\nu+1}$.

8.2 ESEMPIO. Vediamo due applicazioni del metodo MPZ.

- Sia $C(s) = k_c \frac{s+a}{s+b}$. Allora

$$C_1(z) = k_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}} = C_2(z),$$

con k_d tale che

$$\lim_{s \rightarrow 0} C(s) = k_c \frac{a}{b} = k_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} = \lim_{z \rightarrow 1} C_1(z) \Rightarrow k_d = k_c \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}.$$

- Sia $C(s) = k_c \frac{s+a}{s(s+b)}$. Se vogliamo grado relativo nullo

$$C_2(z) = k_d \frac{(z+1)(z - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-bT})}.$$

Il coefficiente k_d si calcola con la

$$k_d = k_c \frac{T}{2} \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}.$$

8.3 ESEMPIO. Sia $C(s)$ una funzione di trasferimento razionale propria e, per semplicità, si assuma che $C(s)$ non abbia zeri in 0. Sia $C_t(z)$ la discretizzazione di $C(s)$ ottenuta con il metodo di Tustin e $C_m(z)$ la discretizzazione di $C(s)$ ottenuta con il metodo MPZ e scegliendo il grado relativo uguale a 0. Detti, $p_{it}, i = 1, \dots, n_1$, e $z_{it}, i = 1, \dots, n_1$, i poli e gli zeri, rispettivamente, di $C_t(z)$, e $p_{im}, i = 1, \dots, n_1$, e $z_{im}, i = 1, \dots, n_1$, i poli e gli zeri, rispettivamente, di $C_m(z)$ si dimostri che

$$(8.22) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{p_{it} - p_{im}}{T} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_1,$$

e

$$(8.23) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{z_{it} - z_{im}}{T} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_1.$$

Si dimostri, inoltre che, detti K_{Et} e K_{Em} i guadagni di Evans di $C_t(z)$ e $C_m(z)$, rispettivamente, si ha

$$(8.24) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{K_{Et} - K_{Em}}{K_{Et}} = 0.$$

Soluzione. Anzitutto scriviamo $C(s)$ in forma di Evans evidenziando l'eventuale polo in zero (naturalmente se non ci fossero poli in zero $\nu = 0$).

$$(8.25) \quad C(s) = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^\nu \prod_{i=1}^n (s - p_i)},$$

Si calcola poi

$$(8.26) \quad C_t(z) = C\left(\frac{2z-1}{Tz+1}\right)$$

e dopo qualche semplice passaggio si ottiene

$$(8.27) \quad C_t(z) = \underbrace{\left[K_E \left(\frac{T}{2}\right)^{n+\nu-m} \frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i T/2)}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i T/2)} \right]}_{K_{Et}} \frac{\left[\prod_{i=1}^m (z - z_{it}) \right] (z+1)^{n+\nu-m}}{\left[\prod_{i=1}^n (z - p_{it}) \right] (z-1)^\nu}$$

dove

$$(8.28) \quad z_{it} := \frac{1 + z_i T/2}{1 - z_i T/2}, \quad i = 1, \dots, m,$$

e

$$(8.29) \quad p_{it} := \frac{1 + p_i T/2}{1 - p_i T/2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

È inoltre evidente dalla (8.27) che

$$(8.30) \quad z_{it} = -1, \quad i = m+1, \dots, n_1 = n + \nu,$$

e

$$(8.31) \quad p_{it} = 1, \quad i = n+1, \dots, n_1 = n + \nu,$$

e che

$$(8.32) \quad K_{Et} = K_E \left(\frac{T}{2} \right)^{n+\nu-m} \frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i T/2)}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i T/2)}.$$

Calcoliamo ora $C_m(z)$. Applicando la procedura sopra esposta e tenendo conto che, poichè si richiede grado relativo nullo, $l = r = n + \nu - m$, si ottiene

$$(8.33) \quad C_m(z) = K_{Em} \frac{\left[\prod_{i=1}^m (z - z_{im}) \right] (z+1)^{n+\nu-m}}{\left[\prod_{i=1}^n (z - p_{im}) \right] (z-1)^\nu},$$

dove

$$(8.34) \quad z_{im} := e^{z_i T}, \quad i = 1, \dots, m,$$

e

$$(8.35) \quad p_{im} := e^{p_i T}, \quad i = 1, \dots, n.$$

e K_{Em} , come previsto dalla (8.17), è dato da

$$(8.36) \quad K_{Em} = \frac{K_E T^\nu}{2^{n+\nu-m}} \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{p_i T}) \prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{z_i T}) \prod_{i=1}^n (-p_i)}.$$

È inoltre evidente dalla (8.33) che

$$(8.37) \quad z_{im} = -1, \quad i = m+1, \dots, n_1 = n + \nu,$$

e

$$(8.38) \quad p_{im} = 1, \quad i = n + 1, \dots, n_1 = n + \nu.$$

Siamo ora pronti per dimostrare quanto chiesto. Iniziamo con la (8.22). Essa è ovvia per $i = n + 1, \dots, n_1 = n + \nu$. Rimane da verificarla per $i = 1, \dots, n$. In effetti, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{p_{it} - p_{im}}{T} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{1+p_i T/2}{1-p_i T/2} - e^{p_i T}}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 + p_i T/2 - e^{p_i T}(1 - p_i T/2)}{T(1 - p_i T/2)} \\ (8.39) \quad &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{p_i/2 - p_i e^{p_i T}(1 - p_i T/2) - e^{p_i T}(-p_i/2)}{1 - p_i T} = 0, \end{aligned}$$

dove, nel penultimo passaggio, si è utilizzata la regola di de l'Hôpital.

La (8.23) si ottiene con passaggi del tutto analoghi.

Rimane da dimostrare la (8.24). In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow 0} \frac{K_{Et} - K_{Em}}{K_{Et}} \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{K_E \left(\frac{T}{2}\right)^{n+\nu-m}}{K_{Et}} \left[\frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i T/2)}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i T/2)} - T^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{e^{p_i T} - 1}{p_i}}{\prod_{i=1}^m \frac{e^{z_i T} - 1}{z_i}} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\prod_{i=1}^n (1 - p_i T/2)}{\prod_{i=1}^m (1 - z_i T/2)} \left[\frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i T/2)}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i T/2)} - \frac{\prod_{i=1}^n \frac{e^{p_i T} - 1}{p_i T}}{\prod_{i=1}^m \frac{e^{z_i T} - 1}{z_i T}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Si noti che al tendere a 0 di T tutti i poli e gli zeri sia di $C_t(z)$ sia di $C_m(z)$ (ad eccezione degli zeri in -1 che sono fissati e indipendenti da T) tendono a 1. Pertanto, non è sorprendente che al al tendere a 0 di T i poli e gli zeri di $C_t(z)$ tendano a coincidere con quelli di $C_m(z)$. Tuttavia, il risultato che abbiamo appena dimostrato dice di più. In effetti, mentre al tendere a 0 di T , le differenze $p_{it} - 1$ e $p_{im} - 1$ tendono 0 come T e (eccetto che per gli zeri in -1) anche le differenze $z_{it} - 1$ e $z_{im} - 1$ tendono 0 come T , le differenze $p_{it} - p_{im}$ e $z_{it} - z_{im}$ tendono a zero più velocemente di T .

Considerazioni analoghe si possono fare per i guadagni K_{Et} e K_{Em} . \diamond

8.4 OSSERVAZIONE. Facciamo alcuni commenti utili in pratica:

- il metodo MPZ è equivalente al metodo approssimativo di Tustin a livello di prestazioni, ed entrambi sono migliori dei metodi di

Eulero in avanti e Eulero all'indietro;

- a seconda del valore assunto da Ω , pulsazione di campionamento, si hanno i seguenti comportamenti
 - $\Omega \leq 5\omega_b$, con ω_b banda passante, sistema spesso instabile;
 - $\Omega \leq 10\omega_b$, sistema sottosmorzato significativamente;
 - $\Omega \geq 20\omega_b$, si ottengono buoni risultati;
 - $\Omega \geq 30\omega_b$, prestazioni circa identiche al caso continuo;
- Parte significativa degli errori è dovuta al ritardo indotto dallo ZOH. Possiamo includerlo nella progettazione utilizzando una *approssimazione di Padè* di e^{-sT} , e.g. un'approssimazione di grado (0,1): $G_{ZOH}(s) = \frac{2/T}{s+2/T}$. In questo modo invece di progettare un controllore per $P(s)$, lo progettiamo per $\tilde{P}(s) = G_{ZOH}(s)P(s)$.

3. METODO DI INVARIANZA DELLA RISPOSTA A GRADINO. Abbiamo già visto come funziona tale metodo per la traduzione del processo $P(s)$ dal continuo al discreto (§5.1). Possiamo utilizzare lo stesso metodo per tradurre $C(s)$, però in questo caso vi sono delle approssimazioni.¹¹ Si ha solo la garanzia di avere buoni risultati per *segnali costanti a tratti che cambiano valore negli istanti di campionamento*. In questo caso si ha

$$(8.40) \quad \tilde{C}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C(s)}{s} \right]; T \right] \right]$$

In generale tale metodo dà risultati peggiori di Tustin o MPZ. Un metodo migliore è dato dal metodo di invarianza della risposta alla rampa, tuttavia tale metodo è simile a livello di prestazioni al metodo di Tustin, che per ragioni di carattere pratico risulta più semplice da implementare.

8.3 Regolatori P.I.D.

I regolatori P.I.D. sono controllori con azioni proporzionale, integrativo e derivativo (da cui il nome) che possono essere sia analogici che digitali. Tali regolatori sono molto diffusi (si stima che vengano utilizzati nell'~ 80% delle applicazioni di controllo industriale) per la loro struttura standardizzata e i metodi di "tuning" semplici. Vi sono due metodi principali di modellizzare un P.I.D., l'implementazione "in parallelo" (o non interagente) e "in serie" (o in cascata).

1. Implementazione "in parallelo" (Fig.42). Il modello in questo caso è

$$(8.41) \quad C_{PID,p}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right),$$

¹¹Si ricordi infatti che è diversa la combinazione tenuta+campionamento (~ 1 per segnali discreti) rispetto a campionamento+tenuta ($\neq 1$ per segnali continui).

con K_P guadagno proporzionale e

$$(8.42) \quad T_D := \frac{K_D}{K_P}, \quad \text{tempo d'anticipo,}$$

$$(8.43) \quad T_I := \frac{K_P}{K_I}, \quad \text{tempo dell'azione integrale.}$$

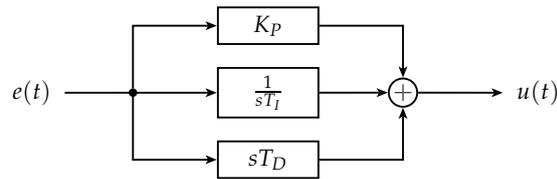


Figura 42: Implementazione "in parallelo" di un P.I.D.

Sorge però un problema: a causa del termine sT_D la (8.41) è una F.d.T. non propria. In pratica si aggiunge un polo ad alta frequenza per la realizzabilità e per filtrare il rumore:

$$(8.44) \quad C'_{PID,p}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_L} \right),$$

$$= K_P \frac{s^2(T_I T_L + T_I T_D) + s(T_I + T_L) + 1}{sT_I(1+sT_L)} \quad \frac{T_D}{10} \leq T_L \leq \frac{T_D}{3}.$$

2. *Implementazione "in serie"* (Fig.43). In questo caso la F.d.T. del controllore assume la forma

$$(8.45) \quad C'_{PID,s}(s) = K_P \frac{(sT_I + 1)(sT_D + 1)}{sT_I(1+sT_L)} \quad \frac{T_D}{10} \leq T_L \leq \frac{T_D}{3}.$$

Spesso quest'ultima implementazione è preferita in quanto si ha un'espressione degli zeri $z_1 = -\frac{1}{T_I}$ e $z_2 = -\frac{1}{T_D}$ che risulta vantaggiosa per descrivere il comportamento del sistema con i diagrammi di Bode.

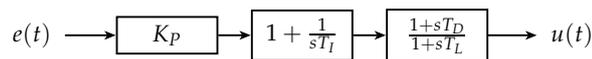


Figura 43: Implementazione "in serie" di un P.I.D.

Finora abbiamo ragionato a tempo continuo, passiamo quindi ad analizzare i regolatori P.I.D. a tempo discreto. Di solito si considerano versioni a tempo discreto delle tre azioni.

- *Azione proporzionale*: $K_P \xrightarrow{s \rightarrow z} K_P^d$.
- *Azione derivativa*: si può tradurre $C_D(s) := \frac{U_D(s)}{E(s)} = \frac{sT_D}{1+sT_L}$ ad esempio con il metodo di Eulero all'indietro, ottenendo, con un po' di conti,

$$(8.46) \quad C_D(z) = \frac{T_D}{T+T_L} \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{T_L}{T+T_L}z^{-1}}.$$

L'espressione appena trovata nel dominio del tempo si scrive come

$$(8.47) \quad u_D(k) = \frac{T_L}{T+T_L} u_D(k-1) + \frac{T_D}{T+T_L} (e(k) - e(k-1)).$$

- *Azione integrativa*: con Eulero all'indietro si ottiene la relazione

$$(8.48) \quad u_I(k+1) = u_I(k) + \frac{T}{T_I} e(k+1),$$

ovvero $\frac{1}{s} \simeq \frac{Tz}{z-1}$, i.e. la trasformata \mathcal{Z} del gradino.

8.5 OSSERVAZIONE (ruolo delle azioni P,I,D). Facciamo alcuni commenti di carattere generale sulle funzioni svolte dalle tra azioni di un P.I.D., proporzionale, integrativa e derivativa.

- *Azione P*:
 - rende il sistema più pronto, all'aumentare di K_P ;
 - problemi di instabilità per K_P "grandi".
- *Azione I*:
 - annulla l'errore a regime (se il sistema non aveva già un polo nell'origine);
 - abbassa il margine di fase e quindi rende meno stabile il sistema;
 - fa sorgere problemi di saturazione.
- *Azione D*:
 - aumenta il margine di fase;
 - diminuisce il tempo di assestamento e di salita;
 - richiede segnali di attuazione elevati;
 - amplifica il rumore in uscita.

8.4 Sintesi con il margine di fase: richiami

Richiamiamo in questa sezione una tecnica nota per la sintesi di controllori a tempo continuo, i quali possono poi essere tradotti nel caso discreto attraverso le tecniche analizzate in §8.2. Tale tecnica è basata sulla traduzione delle specifiche sulla catena chiusa W (e.g. t_r , $t_{a,5\%}$, m_p) in specifiche sulla catena aperta $G := CP$ (pulsazione di attraversamento ω_a^* e margine di fase m_φ^*). Si fanno le seguenti ipotesi (cfr. Fig.44):

- il diagramma di Nyquist di P abbia un solo punto di attraversamento sull'asse reale (negativo);
- il diagramma di Nyquist di P abbia un solo punto di attraversamento sulla circonferenza unitaria (in corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω_a);
- il diagramma di Nyquist di P sia "aperto", ossia $P(s)$, che si suppone razionale fratta, è strettamente propria.

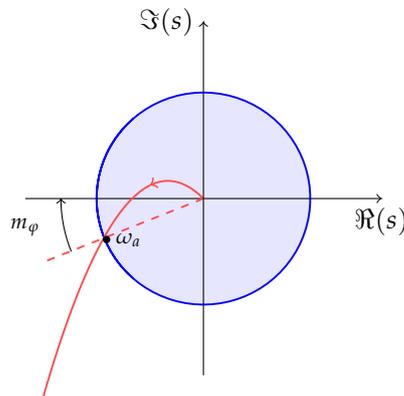


Figura 44: Diagramma di Nyquist di $P(s)$.

Supponiamo di richiedere per il sistema in catena aperta una pulsazione di attraversamento ω_a^* e un margine di fase m_φ^* . Se P non soddisfa le due condizioni imposte dobbiamo realizzare un controllore C tale che la catena diretta CP che le soddisfi. Il procedimento di sintesi di C è costituito dai seguenti passi:

1. traduzione delle specifiche su t_r e m_p in specifiche su ω_a^* e m_φ^* secondo le utili formule:

$$(8.49) \quad \omega_a^* \simeq \frac{2}{t_r},$$

$$(8.50) \quad m_\varphi^* \simeq 1.04 - 0.8m_p;$$

2. dalle specifiche di regime permanente (o anche da componenti di modello interno necessarie) si progetta una prima parte del controllore, tipicamente della forma:

$$(8.51) \quad C'(s) = \frac{k_{RP}}{s^{v_{RP}}}.$$

Tale termine poi sarà inserito, in maniera fittizia, nel processo $P(s)$ ottenendo così la funzione di trasferimento modificata

$$(8.52) \quad P'(s) = C'(s)P(s);$$

3. si trovano (per via analitica o attraverso i diagrammi di Bode) per $P'(s)$ le due quantità: $\arg(P'(j\omega_a^*))$, $|P'(j\omega_a^*)|$
4. si produce una $C(s)$ tale che

$$(8.53) \quad C(j\omega_a^*) = Me^{j\varphi},$$

con

$$M := |C(j\omega_a^*)| = \frac{1}{|P'(j\omega_a^*)|}$$

$$\varphi := \arg(C(j\omega_a^*)) = m_\varphi^* - \pi - \arg(P'(j\omega_a^*)).$$

E' allora immediato verificare che, con tali definizioni, la funzione di trasferimento in catena diretta soddisfa le specifiche (tradotte) su margine di fase e pulsazione di attraversamento. $C(s)$ può a questo punto essere realizzato utilizzando una delle *azioni o reti elementari* o un controllore standard, come descritto nelle sezioni seguenti.

In conclusione, il controllore da implementare nell'interconnessione sarà quindi la combinazione della parte che garantisce il corretto comportamento in regime permanente e di quella che corregge margine di fase e pulsazione di attraversamento:

$$(8.54) \quad C(s)'' = C(s)C'(s).$$

8.5 Progettazione di reti elementari

Un modo di progettare $C(s)$ è quello di scegliere un'opportuna *azione o rete elementare* in funzione di modulo e fase di $P'(j\omega_a^*)$ e delle specifiche. La scelta è si esegue seguendo le indicazioni di Tab.3, e le varie azioni sono descritte nel dettaglio a seguire.

	$ P'(j\omega_a^*) < 1$	$ P'(j\omega_a^*) > 1$
$\arg(P'(j\omega_a^*)) > m_\varphi^* + \pi$	azione proporzionale	rete attenuatrice
$\arg(P'(j\omega_a^*)) < m_\varphi^* + \pi$	rete anticipatrice	rete a sella

Tabella 3: Azioni correttrici.

- *Azione proporzionale*. La F.d.T. del controllore è un puro guadagno: $C_p(s) = K$.

- *Rete attenuatrice.* Presenta una F.d.T. del tipo

$$(8.55) \quad C_{att}(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad 0 < \alpha < 1, T > 0.$$

Imponendo la (8.53) si ottengono le relazioni

$$(8.56)$$

$$\alpha = \frac{M(\cos \varphi - M)}{1 - M \cos \varphi},$$

$$(8.57)$$

$$T = \frac{1}{\omega_a^*} \frac{M \cos \varphi - 1}{M \sin \varphi},$$

Si noti che per avere $\alpha > 0$ dev'essere $M < \cos \varphi$, tale condizione non è tuttavia stringente in quanto se non è soddisfatta basta prendere un φ più piccolo ottenendo così un margine di fase totale m_φ maggiore. Questo può limitare le prestazioni ma garantisce il mantenimento della stabilità.

- *Rete anticipatrice.* In questo caso si ha

$$(8.58) \quad C_{ant}(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad 0 < \alpha < 1, T > 0,$$

con

$$(8.59)$$

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)},$$

$$(8.60)$$

$$T = \frac{1}{\omega_a^*} \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

La condizione $\alpha > 0$ implica $M > \frac{1}{\cos \varphi}$, che in questo caso è stringente, *i.e.* se non è verificata le specifiche non possono essere soddisfatte.

- *Rete attenuatrice / anticipatrice o a sella.* La F.d.T. del controllore è

$$(8.61) \quad C_{sella}(s) = \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s} \frac{1 + T_2 s}{1 + \alpha T_2 s}, \quad 0 < \alpha < 1, T_1 > T_2 > 0.$$

Si utilizza quando si verifica contemporaneamente $|P'(j\omega^*)| > 1$ e $\arg(P'(j\omega_a^*)) < m_\varphi + \pi$. Per determinare i parametri incogniti nella (8.61) si procede come segue:

- si controlla se è soddisfatta la condizione limite $M < \cos \varphi$, altrimenti la rete non può essere realizzata;

- si calcola il parametro

$$(8.62) \quad m := \frac{M(\cos \varphi - M)}{1 - M \cos \varphi};$$

- si fissa il rapporto

$$(8.63) \quad k > \frac{1}{m};$$

- si trova α tramite la formula

$$(8.64) \quad \alpha = \frac{km - 1}{k - m};$$

- si calcola

$$(8.65) \quad x_+ = \frac{\frac{M^2(\alpha^2+k^2)-1-\alpha^2k^2}{1-M^2} + \sqrt{\left(\frac{M^2(\alpha^2+k^2)-1-\alpha^2k^2}{1-M^2}\right)^2 - 4\alpha^2k^2}}{2\alpha^2k^2};$$

- infine si ottiene

$$(8.66) \quad T_2 = \frac{1}{\omega_a^*} \sqrt{x_+}, \quad T_1 = kT_2;$$

5. si verifica se sono soddisfatte le specifiche (la traduzione è approssimata) ed in caso contrario si itera il procedimento cambiando i valori di ω_a^* e m_φ^* .

8.6 Progettazione di P.I.D. - P.I. - P.D. con il margine di fase

Utilizzando lo stesso metodo visto sopra si può affrontare anche la progettazione di controllori standard.

Progettazione di P.I.D.

Consideriamo la F.d.T. del PID riscritta come:

$$(8.67) \quad C_{PID}(s) = \frac{K_I}{s} \left(1 + T_I s + T_I T_D s^2 \right).$$

Il termine $\frac{K_I}{s}$ si utilizza per le specifiche di regime permanente, mentre la parte rimanente dovrà essere progettata seguendo la procedura descritta nella sezione precedente. A tal scopo poniamo $P'(s) := \frac{K_I}{s} P(s)$. Si vede allora che le quantità M e φ definite nella (8.53) assumono la forma (includendo l'integratore nel processo si aumenta il ritardo di $\pi/2$):

$$(8.68) \quad M = \frac{\omega_a^*}{K_I |P(j\omega_a^*)|}, \quad \varphi = m_\varphi^* + \frac{3\pi}{2} - \arg(P'(j\omega_a^*)).$$

Uguagliando ora parte reale e immaginaria di

$$(8.69) \quad C(j\omega_a^*) = 1 + T_I s j\omega_a^* - T_I T_D (\omega_a^*)^2 = M e^{j\varphi}.$$

si ricavano i valori di T_I , T_D :

(8.70)

$$\Im : T_I \omega_a^* = M \sin \varphi \Rightarrow T_I = \frac{M \sin \varphi}{\omega_a^*},$$

(8.71)

$$\Re : 1 - (T_I T_D \omega_a^*)^2 = M \cos \varphi \Rightarrow T_D = \frac{1 - M \cos \varphi}{M \sin \varphi \omega_a^*},$$

8.6 OSSERVAZIONE. Affinchè sia possibile realizzare il controllore C:

- $T_D > 0$, che implica $M < \frac{1}{\cos \varphi}$;
- $T_I > 0$, che implica $\varphi \in [0, \pi]$;
- si deve aggiungere un polo ad alta frequenza $2\pi T_L$ per rendere C proprio.

Progettazione di P.D.

Consideriamo la F.d.T.

$$(8.72) \quad C_{PD}(s) = K_P(1 + T_D s).$$

Calcolata alla pulsazione di attraversamento desiderata la (8.72) porge

$$(8.73) \quad C_{PD}(j\omega_a^*) = K_P + j\omega_a^* K_P T_D = M e^{j\varphi}.$$

Uguagliando come fatto prima parte reale e immaginaria abbiamo

(8.74)

$$\Re : K_P = M \cos \varphi,$$

(8.75)

$$\Im : T_D = \frac{\tan \varphi}{\omega_a^*}.$$

In questo caso si deve avere $T_D > 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \pi/2]$ (similmente alla rete anticipatrice).

Progettazione di P.I.

Consideriamo in questo caso la F.d.T.

$$(8.76) \quad C_{PI} = K_P \left(1 + \frac{1}{s T_I} \right),$$

che calcolata alla pulsazione ω_a^* diventa

$$(8.77) \quad C_{PI}(j\omega_a^*) = K_P + K_P \frac{1}{j\omega_a^* T_I} = M e^{j\varphi}.$$

Uguagliando ancora una volta parte reale e immaginaria si ottiene

(8.78)

$$\Re : K_P = M \cos \varphi,$$

(8.79)

$$\Im : T_I = \frac{-\cotan \varphi}{\omega_a^*},$$

La condizione che deve essere soddisfatta è $T_I > 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, 0]$ (similmente alla rete attenuatrice).

9 SINTESI DI CONTROLLORI DIGITALI: METODI DI SINTESI DIRETTA

9.1 Sintesi diretta nel discreto "per cancellazione"

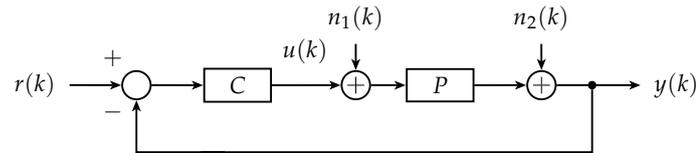


Figura 45: Architettura di controllo in catena chiusa con disturbi.

Prendiamo in considerazione l'architettura di controllo in catena chiusa di Fig.45. Supponiamo di aver tradotto il comportamento desiderato del sistema e le specifiche in una qualche F.d.T. in catena chiusa desiderata $W(z)$. Se vogliamo realizzare una particolare $W(z)$ esattamente, possiamo esplicitare C in funzione di W e P nella relazione:

$$W = \frac{CP}{1 + CP},$$

ottenendo quindi un'espressione per il controllore richiesto

$$(9.1) \quad C(z) = \frac{W(z)}{1 - W(z)} \frac{1}{P(z)}.$$

Tuttavia tale metodo di sintesi diretta fa sorgere dei problemi:

- $C(z)$ da implementare può essere ad elevata complessità (anche se grazie alle capacità di calcolo dei μP odierni può non risultare un problema);
- $C(z)$ deve essere realizzabile, quindi il controllore deve essere causale, il che implica che $C(z)$ deve essere propria. Non è immediatamente evidente che condizioni deve soddisfare $W(z)$, il nostro "parametro" libero di progettazione perchè questo accada;
- $C(z)$ include un termine $P(z)^{-1}$ che ha il compito di "compensare" il termine $P(z)$, il che è molto delicato se il modello è approssimato e si rischia, potenzialmente, di perdere stabilità interna. Il metodo si chiama anche sintesi diretta *per cancellazione*;

Vediamo innanzitutto che condizioni devono essere soddisfatte per rendere il sistema causale e quindi $C(z)$ propria. Innanzitutto poniamo

$$(9.2) \quad P = \frac{N_P}{D_P}, \quad C = \frac{N_C}{D_C}, \quad W = \frac{N_W}{D_W},$$

con i numeratori e denominatori (N_i, D_i) coprimi di grado n_i e d_i rispettivamente, per $i = P, W$. Sostituendo in $C(z)$ dato dalla (9.1) risulta

$$(9.3) \quad C = \frac{N_C}{D_C} = \frac{N_W}{D_W - N_W} \frac{D_P}{N_P},$$

con

$$(9.4) \quad n_C = n_W + d_P - \Delta, \quad d_C = d_W + n_P - \Delta,$$

ove Δ è il numero di cancellazioni tra N_C e D_C e abbiamo assunto che il grado di $D_W - N_W$ sia ancora d_W .¹² Se l'ultima ipotesi non è verificata bisogna considerare $d'_W = d_W - \Delta'$, ove Δ' è la perdita di grado in $D_W - N_W$ dovuta a cancellazioni tra i termini di grado massimo tra D_W e N_W . Allora affinché C sia proprio bisogna avere

$$(9.5) \quad n_C \geq d_C \Leftrightarrow n_W + d_P \leq d'_W + n_P \Leftrightarrow \underbrace{d_W - n_W}_{r_W} \geq d'_W - n_W \geq \underbrace{d_P - n_P}_{r_P}.$$

Allora le W realizzabili devono aver un grado relativo r_W (il quale come ben noto corrisponde al ritardo della risposta in catena chiusa) maggiore o uguale a quello di P . Per $P(z)$ tipiche, ottenute per campionamento e tenuta da sistemi continui, si ha che $r_P = 1$ e quindi $r_W \geq 1$.

Passiamo a considerare le condizioni da imporre su W per ottenere la stabilità interna. Per la Proposizione 5.9 bisogna verificare che

$$(9.6) \quad \bar{D} := N_P N_C + D_P D_C \text{ sia stabile e } \text{grado}(\bar{D}) = \text{grado}(D_P D_C).$$

Oppure, equivalentemente, si deve verificare che tutte le F.d.T. da ingressi, ed eventuali ingressi ausiliari posti all'ingresso dei blocchi, a tutte le variabili interne siano stabili. Esplicitamente, sempre con riferimento alla Fig.32, devono essere stabili

$$(9.7) \quad \frac{Y}{R} = W = \frac{CP}{1 + CP},$$

$$(9.8) \quad \frac{Y}{N_1} = \frac{P}{1 + CP} = W \frac{D_C}{N_C},$$

$$(9.9) \quad \frac{U}{N_1} = \frac{1}{1 + CP} = W \frac{D_P D_C}{N_P N_C},$$

$$(9.10) \quad \frac{U}{R} = \frac{C}{1 + CP} = W \frac{D_P}{N_P}.$$

Si noti che non abbiamo considerato il disturbo N_2 , in quanto può essere considerato come una versione di R cambiata di segno. Le condizioni allora sono

- dalla (9.7) W deve essere stabile, il che d'altronde è una specifica base su

¹²Questo è sempre vero se W è strettamente propria o se è propria con guadagno di Evans negativo.

W ;

- dalla (9.10) le radici instabili di N_P devono essere cancellate da radici di N_W ;
- dalla (9.8) si ha

$$(9.11) \quad W \frac{D_C}{N_C} = \frac{N_W (D_W - N_W) N_P}{D_W N_W D_P},$$

dalla quale si vede che $D_W - N_W$ deve avere come radici tutti i poli instabili di P ;

- le condizioni precedenti assicurano che anche la (9.9) sia BIBO stabile.

9.1 OSSERVAZIONE. Concludiamo osservando che:

- il metodo di sintesi diretta è semplice e sistematico, a meno che P sia instabile, in questo caso dobbiamo scegliere N_W e D_W in modo che $D_W - N_W$ abbia certe radici;
- se vogliamo componenti di modello interno, possiamo includerle in maniera fittizia nel processo $P(s)$ nel modo seguente, Sia $R = \frac{N_R}{D_R^S D_R^I}$ il riferimento che vogliamo seguire con D_R^S stabile e D_R^I instabile, allora basta definire $\tilde{P}(z) = \frac{1}{D_R^I} P(z)$ e procedere come illustrato sopra;¹³
- la stabilità interna implica che tutti i poli sono all'interno del cerchio unitario, essendo i poli una funzione continua dei coefficienti, per piccole variazioni i poli rimangono stabili. Quindi se sbagliamo, purché di poco, a modellizzare $P(z)$ non perdiamo la stabilità.

Rimangono alcune questioni aperte:

1. Come scegliamo la F.d.T. del sistema a catena chiusa W ?
2. Come includiamo le specifiche di inseguimento (o tracking)?
3. Come possiamo tenere conto di ritardi nel processo da controllare P o nei processi di misura?
4. Possiamo usare le idee trovate per progettare P.I.D. & Co.?

Vediamo di rispondere a queste domande iniziando col descrivere alcuni metodi per la scelta di W .

¹³Bisogna porre però attenzione perché in tal caso ci troviamo nel caso "difficile" sopra citato, in cui bisogna includere le radici instabili di P in $D_W - N_W$.

9.2 Metodo di Dahlin

Utilizzando questo metodo si cerca $W(z)$ che “assomigli” ad una $W(s)$ a tempo continuo del tipo

$$(9.12) \quad W(s) = \frac{e^{-st_d}}{1 + s\tau},$$

ove t_d è il tempo di ritardo del sistema in catena chiusa e $\frac{1}{\tau}$ è un polo che caratterizza la prontezza del sistema (più piccolo viene scelto τ più “pronto” è il sistema). Si assume t_d multiplo intero del periodo di campionamento T , *i.e.* $t_d = nT$. Dalla formula di traduzione nel discreto per invarianza della risposta a gradino (5.8) abbiamo

$$(9.13) \quad \begin{aligned} W(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \circ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right]; T \right] \\ &= z^{-n} \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}. \end{aligned}$$

Per calcolare il valore di n dobbiamo controllare il grado relativo di $P(z)$, r_p , in quanto dev’essere soddisfatta la (9.5)

$$(9.14) \quad n + 1 \geq r_p \Rightarrow n \geq r_p - 1.$$

Allora il controllore $C(z)$ assume la forma

$$(9.15) \quad C(z) = \frac{W(z)}{1 - W(z)} \frac{1}{P(z)} = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{-1 + e^{-T/\tau} + z^n(z - e^{-T/\tau})} \frac{1}{P(z)},$$

dove abbiamo supposto, tacitamente, che $P(z)$ sia a fase minima, per garantire la stabilità interna.

9.3 Scelta di $W(z)$ tramite poli dominanti

Come sappiamo, a tempo continuo, le specifiche sul transitorio sono del tipo

$$(9.16) \quad m_p \leq m_p^*, \quad t_r \leq t_r^*, \quad t_a \leq t_a^*.$$

In base a queste specifiche rimane associata la regione ammissibile per il piazzamento dei poli dominanti rappresentata in Fig.29. Tramite traduzione nel discreto della F.d.T. approssimata $W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + (\frac{s}{\omega_n})^2}$ si ottiene

$$(9.17) \quad \begin{aligned} W_d(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \circ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right]; T \right] \\ &= \frac{K(z - z_1)}{(z - p_1^d)(z - p_2^d)}. \end{aligned}$$

dove $p_{1,2}^d = e^{p_{1,2}T}$ con $p_{1,2} = -\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$. Più nel dettaglio si procede seguendo il seguente algoritmo

- dalle specifiche m_p, t_r, t_a si sceglie T e si trova una regione ammissibile nel piano s ;
- si posizionano i poli (vicini ma non troppo al limite);
- si traducono i poli nel discreto: $p_{1,2}^d = e^{p_{1,2}T}$;
- si aggiunge un ritardo a $W(z)$ al fine di rendere proprio $C(z)$ e si utilizza z_1 in (9.17) per includere zeri instabili se ve ne sono, altrimenti si prende z_1 piccolo in modulo;
- si sceglie K tale da ottenere un guadagno asintotico unitario.

Ci chiediamo ora come si modifica la regione ammissibile nella traduzione dal continuo al discreto?

- Dalla specifica sul tempo di salita t_r^* si ha $\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r^*}$. La regione individuata da tale disuguaglianza viene mappata nel discreto come mostrato in Fig.46.

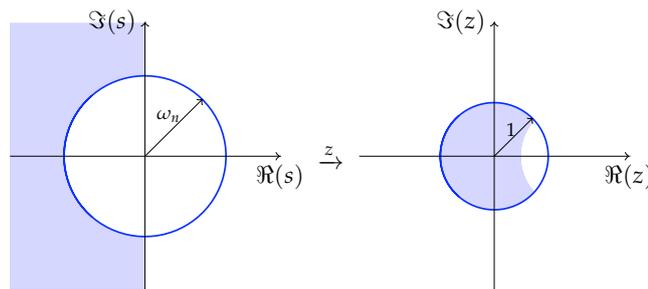


Figura 46: Mappatura dal piano s al piano z della regione individuata da t_r^* .

- Dalla specifica sul tempo di assestamento t_a^* abbiamo $\sigma = \omega_n \zeta \geq \frac{\text{cost.}}{t_a^*}$. In questo caso abbiamo la situazione di Fig.47.
- Dalla specifica sul massimo di picco m_p^* deve essere verificata la condizione $\zeta > \zeta^* = \frac{-\ln m_p^*}{\sqrt{(\ln m_p^*)^2 + \pi^2}}$,¹⁴ la quale si traduce graficamente nel piano z come in Fig.48.

Dall'intersezione delle tre regioni così trovate rimane determinata la regione ammissibile per il posizionamento dei poli di $W(z)$, come illustrato in Fig.49.

9.2 OSSERVAZIONE. È importante notare che a tempo discreto si può raggiungere l'equivalente di un polo a $-\infty$ nel continuo piazzando un polo nell'origine del piano z . Si ottiene in questo modo un *dead-beat controller* che permette l'inseguimento esatto *in un tempo finito* del riferimento.

¹⁴Si ricorda che $\varphi = \cos(\zeta)$.

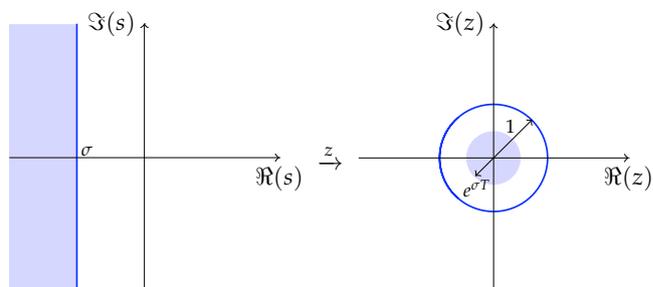


Figura 47: Mappatura dal piano s al piano z della regione individuata da t_a^* .

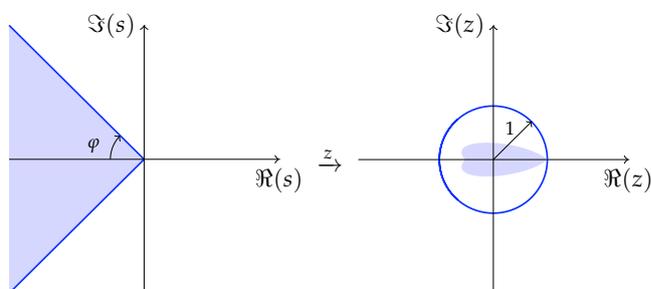


Figura 48: Mappatura dal piano s al piano z della regione individuata da m_p^* .

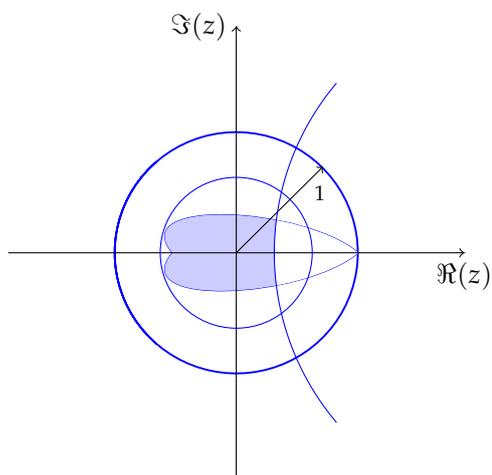


Figura 49: Esempio di regione ammissibile per il posizionamento dei poli nel piano z .

9.4 Un'interpretazione alternativa della sintesi diretta

Vediamo qui un modo di interpretare e derivare la formula di sintesi diretta che parte da un'interconnessione diversa, e che rimane valido sia per sistemi

a tempo continuo che a tempo discreto. Consideriamo lo schema a blocchi di Fig.50. Sia P il processo (vero) da controllare, \tilde{P} un modello potenzialmente approssimato di P a disposizione del progettista del controllore, e C' un controllore preliminare. È immediato vedere che se il nostro modello del processo è uguale al processo vero, $\tilde{P} \equiv P$, la variabile b è nulla, e dunque il controllo è a catena aperta con $C' = \frac{W}{P}$, ove W comportamento controllato desiderato.

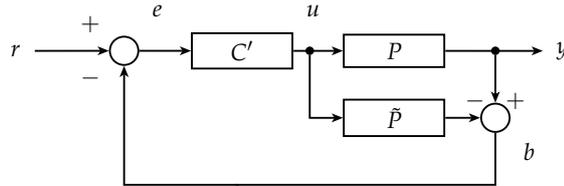


Figura 50: Schema a blocchi per la sintesi diretta del controllore,

Lo schema di Fig.50 può essere equivalentemente rimpiazzato da quello di Fig.51, dal quale è più facile osservare che se denotiamo con C la catena di retroazione positiva che comprende C' e P si può scrivere

$$(9.18) \quad C = \frac{C'}{1 - C'\tilde{P}} = \frac{\frac{W}{P}}{1 - \frac{W}{P}\tilde{P}} \stackrel{\tilde{P} \equiv P}{=} \frac{W}{1 - W\frac{1}{P}}$$

che non è altro che la nota formula della sintesi diretta.

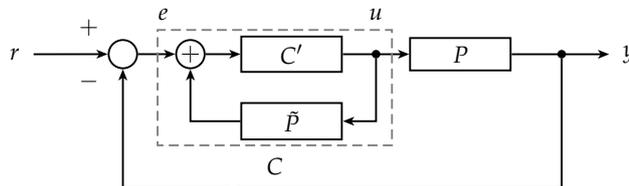


Figura 51: Schema a blocchi (equivalente) per la sintesi diretta del controllore.

9.5 Compensatore di ritardo di Smith

In un'ampia classe di processi si ha

$$(9.19) \quad P(s) = e^{-st_d} P'(s),$$

ossia il processo include un ritardo pari a t_d . Il più delle volte l'obiettivo dell'inseguimento tiene conto del ritardo, ovvero

$$(9.20) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t - t_d) = r(t).$$

Vediamo un esempio (tratto da [?]) di sistema con ritardo nel quale si vuole soddisfare la (9.20).

9.3 ESEMPIO (controllo della temperatura di un fluido in un condotto). Si abbia la situazione fisica descritta in Fig.52.

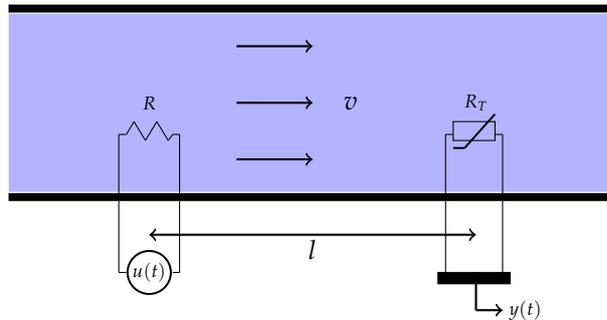


Figura 52: Controllo della temperatura di un fluido in un condotto.

Sia R_T il termistore che misura la temperatura del condotto e $y(t)$ (una quantità proporzionale al) la temperatura misurata. Supponiamo di utilizzare un resistore R per controllare la temperatura del condotto alimentata da una tensione $u(t)$ d'ingresso fatta variare tramite un modulatore di potenza. Un modello approssimato della F.d.T. del processo da controllare è, senza tener conto del ritardo,

$$P'(s) = \frac{k}{1 + s\tau}.$$

Se supponiamo ora costante la velocità del fluido nel condotto il ritardo nella misura della temperatura è pari a $t_d = l/v$. E quindi il processo da controllare, con l'aggiunta del ritardo di misura, risulta essere

$$P(s) = \frac{ke^{-st_d}}{1 + s\tau}.$$

Se si utilizza un controllore proporzionale di guadagno K_P , l'intero sistema si può rappresentare con lo schema a blocchi di Fig.53. Dai diagrammi di Nyquist di $P'(s)$ e $P(s)$ (58) si osserva però che per valori di K_P elevati il sistema può presentare instabilità, dunque per evitare ciò è opportuno trovare uno schema alternativo di controllo.

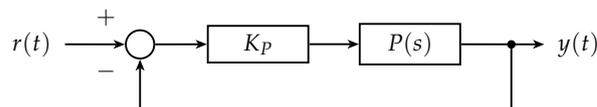


Figura 53: Schema a blocchi di controllo proporzionale.

◇

Vediamo allora la struttura del compensatore (o predittore) di Smith. Con

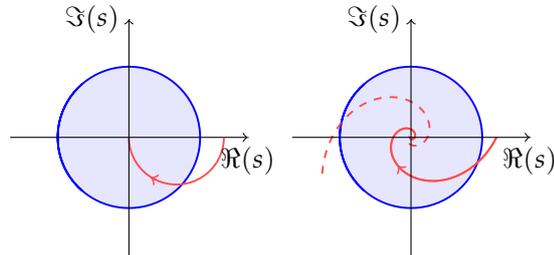


Figura 54: Diagramma di Nyquist di $P(s)$ (a sinistra) e della sua versione ritardata $P'(s)$ (a destra). Si nota che per valori del guadagno elevati il diagramma di $P'(s)$ circonda il punto $-1 + j0$ con la nascita di instabilità (curva tratteggiata in rosso).

riferimento allo schema a blocchi di Fig.55, desideriamo avere

$$(9.21) \quad \frac{B(s)}{U(s)} = P'(s),$$

ossia vorremmo “cancellare” il termine di ritardo presente in $P(s)$. Ciò risulta semplice se si conosce $P'(s)U(s)$, ma non è questo il caso, in quanto la variabile in uscita da P' non è misurabile direttamente.

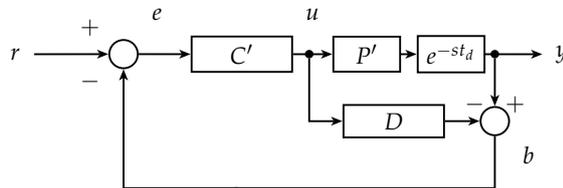


Figura 55: Schema a blocchi del predittore di Smith.

Denotando con $P(s) = P'(s)e^{-st_d}$ l'intero processo comprendente il ritardo, dalla (9.21) abbiamo

$$(9.22) \quad P(s) - D(s) = P'(s) \Rightarrow D(s) = -(1 - e^{-st_d})P'(s) = e^{-st_d}P'(s) - P'(s).$$

Se ipotizziamo che $\tilde{P}'(s)$ e \tilde{t}_d siano le nostre stime di $P'(s)$ e t_d , lo schema a blocchi di Fig.55 può essere ricondotto a quello di Fig.56. Dalla stessa figura si vede anche che se le nostre stime sono esatte si “cancella” l'anello di retroazione più esterno.

In questo caso si vede che $C'(s)$ può essere progettato come se non ci fosse il ritardo in $P(s)$. Infatti l'uscita retroazionata (ossia il segnale b), se $\tilde{P}' \equiv P'$ e $\tilde{t}_d \equiv t_d$, coincide con quella del processo P' , privo del ritardo.

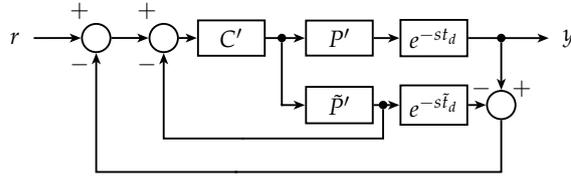


Figura 56: Schema a blocchi (equivalente al precedente) del predittore di Smith.

Calcoliamo la F.d.T. dell'intero sistema

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C'(s)P(s)}{1 + C'(s)(P(s) - D(s))} \\
 (9.23) \quad &= \frac{C'(s)P'(s)}{1 + C'(s)P'(s)} e^{-st_d}.
 \end{aligned}$$

La (9.23) si può fattorizzare in una parte senza ritardo e in un ritardo complessivo pari a quello desiderato, pertanto se si progetta correttamente C' (i.e. se vale $\frac{C'(s)P'(s)}{1+C'(s)P'(s)} \simeq 1$) viene soddisfatto l'obiettivo di inseguimento (9.20).

9.4 OSSERVAZIONE. L'analisi fatta fino a questo punto vale sia per sistemi continui che discreti. Nella pratica però esistono delle differenze sostanziali tra i due:

- a tempo continuo non è banale realizzare un ritardo e^{st_d} in una F.d.T. tramite reti elettriche, perciò si preferisce utilizzare una approssimazione dell'esponenziale, e.g. un'approssimazione di Padè (1, 1) $e^{-st_d} = \frac{1-st_d/2}{1+st_d/2}$;
- a tempo discreto è facile realizzare funzioni non lineari quali l'esponenziale, infatti basta memorizzare i valori assunti dalla funzione in opportune tabelle di memoria del μP (*look-up tables*). In questo caso si utilizza lo schema di Fig.57 con $e^{-s\tilde{t}_d} \sim z^{-N}$, $NT = \tilde{t}_D$ e

$$C(z) = \frac{C'(z)}{1 + (1 - z^{-N})C'(z)\tilde{P}'(z)}.$$

9.6 Richiami di equazioni Diofantee

Finora abbiamo trascurato un aspetto importante nella sintesi diretta: se il processo da controllare $P(z)$ ha poli instabili, essi devono essere radici di $D_W(z) - N_W(z)$ per assicurare la stabilità interna. Le tecniche che abbiamo considerato finora danno una $W(z)$ semplice, ma non sappiamo ancora come implementare sistematicamente questo vincolo. A questo scopo, si può utilizzare il fatto che il denominatore di W in catena chiusa, *in assenza di cancellazioni*, ha la forma:

$$N_C N_P + D_C D_P = D_W,$$

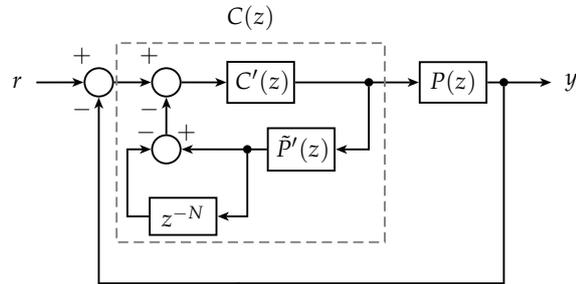


Figura 57: Schema a blocchi della versione discreta del predittore di Smith.

che si può interpretare come un'equazione diofantea (o di Bézout) nelle incognite (polinomiali) $X = D_C, Y = N_C$, ovvero i parametri del compensatore da determinarsi. Tutte le F.d.T. dagli ingressi/disturbi della catena chiusa hanno come poli un sottoinsieme delle radici di tale D_W . Quindi, assicurare che D_W è Hurwitz assicura la stabilità interna dell'interconnessione. Tali equazioni sono state ampiamente studiate e condizioni necessarie e sufficienti alla loro soluzione si possono trovare in letteratura.

Si vedano le note manoscritte – file: note15.pdf

rinunciamo a priori a decidere dove mettere gli zeri, seguendo un metodo (vedere più sotto) di sintesi diretta in cui l'unico dato sono i poli.

Con questo metodo, rinunciamo a priori a specificare dove allocare gli zeri di $W(z)$ per la sintesi diretta per facilitare la stabilizzazione dell'interconnessione. Si ricordi comunque che gli zeri possono influenzare drammaticamente le prestazioni del sistema, in particolare quando P ha zeri a fase non minima.

9.7 Sintesi con Equazione Diofantea

Studiamo ora in dettaglio il metodo di sintesi diretta (o analitica) mediante equazione diofantea. Si consideri l'interconnessione di Fig.58. Imponiamo che la F.d.T. in catena chiusa sia

$$(9.24) \quad W(z) = \frac{Y_o(z)}{R(z)} = \frac{N_C N_P}{N_C N_P + D_C D_P} \stackrel{!}{=} \frac{N_W(z)}{D_*(z)},$$

dove $D_*(z)$ raccoglie le posizioni desiderate dei poli e $X := D_C$ e $Y := N_C$ sono incogniti e da determinarsi. Con questo metodo, N_W rimane un parametro libero che viene determinato dalla procedura di sintesi.

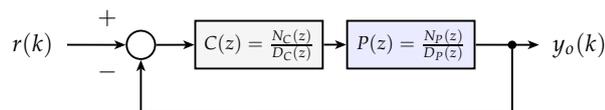


Figura 58: Schema a blocchi di interconnessione di controllo in catena chiusa.

Per la stabilità interna devono essere BIBO stabili le F.d.T. $W, \frac{W}{C}, \frac{W}{P}, \frac{W}{CP}$. Si nota subito allora che se troviamo X e Y che rendono D_* stabile è verificata anche la stabilità interna del sistema.¹⁵

Ritornando al problema generale, dobbiamo trovare (se esistono) dei polinomi X e Y soluzioni di

$$(9.25) \quad N_P Y + D_P X = D_*$$

9.5 OSSERVAZIONE. Notiamo che:

- per quanto osservato sopra, una volta trovati X e Y , sappiamo che $C = \frac{Y}{X}$ stabilizza internamente l'interconnessione;
- la (9.25) non permette di scegliere dove posizionare gli zeri di $W(z)$;

9.6 PROPOSIZIONE. Siano N_P e D_P polinomi coprimi (ossia che non ci siano zeri comuni fra N_P e D_P). Sia $n := \text{grado}(D_P)$. Siano, inoltre, $\text{grado}(X) = n - 1$ e $\text{grado}(Y) \leq n - 1$. Infine, scegliamo un polinomio D_* con $\text{grado}(D_*) = 2n - 1$. Allora, si può dimostrare che

- esiste una soluzione $C = \frac{Y}{X}$;
- tale soluzione è razionale propria.

9.7 OSSERVAZIONE. Vi è però un problema: $\text{grado}(D_*) = 2n - 1$ può essere "grande", ossia potremmo non avere specifiche su $2n - 1$ poli. Allora si può prendere

$$(9.26) \quad D_*(z) = D_{dom}(z)\Delta(z),$$

dove $D_{dom}(z)$ contiene i poli dominanti mentre $\Delta(z)$ contiene poli veloci aggiuntivi (e.g. poli in zero).

Siano¹⁶

$$(9.27) \quad D_P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$(9.28) \quad N_P(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n,$$

$$(9.29) \quad X(z) = x_1 z^{n-1} + x_2 z^{n-2} + \dots + x_n,$$

$$(9.30) \quad Y(z) = y_1 z^{n-1} + y_2 z^{n-2} + \dots + y_n,$$

$$(9.31) \quad D_*(z) = c_1 z^{2n-1} + c_2 z^{2n-2} + \dots + c_{2n}.$$

¹⁵Si può poi dimostrare che questa oltre ad essere una condizione sufficiente per la stabilità interna è anche una condizione necessaria.

¹⁶ $D_P(z)$ è stato preso monico, senza perdita di generalità.

Con le notazioni introdotte la risoluzione dell'equazione diofantea (9.25) può essere ricondotta a quella di un sistema lineare (invertibile se, come ipotizzato, N_P e D_P sono coprimi) della forma

(9.32)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & | & b_1 & b_0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & | & b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \ddots & a_2 & a_1 & 1 & | & b_{n-1} & \ddots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline a_n & \ddots & \ddots & a_2 & a_1 & | & b_n & \ddots & \ddots & b_2 & b_1 \\ 0 & a_n & \ddots & \ddots & a_2 & | & 0 & b_n & \ddots & \ddots & b_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & | & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & | & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A} \quad (2n \times 2n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{2n} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$

Quindi dalla (9.32) i coefficienti dei polinomi X e Y sono dati da

$$(9.33) \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

9.8 OSSERVAZIONE. [Sintesi con l'Equazione Diofantea per inseguimento asintotico]

Se si vogliono inserire componenti di modello interno basta sostituire a D_P in (9.25) un $\tilde{D}_P = D_P D_R^I$ dove D_R^I contiene i g poli instabili del riferimento. In questo modo il grado del denominatore \tilde{D}_P diventa $n + g$. Per risolvere il sistema associato alla Diofantea con un numero minimo di incognite e ottenere ancora un controllore proprio si possono scegliere allora:

$$(9.34) \quad \tilde{D}_P(z) = z^{n+g} + a_1 z^{n+g-1} + \cdots + a_{n+g},$$

$$(9.35) \quad N_P(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n,$$

$$(9.36) \quad X(z) = x_1 z^{n-g-1} + x_2 z^{n-g-2} + \cdots + x_{n-g},$$

$$(9.37) \quad Y(z) = y_1 z^{n-1} + y_2 z^{n-2} + \cdots + y_n,$$

$$(9.38) \quad D_*(z) = c_1 z^{2n-1} + c_2 z^{2n-2} + \cdots + c_{2n}.$$

Si noti come si è aumentato il grado di D_P e diminuito rispettivamente quello di X . Si osservi che i blocchi della matrice non sono più quadrati. Risolvendo

il sistema si ottengono X, Y che corrispondono al compensatore proprio:

$$C = \frac{Y}{XD_R^l}.$$

9.8 Sintesi di Controllori Digitali:
Inseguimento Deadbeat

Lezione 12 (2 ore)
11 maggio 2012

Consideriamo la seguente definizione.

9.9 DEFINIZIONE. Un controllore si dice *deadbeat* (DB) rispetto a una classe di segnali di riferimento se l'errore di inseguimento di un qualunque segnale di tale classe diventa nullo dopo un *numero finito* di passi.

9.10 DEFINIZIONE. Un controllore deadbeat si chiama a *tempo minimo* se il numero di passi necessario ad annullare l'errore è il minimo (che garantisce la causalità del controllore).

Consideriamo il classico schema di controllo riportato in Fig.59 e facciamo le seguenti assunzioni:

- la trasformata del riferimento da inseguire è $R(z) = \frac{N_R(z)}{D_R(z)}$, razionale fratta propria con $D_R(z)$ monico;
- $D_R(z)$ è noto di grado n_R .

Sia inoltre n_P il grado di D_P , denominatore di P .

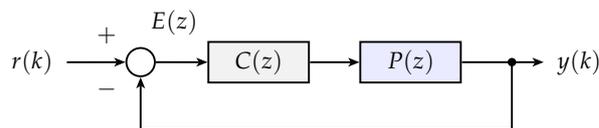


Figura 59: Schema a blocchi del controllo in catena chiusa.

La trasformata \mathcal{Z} dell'errore è

$$(9.39) \quad E(z) = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} R(z) = (1 - W(z))R(z),$$

perché esso si annulli in un numero finito di passi deve essere un polinomio in z^{-1} .¹⁷ Ovvero:

$$(9.40) \quad E(z) = \frac{N_E(z)}{z^k}.$$

Per ottenere questo abbiamo due possibilità, associate alle due equivalenti decomposizioni di $E(z)$ proposte in (9.39):

¹⁷Infatti sappiamo che $\mathcal{Z}^{-1} [\sum_{l=0}^r a_l z^{-l}] = \sum_{l=0}^r \delta(k-l)$.

SINTESI CON EQ. DIOFANTEA; La decomposizione

$$(9.41) \quad E(z) = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} R(z) = \frac{D_C D_P}{D_C D_P + N_C N_P} \frac{N_R}{D_R},$$

ci suggerisce di utilizzare il metodo visti per l'inseguimento asintotico utilizzando l'equazione diofantea, ma *includendo l'intero denominatore del riferimento in \tilde{D}_P* . SI deve risolvere quindi:

$$(9.42) \quad \tilde{D}_P X + N_P Y = D_W,$$

con $\tilde{D}_P = D_P D_R$, di grado $n_P + n_R$, X è di grado $n_P - 1$, N_P viene scritto come un polinomio di grado n_P e Y viene preso di grado $n_P + n_R - 1$. Per avere inseguimento DB vogliamo imporre $D_W = z^{2n_P + n_R - 1}$. Risolta l'equazione Diofantea otteniamo:

$$(9.43) \quad C = \frac{Y}{X D_R},$$

e possiamo quindi verificare che:

$$(9.44) \quad E = \frac{1}{1 + C P} R$$

$$(9.45) \quad = \frac{X D_R D_P}{Z D_R D_P + N_P Y} \frac{N_R}{D_R}$$

$$(9.46) \quad = \frac{X N_R D_P}{D_W} = \frac{X N_R D_P}{z^{2n_P + n_R - 1}}.$$

SINTESI PER CANCELLAZIONE; Un approccio alternativo è quello di cercare di utilizzare la sintesi per cancellazione. Questo, permettendo di determinare anche il numeratore di W in catena chiusa, può essere conveniente e istruttivo, ma richiede particolare attenzione in casi in cui P presenti zeri o poli di modulo maggiore o uguale a 1.

Per procedere con questo secondo metodo, conviene scrivere $R(z)$ in una forma più agevole:

$$(9.47) \quad R(z) = \frac{z^{-n_R} N_R(z)}{z^{-n_R} D_R(z)} = \frac{\tilde{N}_R(z^{-1})}{\tilde{D}_R(z^{-1})}.$$

Allora la (9.39) si scrive equivalentemente come

$$(9.48) \quad E(z) = (1 - W(z)) \frac{\tilde{N}_R(z^{-1})}{\tilde{D}_R(z^{-1})}.$$

Per far sì che $E(z)$ sia un polinomio in z^{-1} dobbiamo richiedere che

$$(9.49) \quad \frac{1 - W(z)}{\tilde{D}_R(z^{-1})} = Q(z^{-1}),$$

con $Q(z^{-1})$ polinomio di grado q per il momento arbitrario. In tal caso abbiamo infatti

$$(9.50) \quad E(z) = \tilde{N}_R(z^{-1})Q(z^{-1}).$$

Notiamo anche che più q , grado di $Q(z^{-1})$, è piccolo, più la risposta deadbeat è rapida ad esaurirsi.

Dalla (9.49) abbiamo che

$$(9.51) \quad \begin{aligned} W(z) &= \frac{N_W}{D_W} = 1 - \tilde{D}_R(z^{-1})Q(z^{-1}) \\ &= \frac{z^\kappa - z^\kappa \tilde{D}_R(z^{-1})Q(z^{-1})}{z^\kappa} \\ &= \frac{z^\kappa - D_R(z)\tilde{Q}(z)}{z^\kappa}, \end{aligned}$$

dove sono stati definiti $\kappa := n_R + q$ e $\tilde{Q}(z) := z^q Q(z^{-1})$. Allora dalla (9.51) condizione necessaria per avere risposta deadbeat è che $W(z)$ abbia tutti i poli nell'origine. Dalla formula della sintesi diretta (9.1) si ha inoltre che il controllore desiderato è

$$(9.52) \quad \begin{aligned} C(z) &= \frac{W(z)}{1 - W(z)} \frac{1}{P(z)} \\ &= \frac{N_W(z)}{D_W(z) - N_W(z)} \frac{D_P(z)}{N_P(z)} \\ &= \frac{N_W(z)D_P(z)}{D_R(z)\tilde{Q}(z)N_P(z)}, \end{aligned}$$

e pertanto osserviamo che in catena diretta $C(z)P(z) = \frac{N_W(z)}{D_R(z)\tilde{Q}(z)}$ inserisce, come ci si doveva attendere, componenti di modello interno corrispondenti all'intero denominatore del riferimento.

Ci rimane una domanda: che $W(z)$ sono ottenibili con il controllo DB? Abbiamo visto dalla (9.51) che

$$(9.53) \quad N_W(z) = z^\kappa - D_R(z)\tilde{Q}(z),$$

con \tilde{Q} polinomio arbitrario. Possiamo allora ottenere un $N_W(z)$ desiderato a patto di essere in grado di risolvere in $\tilde{Q}(z)$ l'equazione

$$(9.54) \quad D_R(z)\tilde{Q}(z) = z^\kappa - N_W(z),$$

e allo stesso tempo mantenere la causalità del controllore e stabilità interna del sistema.

9.11 OSSERVAZIONE. Siano

$$(9.55) \quad D_R(z) = a_{n_R} z^{n_R} + a_{n_R-1} z^{n_R-1} + \dots + a_0,$$

$$(9.56) \quad N_W(z) = b_\kappa z^\kappa + a_{\kappa-1} z^{\kappa-1} + \dots + b_0,$$

$$(9.57) \quad \tilde{Q}(z) = x_q z^q + x_{q-1} z^{q-1} + \dots + x_0,$$

la (9.54) si può riscrivere come un sistema lineare della forma

$$(9.58) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n_R} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n_R-1} & a_{n_R} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_0 & \vdots & \vdots & a_{n_R} \\ \vdots & 0 & a_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}}_{(\kappa+1) \times (q+1)} \begin{bmatrix} x_q \\ x_{q-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - b_\kappa \\ -b_{\kappa-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -b_0 \end{bmatrix}$$

Vi è però un problema: il sistema trovato non è sempre risolubile, in quanto con q incognite non riusciamo a trovare $n_R + q + 2$ coefficienti arbitrari.

Consideriamo ora gli altri vincoli che devono essere soddisfatti da $W(z)$.

- Dobbiamo valutare il grado relativo di $W(z)$ per la realizzabilità, e quindi la causalità, di $C(z)$. Ricordiamo che
 - la condizione sulla causalità di $C(z)$ è soddisfatta se $W(z)$ ha (almeno) grado relativo pari a quello di $P(z)$;
 - $P(z)$ (se ottenuta per tenuta+campionamento) ha, tipicamente, grado relativo 1.

Dalla (9.51), essendo $D_R(z)$ monico per ipotesi, affinché $W(z)$ abbia grado relativo (almeno) unitario anche $\tilde{Q}(z)$ deve essere monico.¹⁸

9.12 OSSERVAZIONE. $\tilde{Q}(z)$ monico garantisce $C(z)$ proprio, ma non strettamente. $\tilde{Q}(z)$ monico e una scelta appropriata degli altri coefficienti può garantire che $C(z)$ sia strettamente proprio: questo implica che in $\tilde{Q}(z)$ compaiano termini di grado minore o uguale a $\kappa - 2$, il che si traduce in un aumento del tempo in cui l'errore è diverso da zero (si ricordi infatti che $E(z) = \tilde{N}_R(z^{-1})\tilde{Q}(z^{-1})$).

¹⁸Infatti in questo caso $N_W(z) = z^\kappa - D_R(z)\tilde{Q}(z) = z^\kappa - z^{n_R+q} + (\text{termini di grado } \leq \kappa - 1) = z^\kappa - z^\kappa + (\text{termini di grado } \leq \kappa - 1)$.

- Un ulteriore vincolo è dovuto all'inseguimento asintotico, per il quale si vuole

$$(9.59) \lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \left. \frac{z^k - D_R \tilde{Q}(z)}{z^k} \right|_{z=1} = 1 \iff N_W(1) = 1.$$

- Infine, i parametri liberi di $Q(z)$ possono essere inoltre utilizzati per:
 - (1) includere gli zeri instabili di P nel denominatore di W ;
 - (2) Far sì che i poli instabili di P siano radici di $D_W - N_W$. Si noti che $D_W - N_W$ in questo caso è esattamente pari a $D_R \tilde{Q}$. Quindi, per garantire che poli instabili di P non rovinino la stabilità interna è sufficiente inserire i corrispondenti termini monomi in Q .

9.13 OSSERVAZIONE. Riguardo l'ultimo punto, bisogna fare attenzione che per i valori di z per cui $D_R(z) = 0$, l'effetto di Q è chiaramente annullato. Ciò implica che non possiamo aggiungere zeri in W o radici in $D_W - N_W$ nelle stesse posizioni dei poli del riferimento per cui vogliamo fare inseguimento DB.

Vediamo nel seguito alcuni esempi in un caso semplice.

Esempi di Controllo Deadbeat nella risposta a gradino

Per questo particolare caso $R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$. Il grado relativo di $R(z)$ come funzione razionale fratta in z^{-1} è $n_R = 1$. Poiché $\tilde{N}_R(z^{-1}) = 1$ si ha

$$(9.60) E(z) = \tilde{N}_R(z^{-1})Q(z^{-1}) = Q(z^{-1}),$$

e dunque basta osservare il grado di Q , q , per capire dopo quanti passi la risposta del sistema avrà errore nullo. Come accennato in precedenza, ci conviene prendere Q del grado minimo possibile, in questo caso otteniamo il DB a tempo minimo.

- *Caso $q = 0$.* Abbiamo

$$(9.61)$$

$$Q(z^{-1}) = a = \text{cost.}$$

$$(9.62)$$

$$\Rightarrow N_W(z) = z - (z-1)a = (1-a)z + a$$

$$(9.63)$$

$$\Rightarrow W(z) = \frac{(1-a)z + a}{z}.$$

I vincoli da controllare sono

- $W(1) = 1 \iff N_W(1) = 1$, condizione sempre verificata;
- $C(z)$ sia propria. Se ipotizziamo, come al solito, $\text{grado}(P(z)) = 1$, allora $W(z)$ deve avere (almeno) grado 1. Questo implica che, per la (9.63) $\text{grado}(N_W(z)) = 0$ e quindi bisogna scegliere $a = 1$.

In conclusione

$$(9.64) \quad \boxed{W(z) = z^{-1}},$$

i.e. $W(z)$ è un puro ritardo di un passo. Inoltre il controllore assume la forma

$$(9.65) \quad C(z) = \frac{W(z)}{1 - W(z)} \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z - 1} \frac{D_P(z)}{N_P(z)}.$$

Tuttavia la $W(z)$ trovata va bene per processi $P(z)$ a fase minima, altrimenti si perde la stabilità interna, e con grado relativo $r_P = 1$.

- *Caso* $q = 1$. In questo caso si ha

$$(9.66)$$

$$Q(z^{-1}) = a + bz^{-1}$$

$$(9.67)$$

$$\Rightarrow N_W(z) = z^2 - (z - 1)(az + b)$$

$$(9.68)$$

$$\Rightarrow W(z) = \frac{z^2 - (z - 1)(az + b)}{z^2}.$$

Controlliamo i vincoli

- $W(1) = 1$, sempre verificata.
- $C(z)$ propria. Il grado relativo di $W(z)$ deve essere almeno 1, allora $Q(z)$ deve essere monico, allora $a = 1$.

Ora b può essere scelto:

1. per avere grado relativo di $W(z)$ pari a 2. Da $N_W(z) = z^2 - (z - 1)(z + b) = z(1 - b) + b$ bisogna scegliere $b = 1$.
2. per introdurre uno zero instabile in W (per la stabilità interna). Tale zero si ha in corrispondenza di $z_b = \frac{b}{b-1}$, per $b \neq 1$.
3. per introdurre una radice instabile in $D_W - N_W$ (per la stabilità interna). Tale radice si ha in corrispondenza di $z_b = -b$, per $b \neq 1$.

- *Caso* $q = 2$. Ora $\tilde{Q}(z)$ è data da

$$(9.69) \quad \tilde{Q}(z) = az^2 + bz + c.$$

Come fatto nei casi precedenti, per assicurare $W(1) = 1$, poniamo $a = 1$. In questo modo

$$(9.70) \quad N_W(z) = z^3 - (z - 1)(z^2 + bz + c) = z^2(1 - b) + z(b - c) + c.$$

Vediamo allora che

- se $b = 1$ e $c = 1$, abbiamo grado relativo di $W(z)$ pari a 3;

- se $b = 1$ e $c \neq 1$, $W(z)$ ha grado relativo 2 e uno zero in $z_c = \frac{c}{c-1}$;
- se $b \neq 1$ e $c \neq 1$, $W(z)$ ha grado relativo 1 e due zeri in $z_{bc1,2} = \frac{-(b-c) \pm \sqrt{(b-c)^2 - 4(1-b)c}}{2(1-b)}$.

Alternativamente, si possono usare b, c per inserire radici instabili in $D_W - N_W$ ai fini di stabilizzare internamente l'interconnessione.

Per valori di $q > 2$ si può seguire lo stesso ragionamento.

9.14 OSSERVAZIONE. Se consideriamo segnali canonici generici di riferimento

$$(9.71) \quad R(z) = \frac{N_R(z)}{(z-1)^{l+1}},$$

si ottiene

$$(9.72) \quad W(z) = \frac{z^{l+1+q} - (z-1)^{l+1} \tilde{Q}(z)}{z^{l+1+q}}.$$

Notiamo che essendo $D_R(z)$ monico, $\tilde{Q}(z)$ deve essere a sua volta monico affinché $W(z)$ abbia grado relativo maggiore di 0. Inoltre grazie al termine $(z-1)^{l+1}$ viene garantita la condizione $W(1) = 1$. Perciò se vogliamo $\tilde{Q}(z)$ di grado 0, allora dev'essere $\tilde{Q}(z) = 1$ per avere grado relativo di $W(z)$ pari a 1.

9.9 Controllo deadbeat per P ottenuta per tenuta+campionamento

Nella sezione §9.8 abbiamo studiato come realizzare un compensatore deadbeat per un processo $P(z)$. Cosa avviene però tra gli istanti di campionamento per un processo $P(z)$, ottenuto per tenuta e campionamento di un processo $P(s)$ continuo? Analizziamo il problema considerando un esempio significativo con riferimento allo schema a blocchi di Fig.60 .

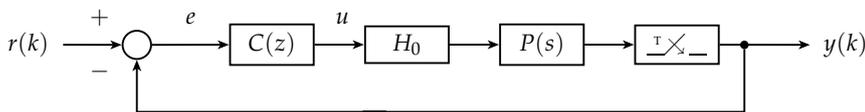


Figura 60: Controllo in retroazione per un processo ottenuto per tenuta+campionamento.

9.15 ESEMPIO. Sia $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, vogliamo realizzare un compensatore deadbeat per la risposta a gradino del corrispettivo processo ottenuto per tenuta e

campionamento. Supponiamo, per semplicità $T = 1$. Allora dalla (5.8)

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\mathcal{S} \circ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right]; T \right] \\ &= \frac{1 - 2e^{-1} + ze^{-1}}{(z - 1)(z - e^{-1})} \\ &= \frac{0.264 + 0.368z}{(z - 1)(z - 0.368)}\end{aligned}$$

Il grado relativo di $\tilde{P}(z)$ è $r_p = 1$. Inoltre $\tilde{P}(z)$ non ha zeri instabili; ha invece il polo instabile in $z = 1$. Per disinnescare la perdita di stabilità interna dovuta a questo polo devo scegliere $W(z) = N_W(z)/D_W(z)$ dove $D_W(z) - N_W(z)$ ha uno zero in $z = 1$. Per avere risposta deadbeat scegliamo $W(z) = z^{-1}$. Il controllore, dalla formula di sintesi diretta (9.1), risulta essere

$$\begin{aligned}C(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{(z - 1)(z - 0.368)}{0.264 + 0.368z} \\ &= \frac{z - 0.368}{0.264 + 0.368z}.\end{aligned}$$

L'andamento della variabile $y(t)$ in uscita dal blocco $P(s)$ è rappresentata qualitativamente in Fig.61 (grafico in alto), assieme alla risposta $y(k)$. Si osserva quindi che $y(t)$ presenta delle oscillazioni o *ripples* pur assumendo il valore corretto (uno) proprio negli istanti di campionamento. Notiamo anche che

- in generale non si può garantire la stabilità del sistema al di fuori degli istanti di campionamento;
- se si riduce il passo di campionamento, il sistema ha bisogno di segnali di attuazione più elevati;
- se sorpassiamo i limiti fisici dell'attuatore (*i.e.* i valori di saturazione) la risposta del sistema si discosta dal comportamento ideale e, in particolare, non sarà più deadbeat.

Condizioni per il controllo DB senza *ripples* sono riportate in vari libri di testo e nelle note manoscritte. Queste sono derivate dalla rappresentazione di stato, e dalla conversione da tempo continuo a tempo discreto dei modi.

◇

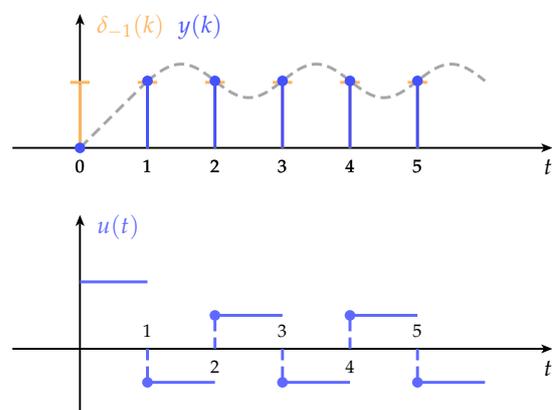


Figura 61: Andamento (qualitativo) dei segnali $y(t)$ (in grigio tratteggiato), $y(k)$ (in blu) della risposta a gradino $\delta_{-1}(k)$ (figura in alto) e andamento del segnale di attuazione $u(t)$ in ingresso al processo $P(s)$ (figura in basso).

∞ APPENDICI ∞

A TRASFORMATE \mathcal{Z} NOTEVOLI

$f(k), k \in \mathbb{Z}_+$	$\circ \text{---} \bullet$	$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$	\mathcal{R}_c
$\delta(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	1	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\delta(k-n), n \in \mathbb{Z}_+$	$\circ \text{---} \bullet$	z^{-n}	$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
$\delta_{-1}(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$k\delta_{-1}(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$k^2\delta_{-1}(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
$\binom{k}{l}, l \geq 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^{l+1}}$	$ z > 1$
$p^k\delta_{-1}(k), p \in \mathbb{C}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-p}$	$ z > p $
$\binom{k}{l}p^{k-l}, l \geq 0, p \in \mathbb{C}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{(z-p)^{l+1}}$	$ z > p $
$\cos(\vartheta k)\delta_{-1}(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z(z - \cos \vartheta)}{z^2 - 2 \cos \vartheta z + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\vartheta k)\delta_{-1}(k)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z \sin \vartheta}{z^2 - 2 \cos \vartheta z + 1}$	$ z > 1$
$p^k \cos(\vartheta k)\delta_{-1}(k), p \in \mathbb{C}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z(z - p \cos \vartheta)}{z^2 - 2p \cos \vartheta z + p^2}$	$ z > p $
$p^k \sin(\vartheta k)\delta_{-1}(k), p \in \mathbb{C}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{zp \sin \vartheta}{z^2 - 2p \cos \vartheta z + p^2}$	$ z > p $

B TRASFORMATE \mathcal{L} NOTEVOLI

$f(t), t \in \mathbb{R}_+$	$\circ \text{---} \bullet$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	\mathcal{R}_c
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1	$\forall s \in \mathbb{C}$
$\delta(t - \tau), \tau \in \mathbb{R}_+$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-\tau s}$	$\forall s \in \mathbb{C}$
$\delta_{-1}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
$t\delta_{-1}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s) > 0$
$\frac{t^n}{n!}\delta_{-1}(t), n \in \mathbb{N}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$
$e^{\alpha t}\delta_{-1}(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\Re(s) > \alpha$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}\delta_{-1}(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$	$\Re(s) > \alpha$
$\cos(\vartheta t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \vartheta^2}$	$\Re(s) > 0$
$\sin(\vartheta t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\vartheta}{s^2 + \vartheta^2}$	$\Re(s) > 0$
$e^{\alpha t}\cos(\vartheta t)\delta_{-1}(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \vartheta^2}$	$\Re(s) > \alpha$
$e^{\alpha t}\sin(\vartheta t)\delta_{-1}(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\vartheta}{(s - \alpha)^2 + \vartheta^2}$	$\Re(s) > \alpha$

C RICHIAMI DI CONTROLLO A TEMPO CONTINUO

C.1 Criterio di Routh-Hurwitz

Il criterio di Routh consiste nel costruire una tabella di numeri (detta appunto *tabella di Routh*) in cui le prime due righe sono formate dai coefficienti del polinomio $A(s)$ nel modo seguente

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

Gli elementi di ciascuna riga successiva

$$r_i \quad r_{i-2} \quad r_{i-4} \quad \dots$$

sono formati dagli elementi delle due righe precedenti

$$\begin{array}{cccc} p_{i+2} & p_i & p_{i-2} & \dots \\ q_{i+1} & q_{i-1} & q_{i-3} & \dots \end{array}$$

mediante la formula:

$$(C.1) \quad r_j = - \frac{\det \begin{bmatrix} p_{i+2} & p_j \\ q_{i+1} & q_{j-1} \end{bmatrix}}{q_{i+1}} = p_j - \frac{p_{i+2}}{q_{i+1}} q_{j-1},$$

valida anche per $j = 0, 1$ considerando nulli tutti gli elementi che nelle righe precedente verrebbero ad avere un pedice negativo. Facendo riferimento alla tabella così costruita vale il Teorema di Routh.

C.1 TEOREMA (Routh). *Se il procedimento di costruzione della tabella di Routh può essere portato a termine, ossia se non vi è alcuna riga della tabella che inizia con un elemento nullo, allora:*

1. il numero n_n degli zeri del polinomio $A(s)$ che si trovano nel semipiano sinistro è pari al numero delle permanenze di segno tra gli elementi consecutivi della prima colonna della tabella di Routh;
2. il numero n_p degli zeri del polinomio $A(s)$ che si trovano nel semipiano destro è pari al numero di variazioni di segno fra gli elementi consecutivi della prima colonna della tabella di Routh;
3. il polinomio $A(s)$ non ha zeri sull'asse immaginario.

Per l'analisi della stabilità di sistemi a tempo continuo è allora utile il seguente

C.2 COROLLARIO. *Il polinomio $A(s)$ è hurwitziano se e solo se tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono strettamente dello stesso segno.*

Riportiamo anche il criterio di Hurwitz, sostanzialmente equivalente, anche dal punto di vista computazionale, al criterio di Routh. Per applicare tale criterio si costruisce la matrice $n \times n$, con n grado di $A(s)$, seguente

$$(C.2) \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix},$$

ove le prime righe coincidono con quelle della tabella di Routh, prese in ordine inverso e completate con elementi uguali a 0 in numero sufficiente; ciascuna coppia di righe successive viene ottenuta poi dalla coppia di righe precedenti traslandone gli elementi di una posizione verso destra e facendoli precedere da elementi nulli. Si ha quindi la seguente

C.3 PROPOSIZIONE. *Il polinomio $A(s)$ è hurwitziano se e solo se tutti i minori principali della matrice (C.2) hanno lo stesso segno di a_n .*

C.2 Luogo delle radici

Il luogo delle radici è un utile strumento che permette di determinare come variano gli zeri di un polinomio

$$(C.3) p_K(s) := D(s) + KN(s),$$

con $D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$, $N(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i)$ monici, a coefficienti reali di gradi n e m rispettivamente con $n \geq m$, al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$.

C.4 TEOREMA (proprietà del luogo positivo delle radici \mathfrak{L}_+). *Siano $p_K(s)$, $N(s)$, $D(s)$ i polinomi sopra definiti e sia $K \geq 0$. Si definisce luogo positivo delle radici relativo a $p_K(s)$ l'insieme*

$$(C.4) \mathfrak{L}_+ := \{s \in \mathbb{C} : \exists K \geq 0 \text{ t.c. } p_K(s) = 0\}.$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà

1. Il luogo delle radici \mathfrak{L}_+ è simmetrico rispetto all'asse reale.
2. \mathfrak{L}_+ è formato da n rami che hanno origine negli n zeri p_i di $D(s)$.
3. Degli n rami del luogo m tendono, per $K \rightarrow \infty$, agli m zeri z_i del polinomio $N(s)$ mentre i restanti $n - m$ tendono al punto improprio.
4. Gli $n - m$ rami che tendono al punto improprio vi tendono secondo $n - m$ asintoti distinti, ciascuno dei quali ha origine nel medesimo punto σ_c (centro stella degli asintoti), dato dalla formula

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m},$$

con angoli di uscita dati da

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-m-1.$$

5. Detto z_j uno zero di $N(s)$ di molteplicità μ , le tangenti nel punto z_j ai μ rami del luogo che tendono a z_j formano con l'asse delle ascisse i μ angoli dati dalla formula

$$\beta_j = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \arg(z_j - p_i) - \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq z_j}}^m \arg(z_j - z_i) - (2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \mu-1.$$

Detto p_j uno zero di $D(s)$ di molteplicità μ , le tangenti nel punto p_j ai μ rami del luogo che tendono a p_j formano con l'asse delle ascisse i μ angoli dati dalla formula

$$\alpha_j = \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \neq p_j}}^n \arg(p_j - p_i) - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - (2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \mu-1.$$

6. Appartengono a \mathfrak{L}_+ tutti i punti dell'asse reale che hanno alla propria destra un numero complessivamente dispari di zeri di $D(s)$ e $N(s)$ (contati con la propria molteplicità).
7. Il punto s^* è un punto multiplo di molteplicità μ del luogo se e solo se esiste un valore di $K \geq 0$ per il quale $p_K(s)$ e le sue prime $\mu-1$ derivate (rispetto a s) si annullano contemporaneamente in corrispondenza del valore $s = s^*$.

È possibile definire il luogo negativo delle radici come l'insieme:

$$(C.5) \quad \mathfrak{L}_- := \{s \in \mathbb{C} : \exists K < 0 \text{ t.c. } p_K(s) = 0\}.$$

Le proprietà di \mathfrak{L}_- sono molto simili a quelle enunciate per il luogo positivo \mathfrak{L}_+ , a differenza di quest'ultimo però è possibile che alcune delle curve del luogo negativo divergano senza che anche K diverga. Ciò accade quando il grado di $D(s)$ è uguale a quello di $N(s)$, difatti per $K = -1$, essendo i polinomi monici, il grado di $p_K(s)$ si abbassa. Per approfondire si veda ad esempio [?]. Infine si definisce il luogo completo relativo a $p_K(s)$ l'insieme

$$(C.6) \quad \mathfrak{L} := \mathfrak{L}_+ \cup \mathfrak{L}_- = \{s \in \mathbb{C} : \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p_K(s) = 0\}.$$

C.3 Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist di una F.d.T. $W(s)$ consiste in una curva parametrizzata in $\omega \in \mathbb{R}$ sul piano complesso che ha in ascissa $\Re(W(j\omega))$ e in ordinata $\Im(W(j\omega))$. Per la simmetria Hermitiana $W(j\omega) = W(-j\omega)$ è sufficiente tracciare il diagramma per $\omega \geq 0$, dato che il diagramma completo si ottiene da quest'ultimo per simmetria rispetto all'asse reale. Vale la pena notare che modulo e fase di $W(j\omega)$ sono le coordinate polari dei punti della curva tracciata

e per tale motivo il diagramma viene anche chiamato polare. Il tracciamento del diagramma di Nyquist di $W(j\omega)$ si può ricavare a partire dai diagrammi di Bode di modulo e fase di $W(j\omega)$. In particolare

1. i punti in cui il diagramma di Nyquist interseca il cerchio unitario corrispondono ai valori di ω per cui il diagramma di Bode del modulo interseca l'asse delle ascisse (0 dB);
2. i punti in cui il diagramma di Nyquist interseca il semiasse positivo delle ascisse corrispondono ai valori di ω per cui il diagramma di Bode della fase interseca l'asse delle ascisse (o le rette a questo parallele corrispondenti alle ordinate $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$);
3. i punti in cui il diagramma di Nyquist interseca il semiasse negativo delle ascisse corrispondono ai valori di ω per cui il diagramma di Bode della fase interseca le rette di ordinata $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
4. i punti in cui il diagramma di Nyquist interseca il semiasse positivo delle ordinate corrispondono ai valori di ω per cui il diagramma di Bode della fase interseca le rette di ordinata $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. i punti in cui il diagramma di Nyquist interseca il semiasse negativo delle ordinate corrispondono ai valori di ω per cui il diagramma di Bode della fase interseca le rette di ordinata $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
6. se $W(s)$ ha poli sull'asse immaginario, il modulo di $W(j\omega)$ diverge in corrispondenza di alcuni valori di ω e pertanto il diagramma di Nyquist risulta una curva aperta;
7. se $W(s)$ è una funzione razionale a coefficienti reali senza poli nell'origine, il diagramma di Nyquist parte, per $\omega = 0$, dal punto dell'asse reale di ascissa K_B , dove K_B è il guadagno di Bode;
8. se inoltre $W(s)$ è strettamente propria, il diagramma di Nyquist tende all'origine per $\omega \rightarrow \infty$;
9. se tutti i poli e gli zeri di $W(s)$ hanno parte reale strettamente negativa (sistema a fase minima), la fase tende, per $\omega \rightarrow \infty$, al valore $-(n - m)\frac{\pi}{2}$, dove n e m sono il numero di poli e zeri di $W(s)$, rispettivamente;
10. se $W(s)$ è propria ma non strettamente, il diagramma di Nyquist tende, per $\omega \rightarrow \infty$, al punto dell'asse reale di ascissa K_E , dove K_E è il guadagno di Evans;
11. l'inclinazione della tangente al diagramma di Nyquist di una funzione razionale tende ad un multiplo di $\frac{\pi}{2}$ sia per $\omega \rightarrow 0$ che per $\omega \rightarrow \infty$.