

APPUNTI DI
CONTROLLO DIGITALE

A. FERRANTE

OBIETTIVI DEL CORSO

1. Analisi di segnali e sistemi a tempo discreto sia nel dominio del tempo sia nel dominio della frequenza (trasf. zeta).
2. Analisi delle interconnessioni fra segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto (analogici e digitali).
3. Progetto di sistemi di controllo digitali e ibridi (e approfondimenti) con i controllori analogici

Essenzialmente si tratta della controparte a tempo discreto del corso di "controlli automatici" con approfondimenti e analisi delle interconnessioni ANALOGICO/DIGITALE.

CENNI STORICI

Shannon (47)
 Nyquist (campionamento)
 Repasani + Zedeh (trasformatore Zedeh).

Rapidissima evoluzione negli ultimi 50 anni.

VANTAGGI

- + In presenza di rumore limitato è possibile trasmettere (o memorizzare) una copia "perfetta" del segnale.
- + Possibilità di implementare facilmente algoritmi complessi.
- + Versatilità, riconfigurabilità (universalità) del controllore digit.
- + Interfaccia utente (con controlli di sicurezza, fine corsa etc).
- + Effetti trascurabili dell'invecchiamento
- + **M**inore costo

SVANTAGGI

- Alimentazione elettrica
- Tempi di calcolo
- Quantizzazione (non-lim.)
- Campionamento (ritardo)
- Limite alla "massima frequenza" più stringente
- Manutenzione (addestramento del personale).
- ~~Maggiore costo~~



SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Sono successioni ossia funzioni definite

in \mathbb{Z} o in $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ a valori
 \uparrow
 c'è lo zero!

in \mathbb{R} o in \mathbb{C} (o, più in generale, in \mathbb{R}^m o in \mathbb{C}^m). Noi consideriamo quasi

solo il caso di segnali definiti in \mathbb{R} .

Per esempio, nel caso in cui il dominio

è \mathbb{Z} e il codominio è \mathbb{R} , un segnale

a tempo discreto è una funzione

$$\begin{aligned} x: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto x(k) \end{aligned}$$

SEGNALI DIGITALI

Un segnale digitale è un segnale a

tempo discreto che (invece di assumere

valori in \mathbb{R}) assume valori in un insieme discreto che tipicamente è $q\mathbb{Z} := \{0, \pm q, \pm 2q, \pm 3q, \dots\}$. q si dice passo di quantizzazione del segnale. Posso sempre pensare che un segnale digitale sia modellato come la somma di un segnale a tempo discreto e valori in \mathbb{R} e di un "numero di quantizzazione".

Anche quest'ultimo è un segnale a tempo discreto e valori in \mathbb{R} ma i suoi valori sono anche limitati e anzi sono compresi in $(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$. Naturalmente, più piccolo è q , più la corrispondente approssimazione con un segnale a valori in \mathbb{R} è buona. In ogni caso, se tengo conto del numero di quantizzazione posso analizzare segnali digitali considerando al loro posto i corrispondenti segnali a valori reali. Ciò risulta conveniente perché i segnali digitali sono molto

Fin difficili da trattare.

Spazi vettoriali di segnali a tempo discreto

$$l_{\infty} := \left\{ x(\cdot) : \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ (k \in \mathbb{Z}_+)}} |x(k)| < M \right\}$$

$$l_1 := \left\{ x(\cdot) : \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ (k \in \mathbb{Z}_+)}} |x(k)| < M \right\}$$

$$l_2 := \left\{ x(\cdot) : \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ (k \in \mathbb{Z}_+)}} |x(k)|^2 < M \right\}$$

4.

Sono spazi normati:

$$x(\cdot) \in \ell_\infty \Rightarrow \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|$$

$$x(\cdot) \in \ell_1 \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|$$

$$x(\cdot) \in \ell_2 \Rightarrow \|x\|_2 = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^2 \right]^{1/2}$$

Si ha:

$$\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$$

Più in generale posso definire ℓ_p , $p \in [1, \infty)$ come

$$\ell_p := \left\{ x(\cdot) : \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ (k \in \mathbb{Z}_+)}} |x(k)|^p < M \right\} \quad e$$

$$\|x\|_p := \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^p \right]^{1/p}$$

Chiaramente

$$\ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty \quad \forall p < q$$

A tempo continuo le inclusioni analoghe non valgono.

l_p sono spazi di Banach $\forall p \in [1, \infty]$

l_2 è sp. di Hilbert. Infatti

$$\|x(\cdot)\|_2^2 = \langle x(\cdot), x(\cdot) \rangle$$

dove $\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) y(k)$

(se i segnali sono complessi $\langle x, y \rangle := \sum_k \overline{x(k)} y(k)$)

SISTEMI LINEARI

Il più generale legame lineare che esprime $y(k)$

(uscita al tempo k) in funzione di $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$

è

$$y(k) = \sum_{j \neq k} a(j, k) y(j) + \sum_j b(j, k) u(j)$$

Noi siamo interessati a modelli causali, tempo-invarianti

e con memoria finita (implementabili in pratica):

6.

$$y(k) = \sum_{j=1}^m a_j y(k-j) + \sum_{j=0}^m b_j u(k-j). \quad (*)$$

Consideriamo quindi la classe di sistemi (*).

Un approccio alternativo è quello che considera il legame I/O mediato da un'equazione del 1° ordine vettoriale relativo allo stato $x(t)$ del sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) = A x(t) + B u(t) & x(0) = x_0 \text{ (stato iniz.)} \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$. In questo caso si possono facilmente considerare ingressi e uscite vettoriali ($y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$).

Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} y(t) &= C A^t x_0 + C \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} B u(i) + D u(t) \\ &= \underbrace{C A^t x_0}_{\text{C.I.}} + D u(t) + C B u(t-1) + C A B u(t-2) + \dots + C A^{t-1} B u(0) \end{aligned}$$

ESEMPIO

Discretizzazione di eq. del 2° ordine:

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) = b_0 u(t)$$

Sia δt piccolo rispetto alla variabile
del segnale di modo che

$$\frac{d}{dt} [y(t)] \approx \frac{y(t) - y(t - \delta t)}{\delta t}$$

$$\text{Sia } \begin{cases} \tilde{y}(k) := y(k \delta t) & k \in \mathbb{Z} \\ t = k \delta t \quad (\text{istanti da considerare}), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [y(t)] \approx \frac{\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)}{\delta t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} [y(t)] &\approx \frac{1}{\delta t} \left[\frac{\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)}{\delta t} - \frac{\tilde{y}(k-1) - \tilde{y}(k-2)}{\delta t} \right] \\ &= \frac{\tilde{y}(k) - 2\tilde{y}(k-1) + \tilde{y}(k-2)}{\delta t^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow L'eq. discretizzata è:

8.

$$\frac{a_2}{\delta t^2} [\tilde{y}(k) - 2\tilde{y}(k-1) + \tilde{y}(k-2)] + \frac{a_1}{\delta t} [\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1)] = b_0 \tilde{u}(k)$$

com $\tilde{u}(k) := u(k\delta t)$

⇒

$$\tilde{a}_0 \tilde{y}(k) + \tilde{a}_1 \tilde{y}(k-1) + \tilde{a}_2 \tilde{y}(k-2) = b_0 \tilde{u}(k)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 := \frac{a_2}{\delta t^2} + \frac{a_1}{\delta t} \\ \tilde{a}_1 := -\frac{2a_2}{\delta t^2} = \frac{a_1}{\delta t} \\ \tilde{a}_2 := \frac{a_2}{\delta t^2} \end{cases}$$

de cui

$$\tilde{y}(k) = \alpha_1 \tilde{y}(k-1) + \alpha_2 \tilde{y}(k-2) + \beta_0 \tilde{u}(k)$$

$$\alpha_1 := -\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0} \quad \alpha_2 := -\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_0} \quad \beta_0 := \frac{b_0}{\tilde{a}_0}$$

TRASFORMATA ZETA

Sia $f(k)$ definita in \mathbb{Z}_+ ($k \geq 0$) N.B. se f è definita in tutto \mathbb{Z} solo i valori per $k \geq 0$ contano!

Definiamo la seguente funzione $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$F(z) := \mathcal{Z}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad (*)$$

La funzione F è definita per i valori di $z \in \mathbb{C}$ in cui $(*)$ converge.

NB $f(k)$ può essere reale o complesso.

$F(z)$ si dice trasformata Zeta di $f(k)$: esse

è una funzione complessa della variabile complessa z .

ESEMPIO

$$f(k) = \delta(k) := \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

ESEMPIO

$$f(k) = p^k \quad (\text{discretizzazione di } e^{pE}) \\ (p \in \mathbb{R} \text{ o } p \in \mathbb{C})$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{p}{z}} = \frac{z}{z-p} \quad \text{per } |z| > |p|$$

$$\text{Se } p=1 \Rightarrow f(k) = f_{-1}(k) = 1(k) := \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

In generale, dove converge la trasformata \mathcal{Z} ?

TEOREMA

Data $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ sia

$$\rho_0 := \limsup_{k \rightarrow \infty} |f(k)|^{1/k} \quad (*)$$

Allora 1) $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ converge assolutamente

$$\forall z \text{ t.c. } |z| > \rho_0$$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$ NON converge $\forall z : |z| < \rho_0$

OSSERVAZIONE

La (*) significa quanto segue

$$\text{Se } g(k) = \sup_{l > k} |f(l)|^{1/l}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k)$$

Si noti che $g(k)$ è monotone non
crescente e quindi il $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k)$
 esiste sempre e può essere finito
 o pari a $+\infty$.

N.B.

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(k)|^{1/k}$ esiste \Rightarrow

$$p_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(k)|^{1/k}$$

Infatti se il $\lim_{k \rightarrow \infty} (.)$ esiste allora è

uguale a $\limsup_{k \rightarrow \infty} (.)$.

Inoltre, se $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(k+1)}{f(k)} \right|$ esiste

allora p_0 è anche dato da tale limite.

Per caso: Costruire un esempio dove bisogna
 usare la (*) perché i limiti non
 esistono.

ESEMPI

1. Abbiamo già visto che $f(k) = p^k$ ha
 trasformata $F(z) = \frac{z}{z-p}$ che converge
 per $|z| > |p|$.

verifica. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(k+1)}{f(k)} \right| = |p|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(k)|^{1/k} = |p|$$

2. Se $f(k) = 2^{(k^2)}$

$$\Rightarrow \rho_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{((k+1)^2)}}{2^{(k^2)}} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k^2+2k+1}}{2^{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{2k+1} = +\infty$$

\Rightarrow La trasf. Z non converge per nessun Z !

DEF

ρ_0 è detto raggio di convergenza

TEOREMA

La transf. $F(z)$ è una funzione
analitica (olomorfa) in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_0\}$.

PROPRIETÀ

1. SIMMETRIA

Sia $f(k)$ successione a valori in \mathbb{C} . Sia $F(z) = \mathcal{L}[f(k)]$.

Si consideri $f^*(k)$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^*(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f^*(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [f(k) (z^+)^k]^* \\ &= [F(z^+)]^* \end{aligned}$$

In particolare, se $f(k)$ è reale

$$F(z) = [F(z^+)]^* \Rightarrow F(z^+) = [F(z)]^*$$

2. LINEARITÀ

Date $f(k)$ e $g(k)$, siano $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, $G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$.

Siano ρ_f e ρ_g i rispettivi raggi di convergenza

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z); \quad \rho < \max\{\rho_f, \rho_g\}$$

ESEMPIO

$$f(k) = \sin(\theta k) = \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}} \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{z^2 - ze^{j\theta} - z^2 + ze^{-j\theta}}{z^2 - z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + 1} \right]$$

$$= \frac{z(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{2j}$$

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1$$

$$= \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$$

In modo analogo si trova

$$\mathcal{Z}[\cos(k\theta)] = \frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$$

3. TRASLAZIONE

3.A: ANTICIPO

Data $f(k)$, sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$ e sia

$$g(k) := f(k+a) \quad a > 0 \quad (\text{ANTICIPO})$$

Allora

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+a) z^{-k-a} z^a$$

$$= z^a \left[\sum_{h=a}^{\infty} f(h) z^{-h} \right]$$

$$= z^a \left[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1} - \dots - f(a-1)z^{-(a-1)} \right]$$

$$= z^a F(z) - \underbrace{f(0)z^a - f(1)z^{a-1} - \dots - f(a-1)z}_{\text{informazione assente nella}}$$

parte causale di g e quindi
non presente in $G(z)$!

3.B: RITARDO

Dato $f(k)$, si ha $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$.

Si ha $g(k) := f(k-r)$ $r > 0$.

In questo caso le cose sono un po' diverse da prima. Infatti, chi è, per esempio, $g(0)$?

$g(0) = f(-r)$: non è presente in $F(z)$! Dunque

$G(z)$ non dipende solo da $F(z)$:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-r) z^{-k+r} z^{-r}$$

$$= z^{-r} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k-r) z^{-k+r} \right]$$

$$= z^{-r} \left[\sum_{h=0}^{\infty} f(h) z^{-h} + \underbrace{f(-r) z^r + f(-r+1) z^{r-1} + \dots + f(-1) z^1}_{\sum_{\ell=1}^r f(-\ell) z^{-r+\ell}} \right]$$

$$= z^{-r} F(z) + \underbrace{f(-r) + f(-r+1) z^{-1} + \dots + f(-1) z^{-r+1}}_{\text{in form. non presente in } F(z)!}$$

Se f è causale

$$\underline{\underline{G(z) = z^{-r} F(z)}}$$

4. TRASLAZIONE PERIODICA

Sia $f(k)$ causale ($f(k) = 0 \quad \forall k < 0$)

Sia $F(z) := \mathcal{Z}[f]$

Sia $g(k) := \sum_{j=0}^{\infty} f(k-jN)$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-jN} F(z)$$

$$= F(z) \sum_{j=0}^{\infty} z^{-jN}$$

$$= F(z) \frac{1}{1 - z^{-N}}$$

$$= \frac{z^N}{z^N - 1} F(z)$$

ESEMPIO

$$f(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari (zero incluso)} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

1° METODO:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}$$

2° METODO:

$$f(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k - 2j) \Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1} \mathcal{Z}[\delta(k)] = \frac{z^2}{z^2 - 1}$$

5. RISCALAMENTO DI \mathbb{C} :

Data $f(k)$ sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$. Sia $p \neq 0, p \in \mathbb{C}$.

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[p^k f(k)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) p^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{p}\right)^k \\ &= F(z/p) \end{aligned}$$

ESEMPIO

Consideriamo un'oscillazione smorzata

o amplificata $g(k) = p^k \cos(k\theta)$.

So che

$$\mathcal{Z}[\cos(k\theta)] = \frac{z^2 - 2z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{Z}[g(k)] &= \left(\left(\frac{z}{p}\right)^2 - \frac{z}{p} \cos \theta \right) / \left(\left(\frac{z}{p}\right)^2 - \frac{2z}{p} \cos \theta + 1 \right) \\ &= \frac{z^2 - pz \cos \theta}{z^2 - 2pz \cos \theta + p^2} \end{aligned}$$

6. INTEGRAZIONE DISCRETA

Sia dato $f(k)$ e sia $F(z) := \mathcal{Z}[f(k)]$.

Sia $g(k) := \sum_{l=0}^k f(l)$.

Allora $\mathcal{Z}[g(k)] = G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k f(l) z^{-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} f(l) z^{-k}$$

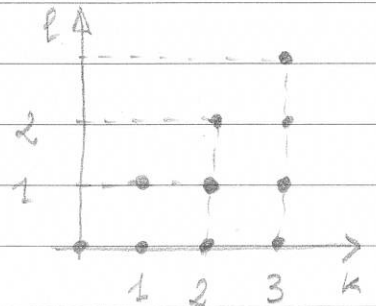
$$= \sum_{l=0}^{\infty} f(l) \sum_{k=l}^{\infty} z^{-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f(l) z^{-l} \sum_{k=l}^{\infty} z^{l-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f(l) z^{-l} \sum_{h=0}^{\infty} z^{-h}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f(l) z^{-l} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1} F(z)$$



PER CASA: Ritrovare questo risultato usando le regole della traslazione periodica.

ESEMPIO

$$g(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (\text{rampa discreta})$$

È ovvio che $g(k) = \sum_{l=0}^{k-1} f(l)$ con $f(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$ (gradino discreto).

Sia $h(k) := \sum_{l=0}^k f(l)$. $\Rightarrow g(k) = h(k-1)$ (h è casuale!)

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(z) &= \frac{z}{z-1} F(z) \Rightarrow G(z) = z^{-1} H(z) = \frac{1}{z-1} F(z) \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

7. DERIVAZIONE DISCRETA

Ricordiamo che dato $f \xrightarrow{\mathcal{Z}} F$

$$\mathcal{Z} [f(k-r)] = z^{-r} F(z) + \sum_{l=1}^r f(-l) z^{l-r}$$

Consideriamo ora l'operatore di derivata discreta

Δ che associa a $f(k)$ la

$$\Delta[f(k)] = f(k) - f(k-1)$$

Allora

$$\mathcal{Z}[\Delta[f(k)]] = F(z) - [z^{-1}F(z) + f(-1)]$$

$$= \frac{z-1}{z} F(z) - f(-1)$$

In generale, la derivata m -esima è:

$$\Delta^m[f(k)] = \sum_{r=0}^m f(k-r) \binom{m}{r} (-1)^r \quad \rightarrow = (-z^{-1})^r (1)^{m-r}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[\Delta^m[f(k)]] = \left[\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r z^{-r} \right] F(z) + \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{h=1}^r f(-h) z^{h-r}$$

$$= (1 - z^{-1})^m F(z) + \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{h=1}^r f(-h) z^{h-r}$$

= 0 se f è costante

$$= \left(\frac{z-1}{z} \right)^m F(z) + \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{h=1}^r f(-h) z^{h-r}$$

8. DERIVAZIONE in Z

Sappiamo che $F(z)$ è analitica (nel dominio di convergenza $\{z: |z| > \rho_0\}$). Calcoliamo $\frac{dF}{dz}$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} [f(k) z^{-k}]$$

(posso portare dentro la derivata perché c'è convergenza assoluta)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f(k) (-k) z^{-k-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k f(k) z^{-k}$$

$$= -z^{-1} Z[k f(k)]$$

Come conseguenza

$$Z[k f(k)] = -z \frac{dF}{dz}$$

ESEMPIO

$$f(k) = k^2$$

$$\mathcal{Z}[f(k)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[k]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[f_{-1}(k)] \right]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] \right]$$

$$= z \frac{d}{dz} \left[z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2} \right]$$

$$= z \frac{d}{dz} \left[-\frac{z}{(z-1)^2} \right]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right]$$

$$= -z \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{-z [z-1 - 2z]}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}$$

ESEMPIO

Sia $f(k) = \binom{k}{2}$ (per def. $\binom{k}{2} = 0 \quad \forall k < 2$)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2!} z^{-k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) z^{-k} = \frac{1}{2} \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(z^2 + z - z^2 + z)}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^3}$$

In generale, se $f(k) := \binom{k}{l}$ (consigli: per def. $\binom{k}{l} = 0$ se $k < l$)

$$\Rightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^{l+1}}$$

DIM. (per induzione)

1. $l=1$: $f(k) = \binom{k}{1} = k \Rightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ (già visto!) ✓

2. Supponiamo sia vero per $f(k) = \binom{k}{h} \quad \forall h < l$ e

dimostriamolo per $f(k) = \binom{k}{l}$.

25.

$$f(k) = \binom{k}{l} = \frac{k!}{l! (k-l)!}$$

$$= \frac{k}{l} \frac{(k-1)!}{(l-1)! (k-l)!}$$

$$= \frac{k}{l} \binom{k-1}{l-1}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{l} z \left[k g(k-1) \right]$$

$$g(k) = \binom{k}{l-1} \Rightarrow G(z) = \frac{z}{(z-1)^{l-1}}$$

$$= \frac{1}{l} (-z) \frac{d}{dz} z \left[g(k-1) \right]$$

$$= \frac{1}{l} (-z) \frac{d}{dz} z^{-1} G(z)$$

$$= \frac{1}{l} (-z) \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-1)^{l-1}}$$

$$= \frac{1}{l} (-z) \frac{-l(z-1)^{l-2}}{(z-1)^{2l-2}}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^{l+1}}$$

Sia ora $l > 0$ e $p \in \mathbb{C} - \{0\}$. Sia

$$f(k) := \binom{k}{l} p^{k-l} \quad (f \text{ è costante, anzi } f(k) = 0 \forall k < l)$$

$$F(z) := \sum [f(k)] = p^{-l} \sum \left[\binom{k}{l} p^k \right] = p^{-l} \sum \left[\binom{k}{l} p^k \right]$$

$$= p^{-l} \frac{z/p}{\left(\frac{z-p}{p}\right)^{l+1}} = p^{-l-1} \frac{z}{(z-p)^{l+1}}$$

$$= \frac{z}{(z-p)^{l+1}}$$

9. T.V.I.

Sia $F(z) = \sum [f(k)]$ con $p_0 \neq +\infty$. Allora

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

10. T.V.F.

Sia $F(z) = \sum [f(k)]$. Se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ esiste finito

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z-1}{z} F(z)$$

dove il $\lim_{z \rightarrow 1^+}$ è fatto lungo \mathbb{R} (si ha $p_0 \leq 1$).

ESEMPI

$$1. \quad f(k) = \cos(k\theta) \xrightarrow{z} F(z) = \frac{z^2 - 2 \cos\theta}{z^2 - 2z \cos\theta + 1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 0 \quad \text{NO!!}$$

(il limite ~~è~~!)

2.

$$f(k) = k 2^k \xrightarrow{z} F(z) = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-2} \right]$$

$$= -z \left[\frac{z-2-z}{(z-2)^2} \right] = \frac{z^2}{(z-2)^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 0 \quad \text{NO!!}$$

(il lim non è finito!)

3.

$$f(k) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(2k) \rightarrow F(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{4z^2 - 2z \cos(2)}{4z^2 - 4z \cos(2) + 1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 2 \quad \text{OK!!}$$

11. CONVOLUZIONE

Siano $f(k)$, $g(k)$ segnali di tempo \mathbb{Z} , $F(z)$ e $G(z)$ risp.

$$h(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(l)g(k-l) = \sum_{l=0}^k f(l)g(k-l)$$

$$\Rightarrow H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = F(z)G(z)$$

ANTIRASFORMATA \mathcal{Z}

Osserviamo che se consideriamo la trasformata \mathcal{Z} come mappa definita sulle funzioni convali allora questa mappa è iniettiva.

Infatti, consideriamo

$$\begin{aligned} f_1(k) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) \\ f_2(k) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) \end{aligned}$$

Allora

$$\delta_0(k) := f_1(k) - f_2(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) - F(z) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(k) z^{-k} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \delta_0(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta(z) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_0(k) z^{-k} \equiv 0 &\Rightarrow 0 \equiv z \Delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_0(k) z^{-k+1} \\ & \quad (h=k-1) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta_0(h+1) z^{-h} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta_0(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \Delta(z) = 0$$

Possiamo iterare questo ragionamento e otteniamo

$$f_0'(k) = 0 \quad \forall k > 0$$

$$\Rightarrow f_1(k) = f_2(k) \quad \forall k > 0.$$

D'altro canto, si può dimostrare che ogni funzione analitica in un intorno di ∞ (ossia nella regione al di fuori di una circonferenza di raggio ρ_0) ammette uno sviluppo in serie di Taylor attorno a ∞ .

In conclusione, la trasformata Z come mappa delle sequenze causali alle funzioni analitiche in $\{z: |z| > \rho_0\}$ (per qualche ρ_0), è biettiva e quindi invertibile. Possiamo quindi calcolare l'antitrasformata di una $F(z)$ data. Anche se non sarà esplicitamente specificato l'espressione per l'antitrasformata sarà considerata valida solo per $k > 0$ (per $k < 0$, $f(k) \equiv 0$).

Il primo metodo per calcolare l'antitrasformata è iterativo:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$\hat{F}_1(z) = F(z) - f(0)$$

$$F_1(z) = z \hat{F}_1(z)$$

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(z)$$

$$\hat{F}_{i+1}(z) = F_i - f(i) \quad i = 1, 2, \dots$$

$$F_{i+1}(z) = z \hat{F}_{i+1}(z) \quad i = 1, 2, \dots$$

$$f(i) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_{i+1}(z) \quad i = 1, 2, \dots$$

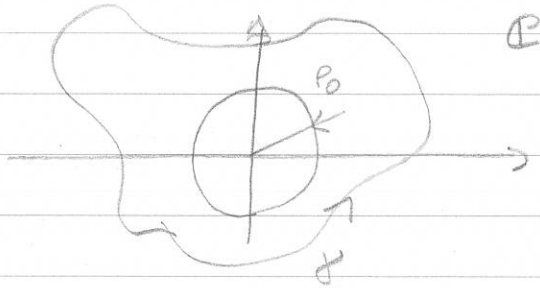
Il secondo metodo è per integrazione (residui)

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$f(k) = \left[\oint_{\gamma} F(z) z^{k-1} \right] \frac{1}{2\pi j} \quad k = 1, 2, \dots$$

dove γ è una curva chiusa orientata in senso

antiorario che circonda la circonferenza di raggio ρ_0



per es. γ può essere una circonferenza di raggio $\rho > \rho_0$.

In tal caso $z = \rho e^{j\theta}$.

Questi due metodi non sono molto agevoli. C'è però un metodo molto semplice per funzioni razionali.

Si ha

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^M a_i z^i} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad r = M - m \geq 0$$

una f. razionale propria.

Si ha

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{N(z)}{zD(z)} = \frac{N(z)}{z^{\rho_0} \prod_{i=1}^l (z-p_i)^{k_i}}$$

dove $F_1(z)$ è strettamente propria.

A. CASO SEMPLICE

$$l_0 = 1, l_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n'$$

$$\Rightarrow F_1(z) = \sum_{i=1}^{n'} \frac{A_i}{z - p_i} + \frac{A_0}{z}$$

$$\begin{cases} A_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z F_1(z) \\ A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) F_1(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n'} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

$$\Rightarrow f(k) = A_0 \delta(k) + \sum_{i=1}^{n'} A_i p_i^k$$

B. CASO COMPLICATO (GENERALE)

$$F_1(z) = \sum_{j=0}^{l_0-1} \frac{A_{0j}}{z^{j+1}} + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{l_i-1} \frac{A_{ij}}{(z - p_i)^{j+1}}$$

$$\Rightarrow F(z) = \sum_{j=0}^{l_0-1} \frac{A_{0j}}{z^{j+1}} + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{l_i-1} A_{ij} \frac{z}{(z - p_i)^{j+1}}$$

$$\Rightarrow f(k) = \sum_{j=0}^{l_0-1} A_{0j} \delta(k-j) + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=0}^{l_i-1} \binom{k}{j} p_i^{k-j} A_{ij}$$

Come si calcolano gli A_{ij} ?

$$A_{i, l_i-1} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{l_i} F_1(z)$$

$$A_{i, l_i-2} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i)^{l_i-1} \left[F_1(z) - \frac{A_{i, l_i-1}}{(z-p_i)^{l_i}} \right]$$

⋮

$$A_{i, 0} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i) \left[F_1 - \frac{A_{i, l_i-1}}{(z-p_i)^{l_i}} - \dots - \frac{A_{i, l_i}}{(z-p_i)^2} \right]$$

Similmente

$$A_{0, l_0-1} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{l_0-1} F_1(z)$$

$$A_{0, l_0-2} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{l_0-2} \left[F_1(z) - A_{0, l_0-1} z^{l_0-1} \right]$$

OSSERVAZIONI

- Si nota che se $F(z)$ è una funzione razionale a coefficienti reali allora $f(x)$ deve essere una successione reale. Infatti, se $p_i \notin \mathbb{R}$, è presente anche \bar{p}_i con la stessa molteplicità

e i relativi coefficienti sono tra di loro complessi coniugati. Dunque i relativi termini si accoppiano

Come

$$S = A \binom{k}{l} p^{k-l} + \bar{A} \binom{k}{l} \bar{p}^{k-l}$$

Se $A = \alpha + j\beta$ e $p = \rho e^{j\theta}$, allora

$$S = \binom{k}{l} \rho^{k-l} \left[(\alpha + j\beta) \left[\cos((k-l)\theta) + j \sin((k-l)\theta) \right] \right.$$

$$\left. + (\alpha - j\beta) \left[\cos((k-l)\theta) - j \sin((k-l)\theta) \right] \right]$$

$$= \binom{k}{l} \rho^{k-l} \left[2\alpha \cos((k-l)\theta) - 2\beta \sin((k-l)\theta) \right].$$

2. Se

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{con } r = \deg D(z) - \deg N(z) > 0$$

allora $f(0), f(1), \dots, f(r-1)$ sono nulli e $f(r) \neq 0$,

come si vede dal calcolo iterativo $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$,

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left[F(z) - f(0) \right], \text{ etc.}$$

ESEMPIO

$$F(z) = \frac{1}{z-2}$$

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{z \rightarrow 0} z F_1(z) = -1/2 \\ B = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) F_1(z) = 1/2 \end{cases}$$

$$F(z) = A + B \frac{z}{z-2}$$

$$f(k) = A \delta(k) + B 2^k = -\frac{1}{2} \delta(k) + 2^{k-1}$$

Altro metodo

$$\begin{aligned} \text{Sia } F_0(z) &:= zF(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow f_0(k) = 2^k \quad \text{CAUSALE} \\ g(z) &:= f_0(k-1) \Rightarrow G(z) = z^{-1} F_0(z) = F(z) \Rightarrow f(k) = g(k) = f_0(k-1) = 2^{k-1} \end{aligned}$$

 ~~$f(k) = 2^k$~~

DOVE' L'ERRORE?

calcolo corretto:

$$f_0(k) = \begin{cases} 2^k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow f(k) = \begin{cases} 2^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & \text{per } k < 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$F(z) = \frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26}{z(z-1)(z+2)^2(z^2 - 2z + 2)}$$

$$\frac{(z-p)(z-\bar{p})}{z(z-1)(z+2)^2} \quad p = 1+j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$$

Per semplificare i calcoli considero

$$F_1(z) = z F(z) \quad \text{e calcolo } z^{-1}[F_1]$$

$$F_0(z) = \frac{F_1(z)}{z} = F(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+2} + \frac{A_{22}}{(z+2)^2} + \frac{A_3}{z-p} + \frac{\bar{A}_3}{z-\bar{p}}$$

$$A_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z F(z) = \frac{26}{(-1)(4)(2)} = -\frac{13}{4}$$

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \frac{3+8+7-26+26}{1 \cdot 9 \cdot 1} = 2$$

$$A_3 = \lim_{z \rightarrow p} (z-p) F(z) = \frac{3p^4 + 8p^3 + 7p^2 - 26p + 26}{p(p-1)(p+2)^2(p-\bar{p})}$$

$$= \frac{3 \cdot 4(-1) + 16\sqrt{2} e^{j\frac{3}{4}\pi} + 14e^{j\pi/2} - 26 - 26j + 26}{(1+j)(j)(9-1+6j)(2j)}$$

$$(1+j)(j)(9-1+6j)(2j)$$

$$= \frac{[-12 + 16\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + j \sin(\frac{3}{4}\pi)) + 14j - 26j]}{[-2(1+j)(8+6j)]}$$

$$= \frac{[-12 + 16\sqrt{2}[-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}] - 12j]}{[-4-28j]} = \frac{-28+4j}{-4-28j} = -j$$

$$A_{22} = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)^2 F(z)$$

$$= \frac{[3(-2)^4 + 8(-2)^3 + 7(-2)^2 - 26(-2) + 26]}{[(-2)(-3)(4+4+2)]}$$

$$= \frac{48 - 64 + 28 + 52 + 26}{60} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$$

$$A_{21} = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \left[F(z) - \frac{3/2}{(z+2)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \left[\frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26 - \frac{3}{2}(z^2-2)(z^2-2z+2)}{z(z-1)(z+2)^2(z^2-2z+2)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2} \left[\frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 26z + 26 - \frac{3}{2}z^4 + 3z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z^3 - 3z^2 + 3z}{z(z-1)(z+2)(z^2-2z+2)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\frac{3}{2}z^4 + \frac{25}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26}{z(z-1)(z+2)(z^2-2z+2)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\frac{3}{2}z^3 + \frac{19}{2}z^2 - 18z + 13}{z(z-1)(z^2-2z+2)}$$

$\begin{array}{r} \frac{3}{2}z^4 + \frac{25}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26 \\ - \frac{3}{2}z^4 - 3z^3 \\ \hline \frac{19}{2}z^3 + z^2 - 23z + 26 \\ - \frac{19}{2}z^3 - 19z^2 \\ \hline -18z^2 - 23z + 26 \\ + 18z^2 + 36z \\ \hline 13z + 26 \\ - 13z - 26 \\ \hline \hline \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} z+2 \\ \hline \frac{3}{2}z^3 + \frac{19}{2}z^2 - 18z + 13 \end{array}$	$= \frac{-12 + 38 + 36 + 13}{6 \cdot 10}$ $= \frac{75}{60} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$
---	--	---

$$F_1(z) = A_0 + A_1 \frac{z}{z-1} + A_{21} \frac{z}{z+2} + A_{22} \frac{z}{(z+2)^2} + A_3 \frac{z}{z-p} + \bar{A}_3 \frac{z}{z-\bar{p}}$$

$$\Rightarrow f_1(k) = \begin{cases} A_0 \delta(k) + A_1 \delta_{-1}(k) + A_{21} (-2)^k + A_{22} k (-2)^{k-1} + A_3 p^k + \bar{A}_3 \bar{p}^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_3 p^k + \bar{A}_3 \bar{p}^k &= j p^k (\cos(\theta k) + j \sin(\theta k)) - j p^k (\cos(\theta k) - j \sin(\theta k)) \\ &= p^k (-2) \sin(k\theta) = -2(\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) \end{aligned}$$

$$f_1(k) = \frac{-13}{4} \delta(k) + 2 \delta_{-1}(k) + \frac{5}{4} (-2)^k + \frac{3}{2} (-2)^{k-1} k - 2(\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right), \quad k \geq 0$$

$$\Rightarrow f(k) = \begin{cases} \frac{-13}{4} \delta(k-1) + 2 \delta_{-1}(k-1) + \frac{5}{4} (-2)^{k-1} + \frac{3}{2} (-2)^{k-2} (k-1) - 2(\sqrt{2})^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{4} (k-1)\right), & k \geq 1 \\ 0, & k < 1 \end{cases}$$