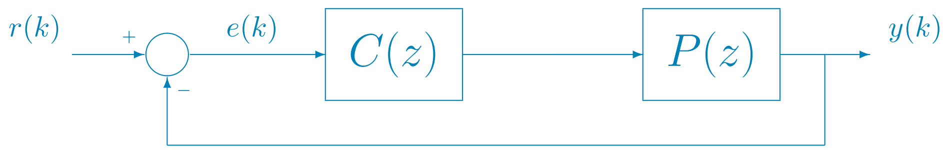
Inseguimento di segnali di riferimento a trasformata razionale con errore che si annulla in un numero finito di passi

Consideriamo il consueto schema di controllo



e siano $C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)}$, $P(z) = \frac{N_P(z)}{D_P(z)}$ e $H(z) := C(z)P(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$ rappresentazioni coprime delle relative funzioni di trasferimento. Sia inoltre $\mathbf{r}(k)$ un segnale con trasformata Zeta razionale $R(z) = \frac{N_R(z)}{D_R(z)}$ (con $N_R(z)$ e $D_R(z)$ coprimi) che si desidera inseguire.

Abbiamo visto che utilizzando il principio del modello interno e' possibile progettare C in modo che si abbia inseguimento asintotico del segnale $\mathbf{r}$ ossia in modo che l'errore a regime si annulli.

A tempo discreto (e quanto diremo e' una caratteristica che non ha un analogo a tempo continuo) e' possibile progettare C in modo che l'errore si annulli in tempo finito, ossia in un numero finito di passi. Infatti, consideriamo la funzione di trasferimento a catena chiusa $W = \frac{N_W}{D_W} = \frac{N_H}{D_H+N_H}$. La trasformata Zeta dell'errore e' allora:

$$E = (1-W)R = \frac{D_W - N_W}{D_W}\frac{N_R}{D_R} = \frac{D_H}{D_H + N_H}\frac{N_R}{D_R}$$

Dunque risulta evidente che l'errore si annulla dopo un numero finito di passi se e solo se:

(1) $D_W = D_H + N_H$ e' una potenza di z (ossia $D_W = z^q$) e

(2) tutti gli zeri di D_R sono anche zeri di $D_H = D_W - N_W$, con l'eccezione dell'eventuale zero in 0.

Domanda 1. Come posso progettare C che raggiunga questo scopo?

Domanda 2. Come posso progettare C che **minimizzi** il numero di passi necessari ad annullare l'errore?

Ci sono essenzialmente tre modi di progettare C; il terzo premette di anche di rispondere alla Domanda 2.

A. *Posso porre*

$$C(z) = C_1(z)C_2(z); \qquad C_1(z) = \frac{1}{D_R}$$

e progettare $C_2(z)$ *con il metodo dell'equazione diofantea con riferimento al sistema di f. di t.* $P_1(z) := C_1(z)P(z)$ *e ad una*

$$D_W = z^q = z^{2n-1}$$

dove $n = n_r + n_p$ *con* $n_r := \deg[D_R]$ *e* $n_p := \deg[D_P]$. *In questo caso,* $q = 2n - 1$ *puo' essere piuttosto elevato e il grado relativo di* C *e':*

$$\text{reldeg}[C] = \text{reldeg}[C_1] + \text{reldeg}[C_2] \geq n_r;$$

se n_r *e' elevato, il ritardo introdotto da* C *potrebbe essere troppo elevato. Per rimediare a questi possibili inconvenienti si puo' "distribuire" la complessita' del controllore sfruttando anche il numeratore come descritto nel prossimo metodo.*

B. *Posti* $n_r := \deg[D_R]$ *e* $n_p := \deg[D_P]$, *uso il controllore*

$$C(z) = \frac{Y}{XD_R} \qquad \deg[X] = n_p - 1, \quad \deg[Y] = n_r + n_p - 1$$

in tal modo ho $2n_p + n_r$ incognite che posso calcolare scegliendo $D_W = z^q = z^{2n_p+n_r-1}$ e risolvendo l'equazione diofantea

$$N_P Y + D_P D_R X = D_W$$

la quale puo' essere riscritta come un sistema di $2n_p + n_r$ equazioni lineari in $2n_p + n_r$ incognite. Salvo casi patologici, questo sistema avra' una soluzione in corrispondenza alla quale $C = \frac{Y}{XD_R}$ e' proprio. In questo caso, il numero $q = n_r + n_p - 1$ di passi necessari ad annullare l'errore e' minore di prima e il grado relativo di C e' zero. Ancora pero' non ho garantito che q sia minimo. Per ottenere questo si puo' utilizzare il prossimo metodo.

C. Un approccio alternativo consiste nel progettare direttamente

$$W = \frac{N_W}{z^q}$$

e imporre:

1. Grado relativo di W adeguato (almeno pari a quello di P) e $W(\infty) \neq 1$.

2. N_W contenga tutti gli zeri "instabili" di P.

3. $\Delta := D_W - N_W = z^q - N_W = D_H$ *contenga* **sia** *tutti i poli "instabili" di* P *(per la stabilita' interna)* **sia** *tutti gli zeri non nulli di* D_R *(per garantire inseguimento).*

Le condizioni 2. e 3. si possono scrivere in modo aggregato. A questo scopo, detti N_i *il polinomio monico i cui zeri sono tutti e soli gli zeri "instabili" di* N_P *e* D_i *il polinomio monico i cui zeri sono tutti e soli gli zeri "instabili" di* D_P *eccetto quelli gia' presenti nel polinomio* D_R*, basta imporre:*

$$\underbrace{z^q - \underbrace{N_i N_1}_{N_W}}_{\Delta = D_H} = D_R D_i \Delta_1 \qquad (1)$$

dove N_1 *e* Δ_1 *sono polinomi arbitrari.*

La condizione 1. permette di determinare q *in termini di* $\deg[N_W] = \deg[N_i N_1]$*. Quindi si puo' ottenere il valore minimo di* q *scegliendo* N_1 *di grado minimo che permetta di soddisfare la (1). In pratica, si applica il seguente procedimento iterativo. Si inizia con* $N_1 = a$ *costante; cio' fissa* $N_W = N_i a$ *e quindi* q*; si verifica se esiste un valore di*

a tale che che $z^q - N_i a$ contenga tutti gli zeri di $D_R D_i$, ossia tale che $D_R D_i$ divida $z^q - N_i a$. In questo caso si fissa a a tale valore e si e' risolto il problema con q minimo. Se invece non esiste alcun valore di a tale che $D_R D_i$ divida $z^q - N_i a$ si pone $N_1 = az + b$; cio' fissa $N_W = N_i(az + b)$ e quindi q; si verifica se esistono valori di a e b tali che che $D_R D_i$ divida $z^q - N_i a$ e si itera il ragionamento fino a quando si ottiene una soluzione che ha q minimo per costruzione. Si noti che ad ogni passo, fissato $N_1 = az^p + bz^{p-1} + cz^{p-2} + \ldots + lz + m$, il problema di verificare se esistano valori dei coefficienti $a, b, c, \ldots, l, m$ tali che che $D_R D_i$ divida $z^q - N_i N_1$ e' lineare nei coefficienti stessi e quindi molto facile da risolvere.

Una volta determinati q e N_W e' immediato ottenere il corrispondente C:

$$C = \frac{1}{P}\frac{W}{1-W} = \frac{D_P}{N_P}\frac{N_W}{z^q - N_W}$$