CAMPIONAMENTO

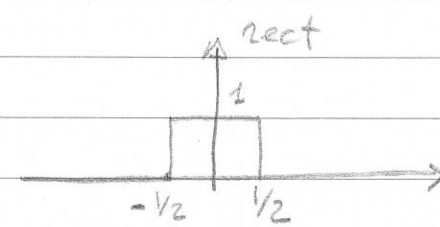
Un passo fondamentale nel digital signal processing (e, in particolare, nel controllo digitale) è il campionamento. Attraverso il campionamento si trasferisce l'informazione (presente in segnali a tempo continuo) in segnali a tempo discreto. Naturalmente, in generale, parte dell'informazione viene persa col campionamento. Tuttavia, se il segnale ha banda limitata e il campionamento è sufficientemente fitto allora il segnale campionato contiene tutta l'informazione del segnale originale. Precisamente, se la frequenza di campionamento è almeno doppia rispetto alla banda del segnale, tutta l'informazione viene trasferita nel segnale campionato!

In pratica, nessun segnale ha banda limitata, tuttavia è frequente che la parte di segnale in alta frequenza la cui informazione si perde con il campionamento, sia trascurabile. Per esempio, nei CD il campionamento è a 44100 Hz che conserva quasi tutta l'informazione percepibile dall'orecchio umano.

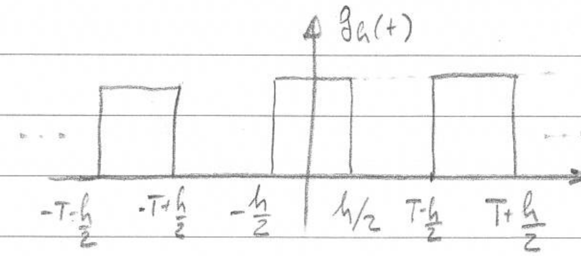
- Campionamento e modulazione PAM

Consideriamo un segnale a tempo continuo $f(t)$ e moduliamolo con un treno di impulsi rettangolari di area unitaria. Cioè siamo

$$rect(t) := \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

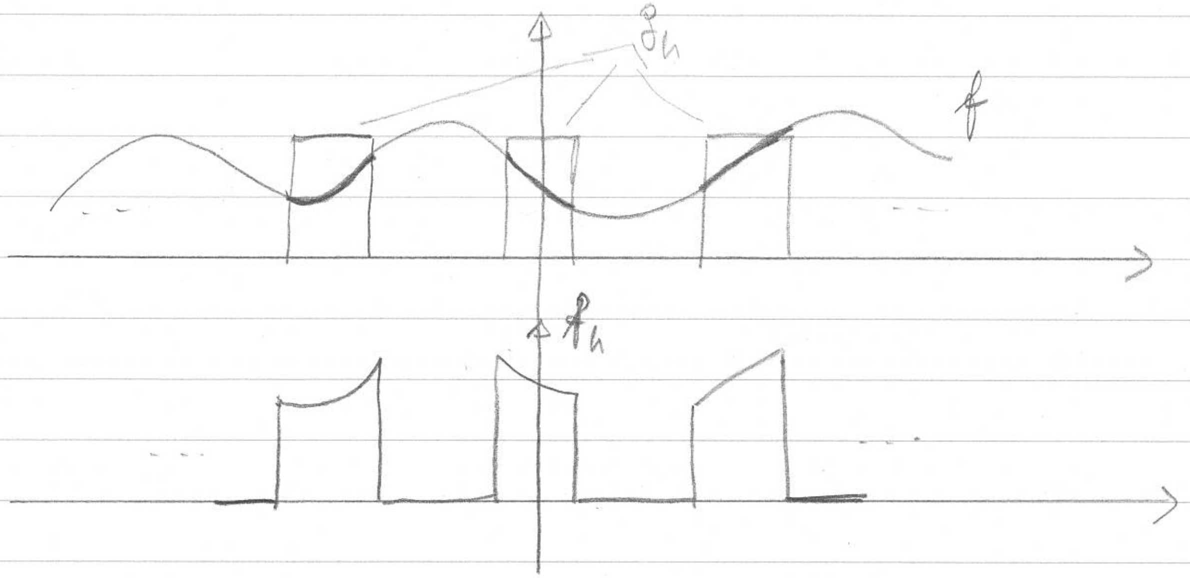


$$\underbrace{g_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} rect\left(\frac{t-kT}{h} \right)}_{\text{segnale a pettine}}$$



Data $f(t)$ la $f_h(t)$ modulata è

$$f_h(t) = f(t) \cdot g_h(t)$$



Se $h \to 0$ allora $g_h \to \underbrace{g_\delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)}_{\text{DIRAC COMB}}$

quindi

$$f_h(t) \to f_\delta(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,\delta(t-kT), \quad \text{con } \tilde{f}(k) := f(kT)$$

È chiaro che $f_\delta(t)$ e $\tilde{f}(k)$ contengono la stessa informazione. Infatti, $f_\delta(t)$ è espresso in funzione di $\tilde{f}(k)$ e, viceversa, $\tilde{f}(k) = \int_{kT-\varepsilon}^{kT+\varepsilon} f_\delta(t)\,dt$.

Che relazione c'è fra $\mathcal{L}[f_\delta(t)]$ e $\mathcal{Z}[\tilde{f}(k)]$

$$\mathcal{L}[f_\delta(t)] = \int_0^{+\infty}\left[e^{-st}\sum_{\substack{k=-\infty \\ \to k=0}}^{+\infty}\tilde{f}(k)\,\delta(t-kT)\right]dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{f}(k)\underbrace{\int_0^{+\infty}e^{-st}\,\delta(t-kT)\,dt}_{=e^{-skT}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{f}(k)\left(e^{+sT}\right)^{-k} = \mathcal{Z}\left[\tilde{f}(k)\right](z)\Big|_{z=e^{+sT}}$$

$$= \tilde{F}(z)\Big|_{z=e^{+sT}}$$

Abbiamo quindi lo schema seguente

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathcal{L}", "\mathcal{L}^{-1}"'] \arrow[d, "\times g_\delta"'] & & F(s) \arrow[d, phantom, "?"] \\
f_\delta(t) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"'] & & F_\delta(s) \arrow[d, leftrightarrow, "z=e^{+sT}"] \\
\tilde{f}(k) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \tilde{F}(z)
\end{tikzcd}$$

Per capire il legame fra $f(t)$ e $f_\delta(t)$, la cosa migliore è studiare il legame nel dominio delle frequenze.

$$F_\delta(s) = \int_0^{+\infty} f_\delta(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\, \delta_\delta(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$g_\delta(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT).$$

Posso espandere $g_\delta(t)$ in serie di Fourier:

$$g_\delta(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t \ell}\, a_\ell \qquad f = \frac{1}{T}$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t \ell}\, a_\ell \qquad \Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

I coefficienti di Fourier a_ℓ sono dati da

$$a_\ell = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g_\delta(t)\, e^{-j\Omega t \ell}\, dt = \frac{1}{T} \qquad \forall \ell$$

$$\Rightarrow \qquad g_\delta(t) = \frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t \ell}$$

$$\Rightarrow \qquad f_\delta(t) = \frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{j\Omega t \ell}$$

$$\Rightarrow \quad F_\delta(s) = \frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\,\underbrace{e^{j\Omega t \ell}\,e^{-st}}_{e^{-(s-j\Omega\ell)t}}\,dt$$

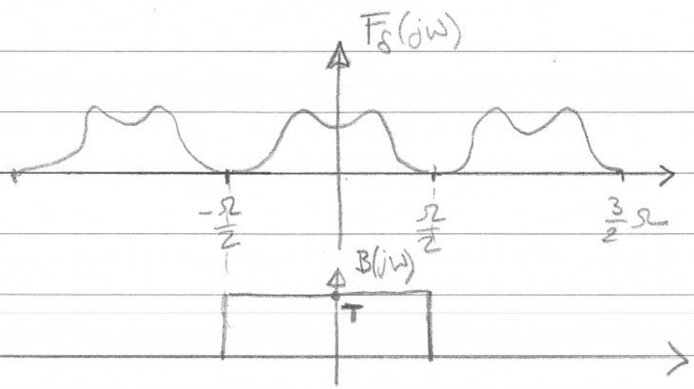
$$= \frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} F(s-j\Omega\ell)$$

In particolare, vediamo che, nell'asse immaginario

$$F_\delta(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - j\Omega\ell)$$

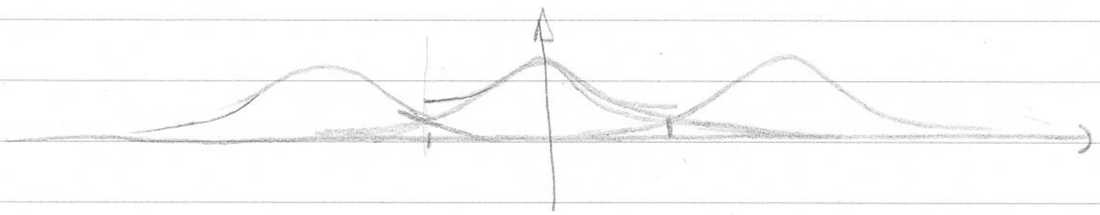
Dunque, $F_\delta(j\omega)$ è la ripetizione periodica di periodo Ω di $F(j\omega)$ (a meno di $\frac{1}{T}$).

$\Rightarrow$ Posso recuperare $F(j\omega)$ (e quindi $F(s)$) con un passabasso ideale se $F(j\omega)$ ha banda minore di $\frac{\Omega}{2} = \frac{2\pi}{T2} = \frac{\pi}{T}$.



$$B(j\omega) := \begin{cases} T & |\omega| \le \frac{\Omega}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\Omega}{2} \end{cases}$$

Se invece la banda è maggiore di $\frac{\Omega}{2}$ $\Rightarrow$ c'è <u>aliasing</u>:



<u>Filtri anti-aliasing</u>

Per evitare (o almeno attenuare) l'aliasing che è sempre presente visto che i segnali non hanno mai banda perfettamente limitata, di solito si fa precedere il campionamento da un filtro passabasso (anti-aliasing) che elimina le alte frequenze:

$$f(t) \longrightarrow \underset{A.A.}{\boxed{A(j\omega)}} \xrightarrow{f_1(t)} \boxed{\downarrow_T} \longrightarrow \tilde{f}_1(k)$$

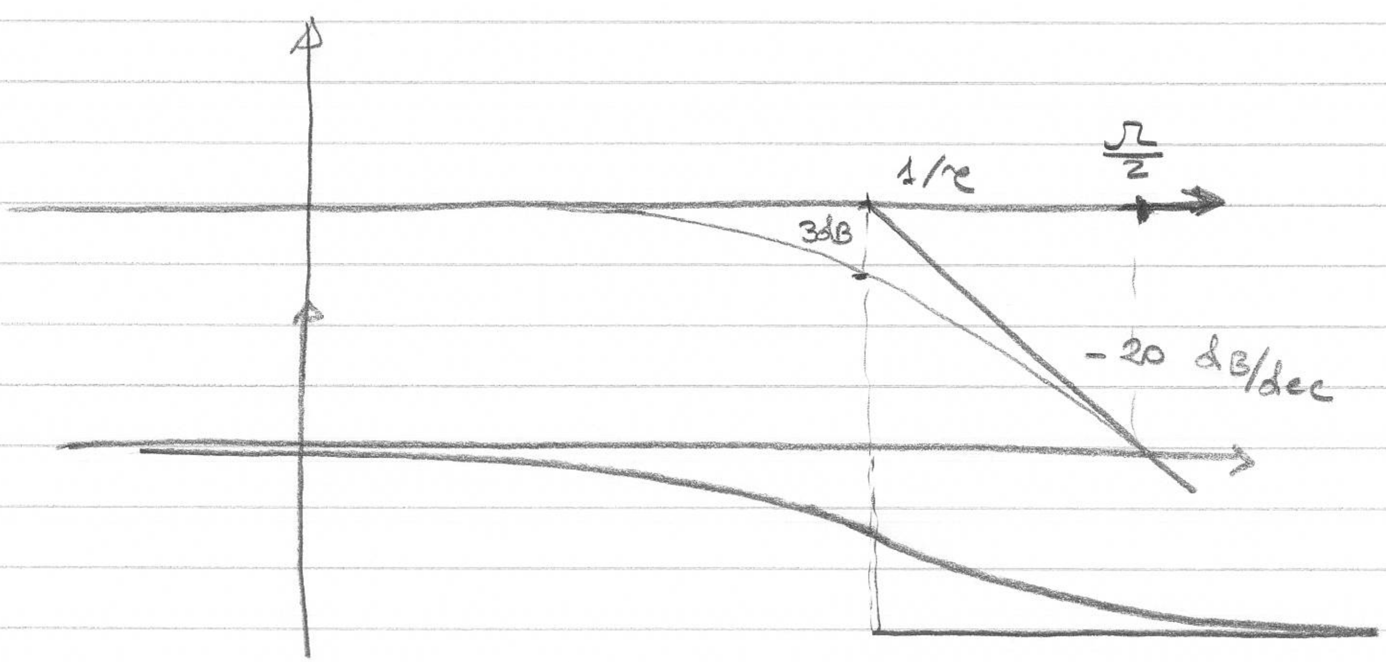
Idealmente si vorrebbero eliminare completamente le frequenze al di sopra di $\left[\frac{\Omega}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{T}\right]$ e lasciare inalterate le frequenze fino a $\left[\frac{\Omega}{2}\right]$:

$$A(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \Omega/2 \\ 0 & |\omega| > \Omega/2 \end{cases}$$

Tuttavia, filtri di questo tipo non sono realizzabili: non sono nemmeno causali infatti, la loro risposta impulsiva è $\frac{\alpha \sin(\omega t)}{t}$ che non è causale. Quindi si ricorre ad approssimazioni che non solo non eliminano completamente le frequenze al di sopra di $\frac{\Omega}{2}$ ma introducono distorsioni e deteriorano la dinamica con ritardi di fase. In pratica si usano filtri del 1° o del 2° ordine.

Un filtro del 1° ordine ha la forma

$$A(s) = \frac{1}{1+s\tau} \qquad \tau>0$$



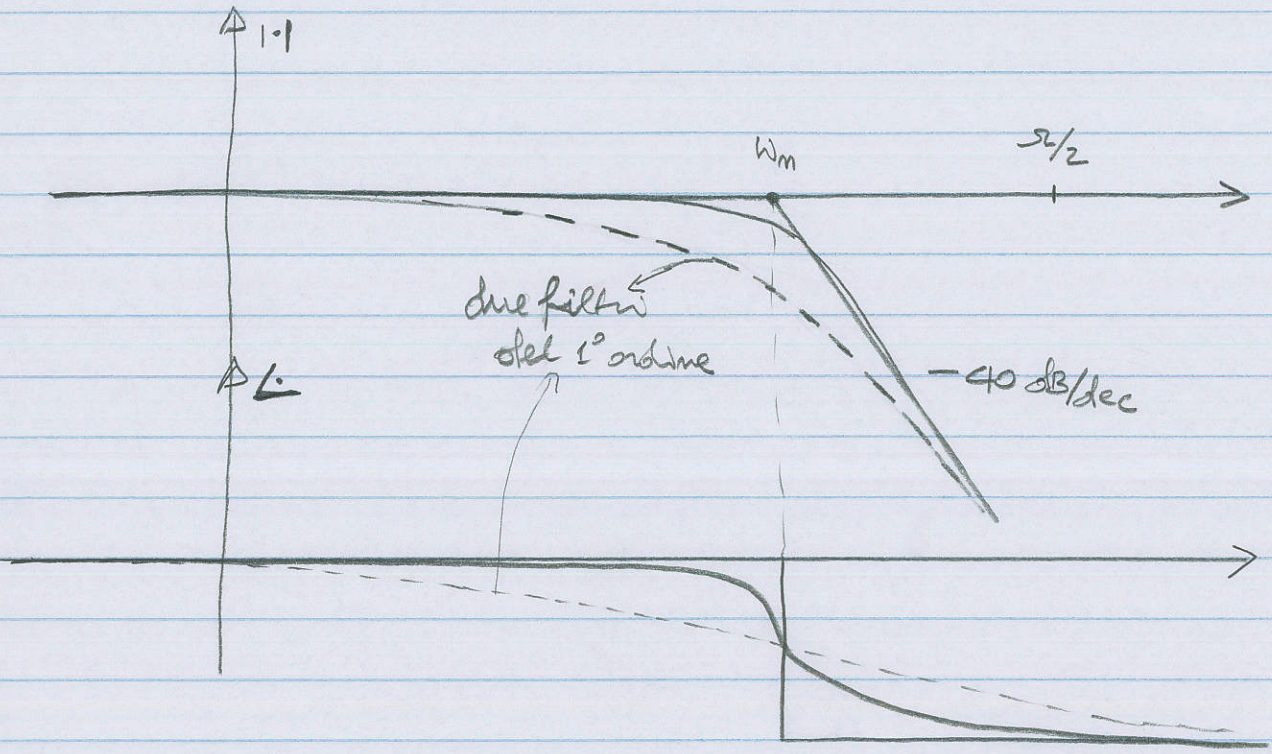
La pulsazione di taglio $\frac{1}{\tau}$ viene scelta in modo che $\frac{1}{\tau} \ll \frac{\Omega}{2}$ in modo da eliminare quasi del tutto le frequenze $> \frac{\Omega}{2}$.

Questo filtro ha una pendenza asintotica modesta (20 dB/dec) e una transizione molto dolce verso questa pendenza (guai a $\frac{1}{2}$ taglio di 3 dB). Inoltre, introduce un notevole ritardo di fase

Più comunemente si usa un filtro del 2° ordine di Butterworth:

$$A(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_m} + \frac{s^2}{\omega_m^2}}$$

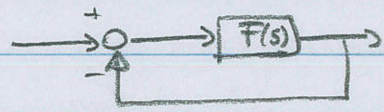
con $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (min. valore per cui il diagr. dei moduli è monotono). In questo modo il taglio è molto più brusco e anche il ritardo di fase è meno elevato a parità di attenuazione.



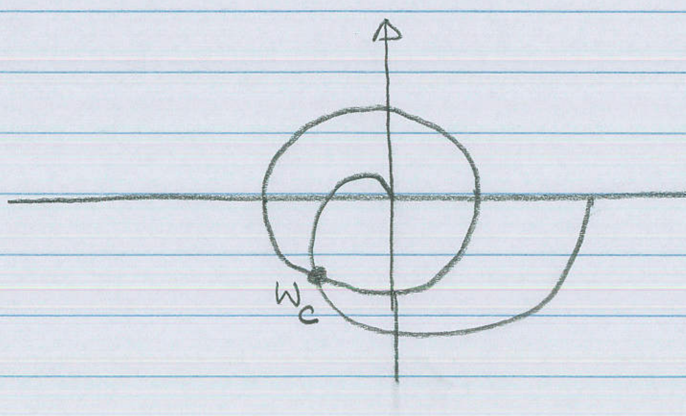
Questo filtro attenua i problemi del filtro del 1° ordine. Tuttavia, introduce anch'esso distorsioni e ritardi in banda che possono essere nocivi per la stabilità o il margine di fase (prontezza) del sistema a catena chiusa.

Esempio.

Consideriamo un sistema di controllo a catena chiusa



con margine di fase m_φ. Se il controllore è digitale e dobbiamo aggiungere un filtro anti-aliasing nella catena di controllo, ci trovia-mo ad avere un ritardo di fase che fa diminuire il margine di fase a $m_\varphi - \Delta\varphi$, dove $\Delta\varphi$ è il ritardo di fase introdotto dal filtro alla pulsazione di attraversamento ω_c



Vediamo come progettare la pulsazione di campionamento in funzione dell'attenuazione a desiderata alla pulsazione $\frac{\Omega}{2}$ e al massimo ritardo di fase φ^* tollerato alla pulsazione ω_c.

Supponiamo che

$$\omega_c \ll \omega_n \ll \frac{\Omega}{2}$$

cosa che possiamo sempre avere scegliendo opportunamente filtro anti-aliasing e periodo di campionamento T.

1. Calcolo l'attenuazione

$$a = \frac{1}{\left|A\left(j\frac{\Omega}{2}\right)\right|} = \left| 1 + \frac{2\xi j\frac{\Omega}{2}}{\omega_n} - \frac{\Omega^2}{4\omega_n^2} \right|$$

$$\simeq \frac{\Omega^2}{4\omega_n^2} \qquad \left(\text{poiché } \frac{\Omega}{2} \gg \omega_n\right)$$

2. Calcolo il ritardo introdotto dal filtro A.A.

a ω_c:

$$\text{Arg}\left[A(j\omega_c)\right] = -\text{arctg}\left[\frac{2\xi\omega_c/\omega_n}{1-\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}}\right]$$

$$\simeq -2\xi\frac{\omega_c}{\omega_n} \qquad (\text{perché } \omega_n \gg \omega_c)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta\varphi}_{\text{ritardo di fase introdotto dal filtro a } \omega_c} \simeq 2\xi\frac{\omega_c}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n \simeq 2\xi\frac{\omega_c}{\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow a \simeq \frac{\Omega^2}{\frac{16\xi^2\omega_c^2}{\Delta\varphi^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega^2}{\omega_c^2} \simeq \frac{16\xi^2 a}{\Delta\varphi^2} \Rightarrow \frac{\Omega}{\omega_c} \simeq \frac{4\xi\sqrt{a}}{\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow \text{se } \Delta\varphi < \varphi^* \Rightarrow \frac{\Omega}{\omega_c} > \frac{4\xi\sqrt{a}}{\varphi^*}$$

Dunque, fissati W_c, a e φ^* posso calcolare la minima Ω. Poi fisso $W_m = \Omega / 2\sqrt{a}$.

ESEMPIO

Voglio attenuazione di 20 dB ($a=10$)

e $\varphi^* = 0.1$. $\Rightarrow$ $$\frac{\Omega}{W_c} \geq \frac{4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{10}}{0.1} \simeq \frac{9}{0.1} = 90$$

Ancora sulla Relazione fra $F_\delta(s)$ e $\tilde{F}(z)$

Abbiamo visto che

$$F_\delta(s) = \tilde{F}(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

La relazione

$$z = e^{sT}$$

mappa $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ e lega la dinamica del segnale campionato con quella del segnale continuo corrispondente.

Per esempio:

$$\begin{cases} f(t) = e^{at} \\ F(s) = \dfrac{1}{s-a} \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \tilde{f}(k) &= (e^{aT})^k \\ \tilde{F}(z) &= \frac{z}{z - e^{aT}} \end{aligned}$$

Il polo in a di $F(s)$ è diventato un polo in e^{aT} di $\tilde{F}(z)$.

Più in generale per poli multipli:

$$\begin{cases} f(t) = t^{\ell-1} e^{a_i t} \\ F(t) = \dfrac{k}{(s-a_i)^\ell} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \tilde{f}(k) = T^{\ell-1} k^{\ell-1} (e^{a_i T})^k \\ \tilde{F}(z) = \dfrac{N(z)}{(z-e^{a_i T})^\ell} \end{array}$$

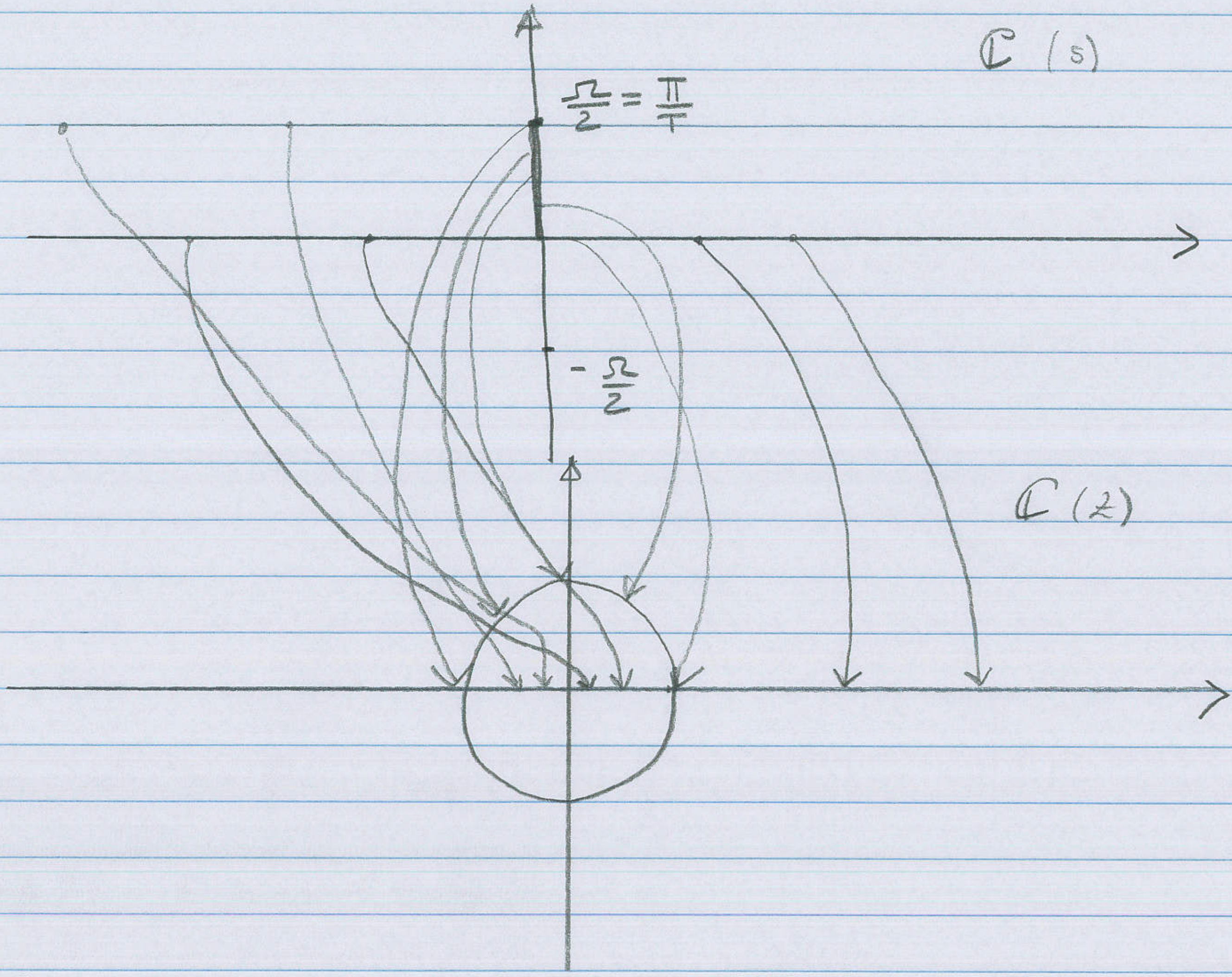
Infatti $k^{\ell-1}$ è comb. lin. di

$\binom{k}{\ell-1}, \binom{k}{\ell-2}, \dots \binom{k}{1}$.

Si noti che la mappa $s \mapsto z = e^{sT}$ __non__ è iniettiva; infatti è addirittura periodica rispetto all'asse immaginario:

$$e^{sT} = e^{\left(s + j\frac{2\pi}{T}\ell\right)T} \qquad \forall\, \ell = 0, \pm 1, \dots$$

Possiamo però restringere la mappa alla fascia principale, cioè per $-\frac{\pi}{T} < \mathrm{Im}(s) \leq \frac{\pi}{T}$, dove la mappa è iniettiva, e vedere come si comporta.



Si noti che la mappa non è suriettiva perché $\nexists$

s t.c. $e^{sT} = 0$ (sarebbe $s = -\infty$).

Inoltre,

Se $\sigma := \mathrm{Re}(s) < 0 \Rightarrow |e^{sT}| = e^{\sigma T} < 1$

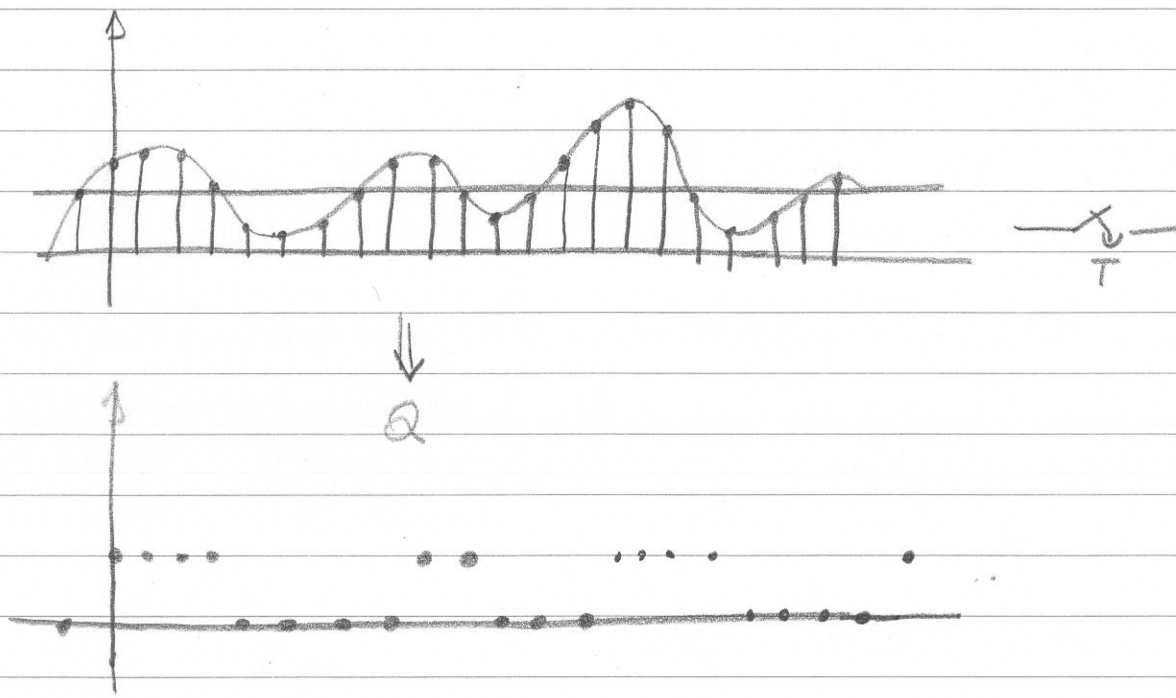
Se $\sigma := \mathrm{Re}(s) = 0 \Rightarrow |e^{sT}| = e^{0T} = 1$

Se $\sigma := \mathrm{Re}[s] > 0 \Rightarrow |e^{sT}| > 1$

Quindi la mappa preserva la regione di stabilità del cont. al discreto.

QUANTIZZAZIONE

Anche la quantizzazione introduce una distorsione. Il caso limite è il 1-bit quantizer:



Questa distorsione è molto difficile da analizzare, però se la quantizzazione è sufficientemente fine la distorsione si può trascurare. In generale la quantizzazione si modellizza con un rumore additivo $n(t)$ con $|n(t)| < \frac{q}{2}$.