ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

Come già detto, noi consideriamo la classe dei sistemi LTI in cui il legame fra ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$ è:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{n} a_l \, y(k-l) + \sum_{l=0}^{m} b_l \, u(k-l)$$

Senza perdita di generalità posso assumere $n \geq m$

Supponiamo $u(k)$ causale (il controllo viene "acceso" al tempo $k=0$) e analizziamo il comportamento in frequenza del sistema:

$$Y(z) = \sum_{l=1}^{n} a_l \left[\sum_{h=1}^{l} y(-h) \, z^{h-l} + z^{-l} Y(z) \right]$$

$$+ \sum_{l=0}^{m} b_l \left[z^{-l} U(z) + \underbrace{\sum_{h=0}^{l} u(-h) \, z^{h-l}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ per la causalità di } u(k)}} \right]$$

Raggruppando i termini, si ottiene

$$\underbrace{\left[1-\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell z^{-\ell}\right]}_{=:A(z)} Y(z) = \underbrace{\left[\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}\right]}_{=:B(z)} U(z) + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{h=1}^{\ell} a_\ell y(-h) z^{h-\ell}}_{=:C(z)}$$

$A(z)$: polinomio in z^{-1} di grado n, con $A(\infty)=1$

$B(z)$: polinomio in z^{-1} di grado $m \leq n$

$C(z)$: polinomio in z^{-1} di grado $\leq n-1$

Quindi

$$Y(z) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)}}_{=:H(z)} U(z) + \underbrace{\frac{C(z)}{A(z)}}_{=:Y_\ell(z)}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}}{1-\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell z^{-\ell}} = \frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{m-\ell}}{z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Con $D(z)$ monico e di grado m.

Inoltre,

$$Y_\ell(z) = \frac{N_\ell(z)}{D(z)}$$ (f. razionale propria, con $D(z)$ monico di grado m e $N_\ell(z)$ di grado $\leq m$ e $N_\ell(0)=0$).

In conclusione,

$$y(k) = (h * u)(k) + y_\ell(k)$$

dove $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\right]$ e $y_\ell(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y_\ell(z)\right]$

Poiché $H(z)$ e $Y_\ell(z)$ hanno lo stesso denominatore, $h(k)$ e $y_\ell(k)$ sono combinazioni lineari delle stesse funzioni del tipo

$$f_{ij}(k) = \binom{k}{j_i} p_i^{k-j_i}$$

dove ϕ_i sono gli zeri di $D(z)$ e

$j_i = 0 \ldots \mu_i - 1$ dove μ_i è la molteplicità di

ϕ_i come zero di $D(z)$.

Si noti che in $H(z)$ potrebbero esserci cancellazioni pertanto non tutte le $f_{ij}(k)$ sono presenti in $h(k)$.

<u>DEF</u>

$f_{ij}(k)$ si dicono <u>modi</u> del sistema.

Si noti che:

A.

Se $|\phi_i| < 1 \Rightarrow$ i relativi modi tendono a zero (asintoticamente stabili); infatti sono del tipo

$$\phi_i^{k-j} \binom{k}{j} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

B. Se $|p_i|>1 \Rightarrow$ i relativi modi divergono (instabili)

Infatti:

$$\left[p_i^{k-j}\binom{k}{j}\right]$$ diverge (potrebbe non avere limite ma il limsup è $+\infty$).

C. Se $|p_i|=1 \Rightarrow$ il modo p_i^k è limitato (stabile) ma <u>non</u> converge (<u>non</u> asintoticamente stabile).

I modi relativi allo stesso polo ma di molteplicità superiore:

$$p^{k-j}\binom{k}{j} \qquad \forall\, j\geq 1$$

divergono (instabili).

Si noti che il grado relativo r di $H(z)$ è il ritardo introdotto dal filtro ossia il numero di campioni della risposta impulsiva.

(o della risposta indiciale o della risposta forzata a qualunque segnale $u(k)$ con $u(0) \neq 0$) che precedono il primo campione non nullo. Ossia, se $u(0) \neq 0$ e $y(k)$ è la relativa risposta forzata

$$y(k) = 0 \quad \forall \; k = 0, 1, \dots r-1$$

$$y(r) \neq 0$$

FILTRI FIR

Se $\quad H(z) = \dfrac{N(z)}{z^n} \qquad \deg N(z) \leq n$

$$\Rightarrow \quad H(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots + \frac{A_n}{z^n}$$

$$\Rightarrow \quad h(k) = A_0\,\delta(k) + A_1\,\delta(k-1) + \dots + A_n\,\delta(k-n)$$

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR) non hanno analogo a tempo continuo.

ESEMPIO

$$y(k) = a\,y(k-1) + u(k) - a\,u(k-1)$$

$$H(z) = \frac{1 - a z^{-1}}{1 - a z^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_f(k) = u(k)$$

Ma

$$y(k) = y_f(k) + y_\ell(k)$$
$$= u(k) + y_\ell(k)$$

$$Y_\ell(z) = a\left[z^{-1} Y_\ell(z) + y(-1)\right]$$

$$\Rightarrow \left[1 - a z^{-1}\right] Y_\ell(z) = a\,y(-1)$$

$$\Rightarrow Y_\ell(z) = a\,y(-1)\,\frac{1}{1 - a z^{-1}} = a\,y(-1)\,\frac{z}{z-a}$$

$$\Rightarrow y_\ell(k) = a\,y(-1)\,a^k = y(-1)\,a^{k+1}$$

$$\Rightarrow y(k) = u(k) + \underbrace{y(-1)a^{k+1}}_{\text{se } |a|>1 \text{ e } y(-1)\neq 0,\ y_\ell \text{ esplode!}}$$

$\Rightarrow$ DISASTRO.

CONCLUSIONE: ATTENZIONE alle cancellazioni!

STABILITÀ

Sia

$$\Sigma_1 : \quad y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k-i) + \sum_{i=0}^{m} b_i\, u(k-i)$$

e sia $D(z) :\equiv z^n \left[1 - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right] = z^n - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{n-i}$ (Pol. monico di deg $= n$)

DEF

A. Σ_1 è stabile se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.

$$\left\| \begin{bmatrix} y(-1) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow |y_\ell(k)| < \varepsilon \quad \forall k \geq 0$$

B. Σ_1 è asintoticamente stabile (A.S.) se è stabile ed $\exists \; \delta > 0$ t.c.

$$\left\| \begin{bmatrix} y(-1) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} y_\ell(k) = 0$$

TEOREMA

A. Sono equivalenti i seguenti fatti:

A1. Σ_1 è stabile

A2. $\forall\, y(-1) \ldots y(-n)$, $y_\ell(k)$ è limitata

A3. I modi di Σ_1 sono tutti limitati

A4. $\forall$ zero p di $D(z)$ si ha $|p| \leq 1$ e se $|p| = 1$ allora p è zero semplice di $D(z)$.

B. Sono equivalenti i seguenti fatti

B1. Σ è A.S.

B2. $\forall\, y(-1) \dots y(-n)$, $\lim_{k \to \infty} y_\ell(k) = 0$

B3. Tutti i modi di Σ convergono a zero

B4. $\forall$ zero p di $D(z)$ si ha $|p| < 1$.

BIBO STABILITÀ

DEF

Σ è BIBO-STABILE se $\forall\, u(k)$ limitato la corrispondente uscita forzata è limitata.

TEOREMA

Σ è BIBO-STABILE se e solo se tutti i poli di $H(z)$ hanno modulo minore di 1

N.B. $\{\text{poli } H(z)\} \subseteq \{\text{zeri di } D(z)\}$

Si ha:

$$A.S. \Rightarrow \text{BIBO-ST.}$$

L'implicazione opposta (in generale falsa) vale se e solo se posso escludere cancellazioni "instabili".

CRITERI DI STABILITÀ

Ricordiamo che a tempo continuo la BIBO-STABILITÀ di una funzione di trasferimento $H(s)$ razionale si può verificare analizzando i suoi poli.

Se

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con N e D polinomi coprimi e $\deg D \geq \deg N$, allora $H(s)$ è BIBO-stabile $\Leftrightarrow$ $D(s)$ è polinomio di Hurwitz ossia tutti i suoi zeri hanno $\mathrm{Re} < 0$. Il criterio di Routh permette di verificare se un polinomio $D(s)$ è di Hurwitz senza calcolarne gli zeri. A tempo discreto, ci sono risultati analoghi. Abbiamo già visto che la funzione di trasferimento razionale e propria

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con N e D coprimi, è BIBO-stabile se e solo se $D(z)$ è polinomio di Schur ossia tutti i suoi zeri hanno modulo minore di 1 o, equivalentemente, si trovano all'interno della circonferenza unitaria centrata nell'origine del piano complesso $\mathbb{C}$. Come si può verificare se un polinomio $D(z)$ assegnato è di Schur?

Ci sono due modi:

1. CRITERIO DI JURY

Sia dato $D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$

Costruisco la tabella di Jury:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & & a_n \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_0 \\
\hline
b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & 0 \\
\hline
c_0 & c_1 & \cdots\ c_{n-2} & 0 & 0 \\
c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots\ c_0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \vdots & & & \\
\hline
r_0 & 0 & 0 \cdots & & 0
\end{array}
$$

dove $$b_i = \frac{1}{a_0} \det \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{bmatrix} \qquad i = 0 \dots n-1$$

$$c_i = \frac{1}{b_0} \det \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_n & b_i \end{bmatrix} \qquad i = 0 \dots n-2$$

e così via.

Si ha:

PROPOSIZIONE

$D(z)$ è di Schur se e solo se:

1. Posso completare la tabella
2. $a_0, b_0, \dots, r_0$ hanno lo stesso segno.

ESEMPIO

$$D(z) = z^3 + z^2 + z + \frac{1}{2}$$

1	1	1	$1/2$
$1/2$	1	1	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	0	0
$\frac{7}{20}$			

$a_0 = 1 > 0$

$b_0 = \frac{3}{4} > 0$

$c_0 = \frac{5}{12} > 0$

$d_0 = \frac{7}{20} > 0$

$\Rightarrow D(z)$ è di Schur.

2. TRASFORMAZIONE BILINEARE o DI MÖBIUS

Sappiamo che la mappa

$$z = e^{sT}$$

mappa il semipiano sinistro aperto nel cerchio unitario aperto. Questa mappa è non razionale e quindi complessa da analizzare. Possiamo tuttavia considerare un'approssimazione razionale con le stesse proprietà:

$$M^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$s \mapsto \frac{1+s}{1-s} = z = M^{-1}(s)$$

La cui inversa è

$$M: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto s = \frac{z-1}{z+1} = M(z)$$

LEMMA

$$|z| < 1 \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{Re}\left[M(z)\right] < 0$$

DIM

$$\text{Sia} \quad z = a + jb$$

$$\Rightarrow M(z) = \frac{a - 1 + jb}{a + 1 + jb}$$

$$\mathrm{Re}\left[M(z)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{(a-1+jb)(a+1-jb)}{(a+1)^2 + b^2}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{Re}\left[a^2 - (1-jb)^2\right]}{(a+1)^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - 1 + b^2}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{|z| - 1}{(a+1)^2 + b^2}$$

$\square$

Questo lemma è utile anche perché se ho

$F(z)$ razionale propria, posso definire

$$F_1(s) = F(z)\Big|_{z = M^{-1}(s)} = F\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

Chiaramente $F_1(s)$ è ancora funzione razionale e si ha

$$F(z) = F_1(s)\Big|_{s=M(z)}$$

Dunque,

1. $z_0 \neq -1$ è polo di $F(z)$ se e solo se $M(z_0) = s_0$ è polo di $F_1(s)$
2. $z_0 = -1$ è polo di $F(z)$ se e solo se $F_1(s)$ è impropria ($\infty = M(z_0)$ è polo di $F_1(s)$).

Pertanto,

PROPOSIZIONE

La f. di trasferimento discreta $F(z)$ è BIBO-st. se e solo se lo è la f. di trasf. continua

$$F_1(s) = F(z)\Big|_{z=M^{-1}(s)}.$$

1. Si noti che la BIBO-stabilità di $F_1(s)$ implica che $F_1(s)$ sia <u>propria</u> (una f. impropria non è BIBO-STABILE).

2. La BIBO-ST. di F_1 va intesa nel senso del sistema continuo ad essa associato. La BIBO-ST. di F va intesa nel senso del sistema discreto di cui F è f. di trasferimento.

In conclusione, dopo aver definito $F_1(s)$ posso verificare con il criterio di Routh se $F_1(s)$ è BIBO-STABILE.