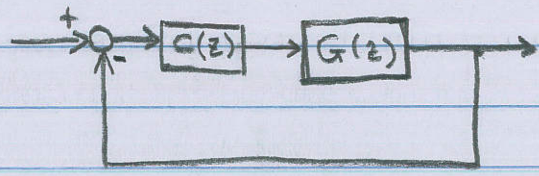
INTERCONNESSIONI DISCRETO-CONTINUO: HOLDER

Le interconnessioni fra sistemi discreti si comportano allo stesso modo di quelle fra sistemi continui. Per esempio, il sistema a catena chiusa

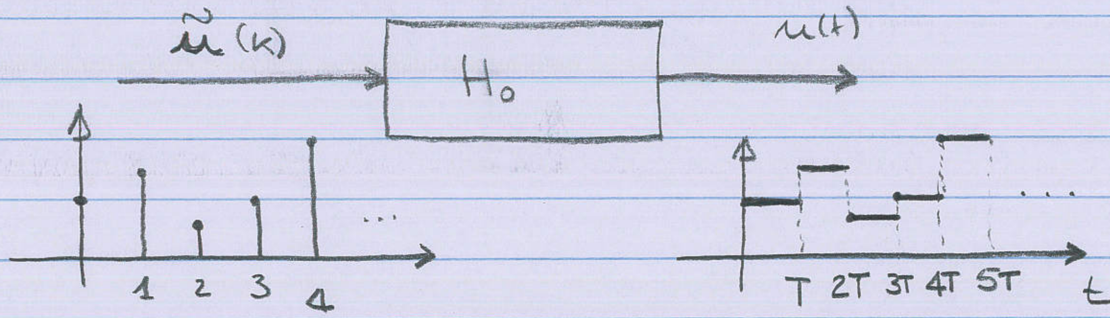


ha la "solita" funzione di trasferimento

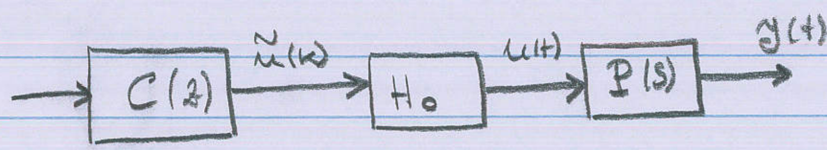
$$W(z) = \frac{C(z)\,G(z)}{1 + C(z)\,G(z)}$$

Più complessa è l'interconnessione fra sistemi continui e sistemi discreti. Abbiamo visto il campionamento che permette di alimentare un sistema discreto a partire dall'uscita di un sistema continuo.

Viceversa possiamo considerare l'<u>holder</u> (o mantenitore) che trasforma un segnale discreto in un segnale continuo "mantenendone" il valore per il periodo di campionamento. Noi consideriamo holder di "ordine zero" che chiameremo H_0 e che hanno il seguente comportamento.



Con questo oggetto possiamo controllare un sistema analogico con un controllore digitale:



Devo calcolare una descrizione matematica di H_0.

1. Considero H_0'

$$u_\delta(t) \longrightarrow \boxed{H_0'(s)} \longrightarrow u(t)$$

con $u_\delta(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}(k)\,\delta(t-kT)$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}(k)\left[1(t-kT) - 1(t-(k+1)T)\right]$$

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}(k)\,\frac{1}{s}\left[e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}(k)\,\frac{e^{-ksT}}{s}\left[1 - e^{-sT}\right]$$

$$= \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}(k)\left(e^{sT}\right)^{-k}$$

$$= \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \tilde{U}\left(e^{sT}\right)$$

$$= \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot U_\delta(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_0'(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

2. Ora considero il sistema

$$\tilde{u}(k) \longrightarrow \boxed{H_0} \longrightarrow \boxed{F(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\downarrow_T} \longrightarrow \tilde{y}(k)$$

e voglio calcolare la funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente

$$\tilde{u}(k) \longrightarrow \boxed{\tilde{F}_e(z)} \longrightarrow \tilde{y}(k)$$

A questo scopo devo calcolare $\tilde{Y}(z)$ in funzione di $\tilde{U}(z)$. Per fare ciò introduciamo l'operatore di campionamento (op. <u>lineare</u>) che associa ad un segnale continuo la sua versione campionata:

$$S_T(f(t)) = \left(S[f(t), T] \right) = \tilde{f}(k) := f(kT)$$

Allora

$$\tilde{Y}(z) = \mathcal{Z}\left[\tilde{y}(k)\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[y(t)\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\,H_0'(s)\,U_\delta(s)\right]\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\left(1-e^{-sT}\right)\frac{F(s)}{s}U_\delta(s)\right]\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}U_\delta(s)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-sT}\frac{F(s)}{s}U_\delta(s)\right]\right]\right]$$

Definisco ora

$$z(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}U_\delta(s)\right] \qquad \text{(N.B. } z(t) \text{ è } \underline{\text{CAUSALE}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}(z) = \mathcal{Z}\left[S_T\left[z(t) - z(t-T)\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[\tilde{z}(k) - \tilde{z}(k-1)\right]$$

$$= \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left[\tilde{z}(k)\right] = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}U_\delta(s)\right]\right]\right]$$

Infine definisco

$$F_1(s) := \frac{F(s)}{s}$$

e calcolo

$$\mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\,U_\delta(s)\right]\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[(f_1 * u_\delta)(t)\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\int_0^t f_1(t-\tau)\,u_\delta(\tau)\,d\tau\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_0^t f_1(t-\tau)\,\tilde{u}(\ell)\,\delta(\tau-\ell T)\,d\tau\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[S_T\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} f_1(t-\ell T)\;\tilde{u}(\ell)\right]\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} f_1((k-\ell)T)\,\tilde{u}(\ell)\right]$$

$$= \mathcal{Z}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{f}_1(k-\ell)\,\tilde{u}(\ell)\right]$$

$$= \tilde{F}_1(z)\,\tilde{U}(z)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Y}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \tilde{F}_1(z) \; \tilde{U}(z)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F}_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \tilde{F}_1(z)$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\tilde{f}_1(k) \right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[f_1(t) \right] \right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s) \right] \right] \right]$$

Ossia

$$\boxed{\tilde{F}_e(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s} \right] \right] \right]}$$

Interpretazione

La risposta al gradino (di trasf. $\frac{z}{z-1}$) di $\tilde{F}_e(z)$ è la versione campionata della risposta al gradino di $F(s)$.

NOTE

1. Non vi sono approssimazioni
2. Se $F(s)$ è razionale propria allora anche $\tilde{F}_e(z)$ lo è: i poli p_i di F si mappano in poli $e^{p_i T}$ di $\tilde{F}_e$.

   Invece, gli zeri si trasformano in modo "strano" e complicato da descrivere.

   Inoltre, spesso $\tilde{F}_e(z)$ ha un numero maggiore di zeri di $F(s)$: si parla di zeri "evocati" dal campionamento

   Di solito $\tilde{F}_e(z)$ ha grado relativo pari a 1 (perché?)

ESEMPIO

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

$$\tilde{F}_e(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T \left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]\right]\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T \left[A_0 1(t) + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} \right]\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[A_0 \delta_{-1}(k) + A_1 e^{-kT} + A_2 e^{-2kT} \right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \left[A_0 \frac{z}{z-1} + A_1 \frac{z}{z-p_1} + A_2 \frac{z}{z-p_2} \right]$$

$$= A_0 + \frac{z-1}{z-p_1} A_1 + \frac{z-1}{z-p_2} A_2$$

dove

$$A_0 := \lim_{s \to 0} s \frac{F(s)}{s} = F(0) = 1$$

$$A_1 := \lim_{s \to 1} (s+1) \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{(-1)(1)} = -2$$

$$A_2 := \lim_{s \to -2} (s+2) \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{(-2)(-1)} = 1$$

$p_1 := e^{-T}$

$p_2 := e^{-2T} = p_1^2$

Chiaramente

$A_0 + A_1 + A_2 = 0$

(perché?)

Svolgendo le somme si ottiene

$$\tilde{F}_e(z) = \frac{(z-p_1)(z-p_2) - z(z-1)(z-p_2) + (z-1)(z-p_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$= \frac{z\left(-p_1 - p_1^2 + 2p_1^2 + 2 - p_1 - 1\right) + p_1^3 - 2p_1^2 + p_1}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$= \frac{z\left(1 + p_1^2 - 2p_1\right) + p_1\left(p_1^2 - 2p_1 + 1\right)}{(z-p_1)(z-p_1^2)}$$

$$= \frac{(1-p_1)^2 (z+p_1)}{(z-p_1)(z-p_1^2)}$$

$z_0 = -p_1$: zero evocato.