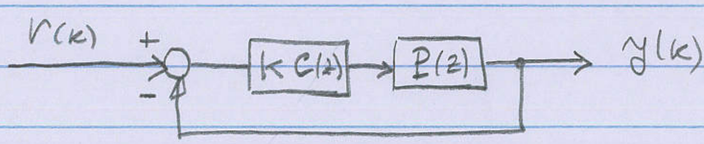
LUOGO DELLE RADICI

Consideriamo la connessione



Sia $\quad C(z)P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ coprimi.

$$\Rightarrow \quad W(z) = \frac{kN(z)}{D(z)+kN(z)}$$

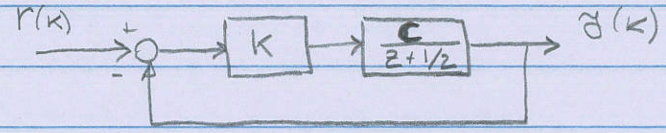
$\Rightarrow \quad W(z)$ è BIBO-S. $\Leftrightarrow$ $\varphi(z) := D(z)+kN(z)$ è di Schur.

Lo si può verificare con il criterio di Jury.

Se vogliamo vedere come si muovono i poli di $W(z)$ in $\mathbb{C}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, possiamo usare il luogo delle radici.

Il luogo si traccia al solito modo. L'unica differenza è che i valori critici di k corrispondono all'attraversamento della circonferenza unitaria.

ESERCIZIO

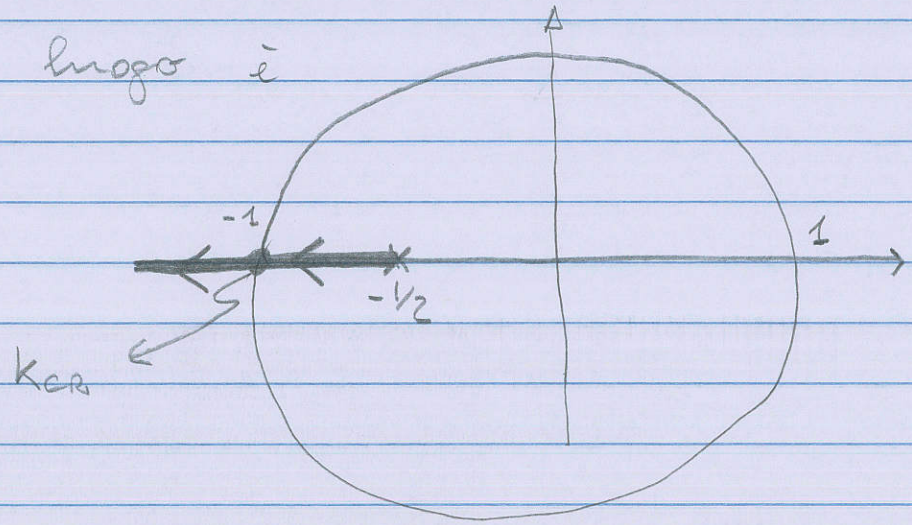


$(c>0)$

$(*)$

Per quali valori di $k>0$ la c.c. $(*)$ è BIBO-S. ?

Il luogo è



Il valore critico di k si calcola imponendo che

$D(z) + kN(z) = 0$, ossia $z + \frac{1}{2} + kc = 0$, da cui si

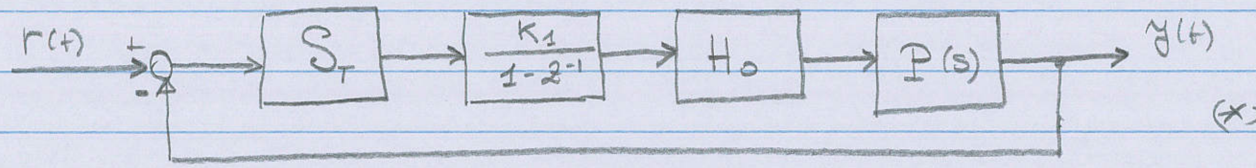
ottiene la sol. z_0:

$$z_0 = -kc - \frac{1}{2}.$$

Imponendo $z_0 = -1$ si ha

$$-kc - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow kc = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{k_{CR} = \frac{1}{2c}}$$

ESERCIZIO

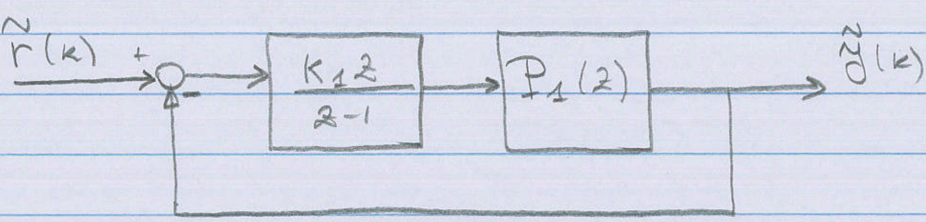


Si analizzi la stabilità di (*) al variare di

$K_1 > 0$ e $T (> 0)$. Si ha $P(s) = \frac{1}{s+1}$

SOL

Prima di tutto determino lo schema discreto equivalente:



dove

$$P_1(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \qquad \begin{cases} A = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{P(s)}{s} = P(0) = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

(non occorre calcolarlo perché $B + A = 0$)

$$P_1(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]\right]\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[1(t) - e^{-t}\right]\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\delta_{-1}(k) - (e^{-T})^k\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-p}\right] \qquad p := e^{-T}$$

$$= 1 - \frac{z-1}{z-p}$$

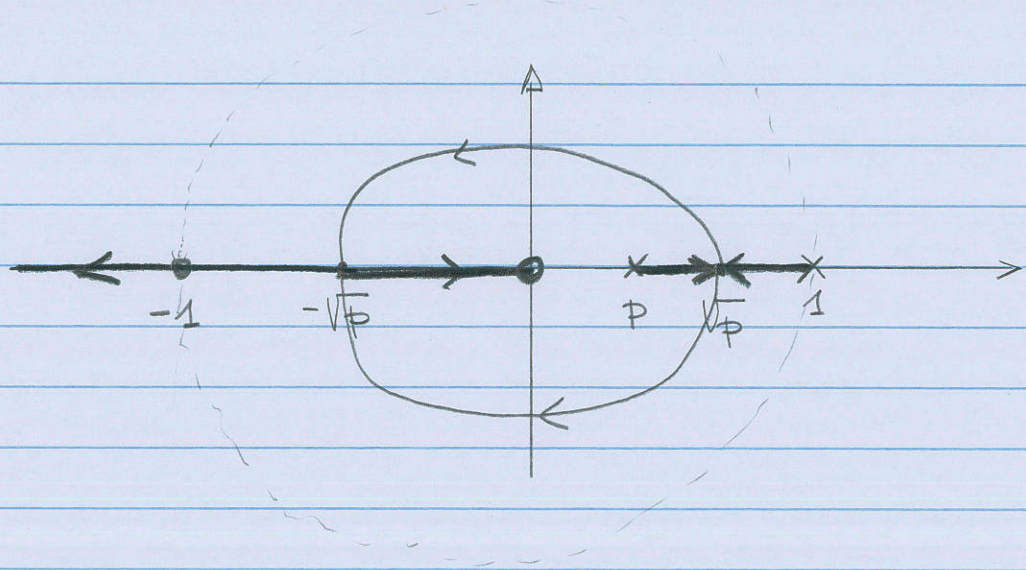
$$= \frac{z-p-z+1}{z-p} = \frac{1-p}{z-p} \qquad ((1-p)>0)$$

$$H(z) := \frac{k_1 z}{z-1} P_1(z) = k_1(1-p)\frac{z}{(z-1)(z-p)}$$

Definisco per semplicità

$$k := k_1(1-p)$$

e traccio il luogo rispetto a $k>0$.



P. doppi: $\quad ND' = DN' \qquad (N = z\ ,\ D = z^2 - (p+1)z + p)$

$$z(2z - (p+1)) = z^2 - (p+1)z + p$$

$$2z^2 - z(p+1) = z^2 - (p+1)z + p$$

$$z^2 = p \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \pm\sqrt{p} \qquad (\sqrt{p} > p)$$

K_{CR}:

$$\begin{cases} D + KN = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + (k - p - 1)z + p = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + p + 1 - k + p = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{CR} = 2(p+1)$$

$$\Rightarrow \quad K_{1CR} = 2 \cdot \frac{e^{-T} + 1}{1 - e^{-T}}$$

Verifichiamo che non ci sono altri valori critici:

$$D + kN = z^2 + (k-p-1)z + p$$

1	$k-p-1$	p	$1>0$
p	$k-p-1$	1	
$1-p^2$	$(k-1-p)(1-p)$		$1-p^2>0$
$(k-1-p)(1-p)$	$1-p^2$		

$$\frac{(1-p^2)^2-(1-p)^2(k-1-p)^2}{1-p^2}$$

$$\frac{(1-p)^2\left[(1+p)^2-(k-1-p)^2\right]}{1-p^2}$$

$$(1+p)^2-(k-1-p)^2 = \cancel{p^2}+\cancel{2p}+\cancel{1}-k^2-\cancel{1}-\cancel{p^2}+2k+2kp-\cancel{2p}$$

$$= -k^2+2k(1+p) = k(2+2p-k)$$

$\Rightarrow$ L'unico K_{CR} è $2(1+p)$.

Abbiamo visto che

$$K_{1CR} = 2\,\frac{e^{-T}+1}{1-e^{-T}};$$

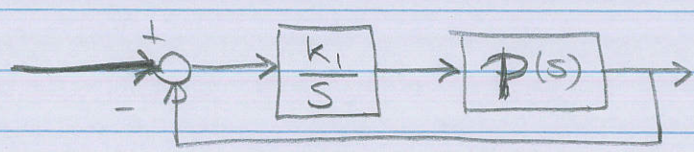
dunque K_{1CR} è f. decrescente di T.

Inoltre,

$$K_{1CR} \longrightarrow \begin{cases} \infty & T \to 0^+ \\ 2, & T \to +\infty \end{cases}$$

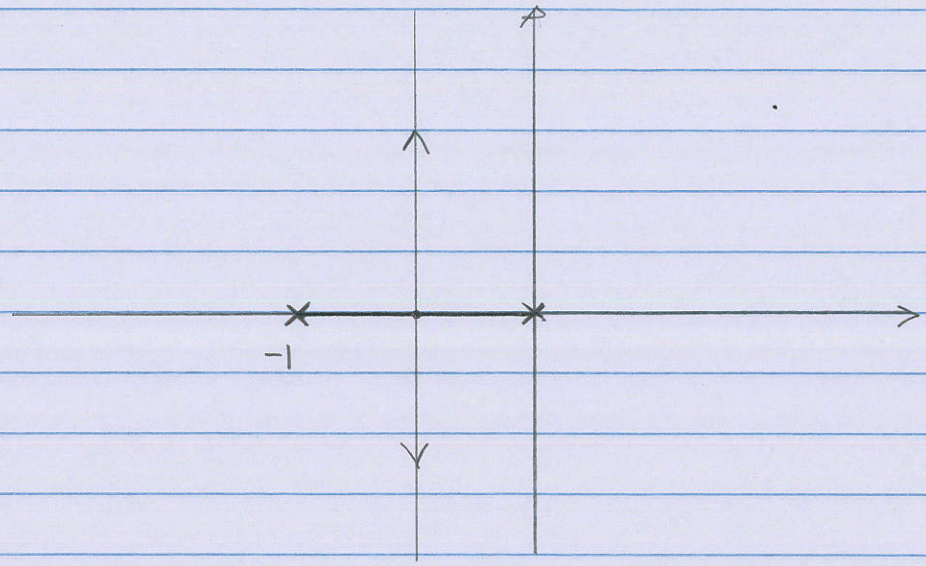
Tanto più piccolo è T, tanto più il sistema rimane stabile anche per guadagni alti.

Si noti che il sistema continuo equivalente



ha C.A.D. $H(s) := \dfrac{K_1}{s(s+1)}$

e quindi il luogo è

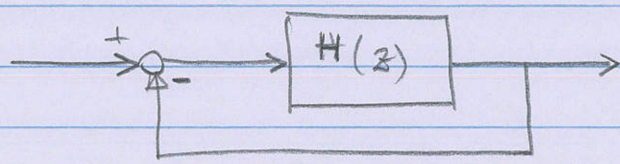


Dunque la C.C. è BIBO-S $\forall\, K_1 > 0$.

La discretizzazione (come quasi sempre avviene) distrugge questa proprietà di stabilizzazione ad alto guadagno. Però, più piccolo è T, più "questa proprietà è approssimata bene dal sistema discretizzato".

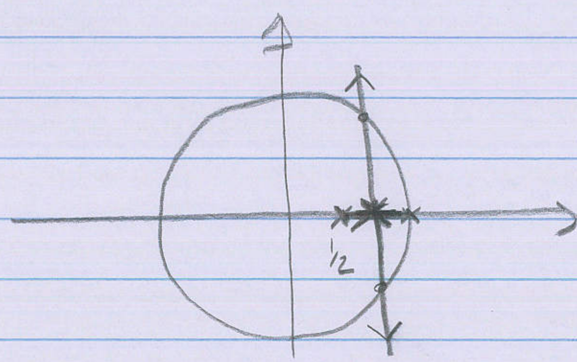
In generale, per calcolare K_{CR} si può usare il criterio di Jury (come nel caso appena visto) oppure la trasf. bilineare.

Es.



$$H(z) = \frac{K}{(z-1)(2z-1)}, \quad K>0$$

In questo caso, il luogo è



$\sigma_c = \frac{3}{4}$

P. doppio: $\frac{3}{4}$

Calcolo K_{CR}

A. Jury: $P(z) = 2z^2 - 3z + 1 + K$

Costruisco la tabella di Jury:

2	-3	$1+k$
$1+k$	-3	2
b_0	b_1	
b_1	b_0	
c_0		

1. $a_0 = 2 > 0$

2. $b_0 = \frac{1}{2}\left[4-(1+k)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4-1-k^2-2k\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-k^2-2k+3\right] = -\frac{1}{2}(k-1)(k+3) \qquad \left(k_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}\right)$

$b_1 = \frac{3}{2}(1+k-2) = \frac{3}{2}(k-1)$

3. $$c_0 = \frac{1}{b_0}\left[b_0^2 - b_1^2\right]$$

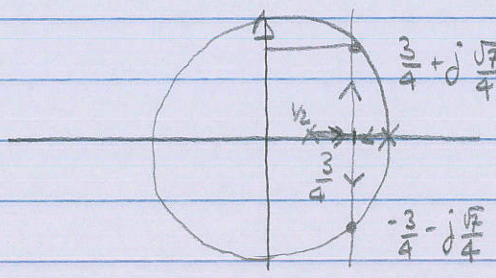
$$= \frac{1}{b_0 4}\left[(k-1)^2\left[(k+3)^2 - 9\right]\right]$$

$$= \frac{(k-1)^2 k}{4 b_0}\left[k+6\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0 > 0 \\ c_0 > 0 \end{cases} \iff \underline{\underline{0 < k < 1}}$$

Per $k = 1$ si ha

$$P(z) = 2z^2 - 3z + 2 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{4} = \frac{3 \pm j\sqrt{7}}{4}$$



B. Trasformazione bilineare

$$\overline{W}(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{k}{(z-1)(2z-1)+k}$$

$$\overline{W}_1(s) := \overline{W}(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}} = \frac{k}{\left[\frac{1+s-(1-s)}{1-s}\right]\left[\frac{2(1+s)-(1-s)}{1-s}\right]+k}$$

$$= \frac{k(1-s)^2}{2s(1+3s)+k(1+s^2-2s)}$$

$$= \frac{k(1-s)^2}{s^2(k+6)+s(2-2k)+k}$$

$\overline{W}(z)$ è BIBO-stabile (discreta) se e solo se

$\overline{W}_1(s)$ è BIBO-stabile (continua) $\iff \begin{cases} k>0 \\ 2-2k>0 \end{cases} \iff \boxed{0<k<1}$

VALORI CRITICI

Se $k=1$: $\quad s_{CR1/2} = \pm j\frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow z_{CR1/2} = \frac{1+s_{CR1/2}}{1-s_{CR1/2}} = \frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$ ✓

Se $k=0$: $\quad s_{CR} = 0 \Rightarrow z_{CR} = 1$ ✓