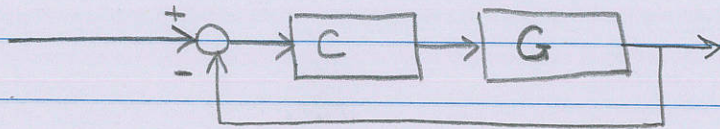


STABILITÀ INTERNA DI UN'INTERCONNESSIONE

Vogliamo affrontare il problema illustrato nel seguente esempio:



Siano $C(z) = \frac{z-2}{z-1/3}$ $G(z) = \frac{1}{z-2}$

Allora la f. di trasferimento a catena chiusa

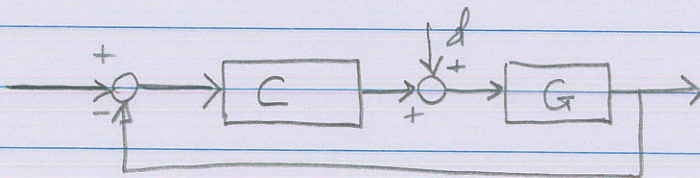
è

$$W(z) = \frac{\frac{1}{z-1/3}}{1 + \frac{1}{z-1/3}} = \frac{1}{z + 2/3}$$

$W(z)$ è BIBO-stabile, però:

1. Se perturbato con un disturbo fra

C e G ottengo



e la f. dit. di d e y è:

$$W_d(z) = \frac{\frac{1}{z-2}}{1 + \frac{1}{z-1/3}} = \frac{1}{(z-2)(z+2/3)}$$

⇒ NON BIBO-STABILE! (DISASTRO)

2. Se

$$G(z) = \frac{1}{z-2+\varepsilon} \quad \text{con } \varepsilon \neq 0$$

Allora

$$W(z) = \frac{z-2}{z^2 + \left(\varepsilon - \frac{4}{3}\right)z - \frac{4+\varepsilon}{3}}$$

Non BIBO-STABILE (per quanto ε sia piccolo!) ⇒ Altro disastro!

Cambiando z con s si vede che questi ragionamenti valgono per i periferici a tempo continuo.

Consideriamo dunque un'interconnessione con h blocchi P_l , $l=1, 2, \dots, h$. Perturberemo l'ingresso di ciascun blocco con un ingresso additivo u_l , $l=1 \dots h$.

DEF L'interconnessione si dice internamente stabile se la f. di t. da ciascun ingresso esterno u_l all'uscita di ciascun blocco è BIBO-stabile.

Chieramente la stabilità interna è più forte della stabilità BIBO ed è anche la proprietà ragionevole da imporre se vogliamo evitare disastri.

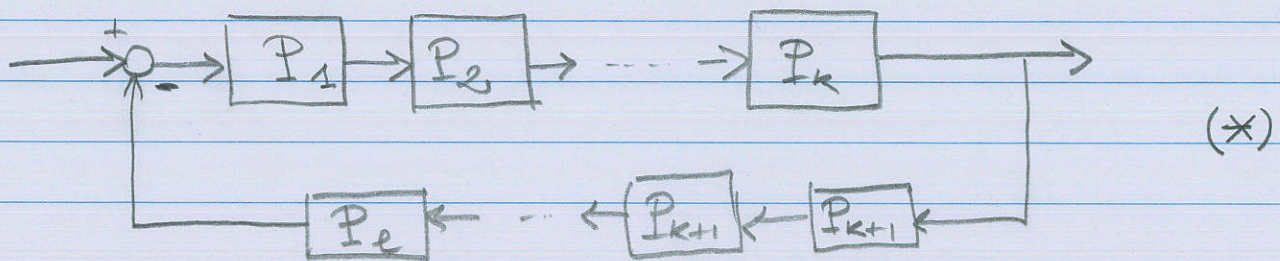
Condizioni necessarie e sufficienti per la stab. interna

In generale, per verificare la stabilità interna di un'interconnessione si devono considerare tutte le h^2 funzioni di trasferimento e si deve controllare se sono tutte BIBO-stabili.

Tuttavia, c'è un caso in cui basta fare un unico test:

Proposizione

Si consideri la classe \mathcal{I} delle interconnessioni con un unico anello di retroazione negativa, del tipo



e sia $P_i = \frac{N_i}{D_i}$, con N_i e D_i coprimi $\forall i=1 \dots l$.

L'interconnessione (*) è internamente stabile
se e solo se

$$\bar{D} := \prod_{i=1}^{\ell} D_i + \prod_{i=1}^{\ell} N_i$$

è un polinomio di Schur con lo stesso grado
di $\prod_{i=1}^{\ell} D_i$, cioè:

$$\deg \bar{D} = \deg \left[\prod_{i=1}^{\ell} D_i \right]$$

NOTA

Lo stesso risultato vale a tempo
continuo pur di sostituire "Schur"
con "Hurwitz".

RISPOSTA ARMONICA

Si consideri un sistema lineare BIBO-STABILE e siano $u(k) := U_0 \cos(\theta_0 k + \varphi_0)$ l'ingresso del sistema e $y(k)$ la corrispondente risposta forzata. Allora si ha

$$y(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A_0 U_0 \cos(\theta_0 k + \varphi_0 + \psi_0) \quad (*)$$

dove $A_0 := |G(e^{j\theta_0})|$, $\psi_0 := \text{Arg}[G(e^{j\theta_0})]$ e

$G(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema.

In modo simile a quanto avviene a tempo continuo $G(e^{j\theta_0})$ è la risposta armonica del sistema alla pulsazione θ_0 . $A_0 := |G(e^{j\theta_0})|$

è l'amplificazione del sistema alla pulsazione θ_0 e $\psi_0 := \text{Arg}[G(e^{j\theta_0})]$ è lo sfasamento.

Poiché $G(e^{j\theta})$ è periodica e simmetrica

(infatti $G(e^{-j\theta}) = [G(e^{j\theta})]^*$) basta rappresentarla

per $\theta \in [0, \pi]$. In particolare, posso utiliz

zare i diagrammi di BODE a tempo discreto

che sono i grafici di $|G(e^{j\theta})|$ e $\text{Arg}[G(e^{j\theta})]$.

Posso anche tracciare il diagramma di Nyquist

che è la curva parametrica nel piano

$\text{Re}[G(e^{j\theta})]$, $\text{Im}[G(e^{j\theta})]$ in f. del parametro θ .

REGIME PERMANENTE

La prima e più importante specifica di un sistema di controllo è che garantisca stabilità del sistema a catena chiusa.

Abbiamo visto come si può usare il

luogo delle radici assieme al criterio

di Jury (o alla trasformazione bilineare)

per garantire la stabilità del sistema

a catena chiusa. Una volta garantita

la stabilità dobbiamo anche preoccuparci

delle proprietà della risposta "a regime"

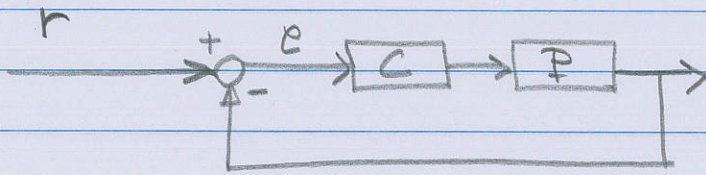
e di quelle del transitorio.

Consideriamo per ora le caratteristiche di

regime intese come capacità di inseguimento

di alcune classi di segnali da parte del sistema a catena chiusa.

Consideriamo il solito schema (continuo o discreto, non cambia)



e supponiamo che la catena chiusa sia

BIBO-stabile. Sia R la trasformata

(zeta o di Laplace a seconda del contesto) di r

e sia

$$R = \frac{N_R}{D_R} \quad \text{con} \quad D_R = D_{RS} \cdot D_{RI}$$

dove ho fattorizzato il polinomio D_R in un fattore D_{RS} che contiene tutti gli zeri appartenenti alla regione di stabilità di

\mathbb{C} (ossia $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) nel discreto e

\mathbb{C} (ossia $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < 0\}$) nel continuo.

$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[s] < 0\}$ nel continuo) e un fattore

D_{RI} che contiene tutti gli altri zeri.

Sia ora $H := CP = \frac{N_H}{D_H}$

Allora la trasformata dell'errore è

$$E = \underbrace{\frac{1}{1+CP}}_{\text{BIBO-stabile}} R = \frac{D_H}{N_H + D_H} \cdot \frac{N_R}{D_R} = \frac{D_H N_R}{(N_H + D_H) D_{RS} D_{RI}}$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Leftrightarrow D_{RI} \text{ è fattore di } D_H.$$

In conclusione, una volta garantite le BIBO-stabilità del sistema a catena chiusa, si ha inasprimento asintotico perfetto di r se e solo se tutti i poli "instabili" di R sono anche poli della f. di t. H della catena di errore diretta.

Questa proprietà è detta "principio del modello interno".

ES (TIPO)

Tempo continuo

Tipo = molteplicità del polo nell'origine della f.d.t della C.A.D.

Segnali canonici ($r = u_l$)

$$u_l(t) = \frac{1}{l!} t^l \delta_1(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s^{l+1}}$$

$l = 0$ gradino

$l = 1$ rampe

$l = 2$ rampe parabolica

\vdots

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0 \Leftrightarrow \text{tipo} > l$$

Tempo discreto

Tipo = molteplicità del polo in 1 della f.d.t della C.A.D.

Segnali canonici ($r = u_l$)

$$u_l(k) = \binom{k}{l} \delta_{-1}(k)$$

$l = 0$ gradino

$l = 1$ rampe

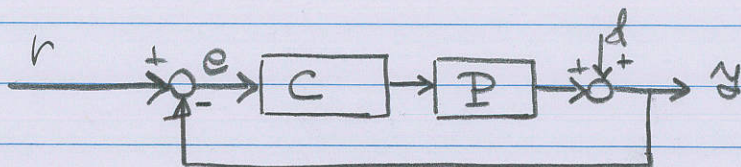
$l = 2$ rampe parabolica

\vdots

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \Leftrightarrow \text{tipo} > l$$

OSSERVAZIONE

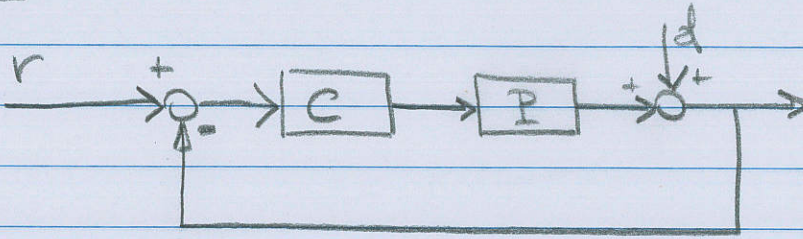
Se consideriamo la presenza del disturbo:



la f.d.t. tra d ed e è

$$W_{de} = - \frac{1}{1+CP}$$

ossia la stessa, e meno del segno, di quella fra r ed e . Pertanto, in corrispondenza alle stesse dinamiche per le quali c' è inguimento asintotico perfetto, c' è anche reazione asintotica perfetta se tali dinamiche appaiono nel disturbo.

ESEMPIOBIBO-St

Supponiamo di avere un disturbo sinusoidale di ampiezza e fase incognite:

$$d(k) = A \cos(\theta k + \varphi)$$

$$= A_1 \cos(\theta k) + A_2 \sin(\theta k)$$

 \Rightarrow

$$D(z) = A_1 \frac{z(z - \cos\theta)}{z^2 - 2z \cos\theta + 1} + \frac{A_2 z \sin\theta}{z^2 - 2z \cos\theta + 1}$$

$$= \frac{A_1 z^2 + (A_2 \sin\theta - A_1 \cos\theta)z}{z^2 - 2z \cos\theta + 1}$$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z \cos\theta + 1$ è un fattore del denominatore di $H := CP$

Ricordiamo che a tempo continuo si ha risonanza e sintotica perfetta di disturbi sinusoidali a pulsazione ω (ossia $d(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$) se e solo se $(s^2 + \omega^2)$ è un fattore del denominatore della f. d. t. della C. A. D.

N.B.

Questi risultati mi danno un criterio di progetto di C: se devo impegnare determinate dinamiche (o contrastare disturbi che prevedo contengono determinate dinamiche) devo inserire i relativi poli fra quelli di C (e meno che non siano già presenti fra i poli di P).