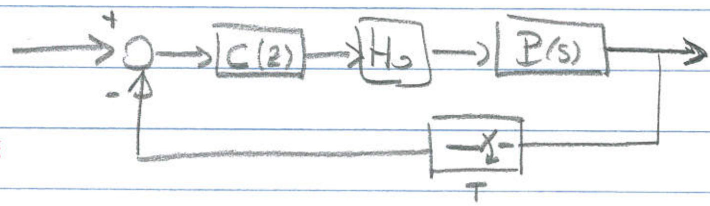
PROGETTO DI $C(z)$

1. METODI PER EMULAZIONE



A. $P_1(s) = e^{-sT/2} P(s)$

B. Progetto $C(s)$ nel continuo

C. Traduco $C(s)$ in un $\tilde{C}(z)$ discreto

2. SINTESI TRAMITE TRASF. BILINEARE (VARIANTE DI 1.)

A. $$\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right]$$

B. $$P_1(s) = \tilde{P}(z)\Big|_{z = \frac{1+(sT)/2}{1-\frac{sT}{2}}}$$

C. Progetto $C(s)$ nel continuo

D. $$\tilde{C}(z) = C(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

3. SINTESI DIRETTA

A. $\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T \left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s} \right] \right] \right]$

B. Si Progetta $C(z)$ direttamente nel discreto.

1. METODI PER EMULAZIONE

Devo dire come tradurre $C(s)$ nel discreto:

Essenzialmente s corrisponde ad un'operazione di derivata pertanto devo capire come approssimare la derivata nel discreto. In modo analogo e^{sT} corrisponde ad un anticipo di T secondi ossia a tempo discreto all'operatore z.

Potrei pertanto approssimare $z = e^{sT}$.

Vediamo alcune approssimazioni possibili:

i) Metodo di Eulero in avanti (EA)

$$z = e^{sT} \simeq 1 + sT$$

$$s \simeq \frac{z-1}{T}$$

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{f((k+1)T) - f(kT)}{T}$$

ii) Metodo di Eulero all'indietro (EI)

$$z = e^{sT} = \left(e^{-sT}\right)^{-1} = \frac{1}{e^{-sT}} \simeq \frac{1}{1-sT}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - sT \simeq z^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad s \simeq \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T}$$

iii) Metodo di Tustin

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \simeq \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

$$\Rightarrow \quad s \simeq \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

$$\frac{s(1+z)}{2} \simeq \frac{z-1}{T}$$

$$\frac{\dfrac{df(t)}{dt} + \dfrac{df(t+T)}{dt}}{2} \simeq \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

s e z sono **legate** da una trasformazione bilineare rinormalizzata.

Scelto il metodo si pone

$$\tilde{C}(z) = C(s)\Big|_{s = \begin{cases} (z-1)/T & \text{(EA)} \\ (1-z^{-1})/T & \text{(EI)} \\ \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} & \text{(TUSTIN)} \end{cases}}$$

Si noti che

1. EA mappa $\{Re[s]<0\}$ in $\{Re[z]<1\}$
2. EI mappa $\{Re[s]<0\}$ in $\{z : |z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$
3. Tustin mappa la regione di stabilità continua $\{Re[s]<0\}$ nella regione di stabilità discreta $\{|z|<1\}$.

Un metodo alternativo di tradurre C dal continuo al discreto è il metodo con l'approssimazione MPZ (matched pole-zero).

APPROSSIMAZIONE MPZ DI C(S)

Sia $C(s)$ razionale propria. La scrivo in forma di Evans:

$$C(s) = K_E \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{s^{\ell} \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad \begin{cases} z_i \neq 0 \\ p_i \neq 0 \\ n + \ell \geq m \end{cases}$$

Allora

$$C_{MPZ}(z) = K_D \frac{\left[\prod_{i=1}^{m} \left(z - e^{z_i T}\right)\right] (z+1)^{h}}{(z-1)^{\ell} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(z - e^{p_i T}\right)\right]}$$

dove:

1. $$h = \begin{cases} n + \ell - m & \text{se voglio reldeg}[C(z)] = 0 \text{ (nessun ritardo)} \\ n + \ell - m - 1 & \text{se voglio 1 passo di ritardo} \end{cases}$$

N.B. Di solito non si introduce più di 1 passo di ritardo in $C_{MPZ}(z)$.

② K_D è scelto in modo che $C(s)$ e $C_{MPZ}(z)$ abbiano lo stesso guadagno di Bode, ossia:

$$\lim_{s\to 0} s^\ell C(s) = \frac{1}{T^\ell} \lim_{z\to 1} (z-1)^\ell C_{MPZ}(z)$$

Equivalentemente:

$$K_D = \frac{T^\ell \lim_{s\to 0} s^\ell C(s)}{\lim_{z\to 1}\left[\frac{\left[\prod_{i=1}^{m}\left(z-e^{z_i T}\right)\right](z+1)^h}{\prod_{i=1}^{n}\left(z-e^{p_i T}\right)}\right]}$$

Cioè:

$$K_D = \frac{T^\ell K_E}{2^h}\left[\frac{\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}}{\dfrac{\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{z_i T}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{p_i T}\right)}}\right]$$

o, anche

$$K_D = \frac{T^\ell K_E}{2^h}\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)\prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{p_i T}\right)}{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{z_i T}\right)}$$

ESEMPI

1.

$$C(s) = K_c \frac{s+a}{s+b}$$

$$\Rightarrow \quad C_{MPZ} = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$

con $K_d := K_c \frac{a}{b} \cdot \frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}$

2.

$$C(s) = K_c \frac{s+a}{(s+b)(1+s\tau)}$$

$$= \frac{K_c}{\tau} \frac{s+a}{(s+b)\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

Se voglio rel deg = 1 :

$$\Rightarrow \quad C_{MPZ}(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{\left(z - e^{-bT}\right)\left(z - e^{-T/\tau}\right)}$$

con $K_d := \frac{K_c}{\tau} \frac{a}{\frac{b}{\tau}} \cdot \frac{\left(1-e^{-bT}\right)\left(1-e^{-T/\tau}\right)}{1-e^{-aT}}$

$$= \frac{K_c a}{b} \cdot \frac{\left(1-e^{-bT}\right)\left(1-e^{-T/\tau}\right)}{1-e^{-aT}}$$

Se voglio rel deg = 0:

$$\Rightarrow \quad C_{MPZ} = K_d \frac{(z-e^{-aT})(z+1)}{(z-e^{-bT})(z-e^{-T/\tau})}$$

con

$$K_d := K_c \frac{a}{b} \frac{(1-e^{-bT})(1-e^{-T/\tau})}{(1-e^{-aT}) \cdot 2}$$

3.

$$C(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)}$$

Se voglio rel deg = 1

$\Rightarrow$

$$C_{MPZ}(z) = K_d \frac{z-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})}$$

con

$$K_d := T K_c \frac{a}{b} \cdot \frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}$$

Se voglio rel deg = 0

$$\Rightarrow \quad C_{MPZ}(z) = K_d \frac{(z - e^{-Ta})(z+1)}{(z-1)(z - e^{-bT})}$$

con

$$K_d := T K_c \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{2(1 - e^{-aT})}$$

OSSERVAZIONE

Se $\ell = 0$ (ossia $C(s)$ non ha poli in zero) la formula per il calcolo di K_D è abbastanza ovvia e consiste nell'uguagliare i guadagni statici discreto e continuo. Se $\ell \neq 0$, la presenza di T^ℓ nel calcolo di K_D non è ovvia a prima vista. Per spiegarla possiamo ragionare come segue. Scriviamo $C(s)$ nella forma

$$C(s) = K_E \frac{\prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}{s^{\ell} \prod_{i=1}^{n} (s-p_i)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{K_E \frac{\prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}{(s-\varepsilon)^{\ell} \prod_{i=1}^{n} (s-p_i)}}_{:= C_{\varepsilon}(s)}$$

Consideriamo $C_{\varepsilon}(s)$ (che non ha poli in zero) e trasformiamolo:

$$C_{\varepsilon, MPZ}(z) = K_{D,\varepsilon} \frac{\prod_{i=1}^{m} \left(z - e^{z_i T}\right) (z+1)^h}{\left(z - e^{\varepsilon T}\right)^{\ell} \prod_{i=1}^{n} \left(z - e^{p_i T}\right)}$$

dove

$$K_{D,\varepsilon} = K_E \frac{\prod_{i=1}^{m} (-z_i) \left(1-e^{\varepsilon T}\right)^{\ell} \prod_{i=1}^{n} \left(1-e^{p_i T}\right)}{\left[\prod_{i=1}^{n} (-p_i)\right] \cdot (-\varepsilon)^{\ell} \; 2^h \prod_{i=1}^{m} \left(1-e^{z_i T}\right)}$$

ma per $|\varepsilon|$ sufficientemente piccolo $1-e^{\varepsilon T} \simeq -\varepsilon T$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_{D,\varepsilon} = \frac{K_E T^{\ell}}{2^h} \frac{\prod_{i=1}^{m} (-z_i) \prod_{i=1}^{n} \left(1-e^{p_i T}\right)}{\prod_{i=1}^{n} (-p_i) \prod_{i=1}^{m} \left(1-e^{z_i T}\right)}$$

che è proprio la formula per K_D trovata in precedenza. Dunque la presenza del termine T^ℓ garantisce che il guadagno K_D sia una f. continua della posizione dei poli di $C(s)$ (che è una cosa molto ragionevole da richiedere).

OSSERVAZIONI SUL METODO PER EMULAZIONE

1. MPZ e Tustin hanno prestazioni molto simili anzi se $T \to 0$ si può dimostrare che i due metodi tendono a coincidere. I metodi di Eulero hanno prestazioni inferiori.
2. Per avere buoni risultati si deve avere $\Omega \geq 25\, \omega_b$. Per $\Omega > 30\, \omega_b$ le prestazioni di MPZ e Tustin sono quasi le stesse di quelle continue
3. Nel progetto di $C(s)$ va ricordato il ritardo $\frac{T}{2}$ (introdotto da H_0)
4. Se si vuole progettare $C(s)$ con una $G(s)$ razionale si può approssimare $G'(s) := G(s)\, e^{-sT/2}$ con $G''(s) = G(s) \dfrac{1}{1 + s\frac{T}{2}}$.