ESERCIZIO

Si consideri il sistema lineare

$$y(k) = -\alpha\, y(k-1) - \alpha\, y(k-2) - \beta\, y(k-3) + u(k-1)$$

Si determinino, se possibile, α e β reali in modo che il sistema abbia solo modi puramente oscillatori.

SOL

Il sistema ha solo modi oscillatori se e solo se tutti gli zeri del polinomio caratteristico sono sulla circonferenza unitaria e sono semplici. In altre parole i modi devono essere del tipo

$$\sin(\theta k),\quad \cos(\theta k),\quad (-1)^k$$

Escludiamo il modo $1^k = 1$ che non è oscillatorio (anche se si potrebbe vedere come oscillazione a frequenza nulla).

Nel nostro caso, il polinomio caratteristico è

$$D(z) := z^3 + \alpha z^2 + \alpha z + \beta$$

che ha 3 zeri (contati con la propria molteplicità). Dunque, devo imporre che questi 3 zeri siano semplici e si trovino in $|z| = 1$ (con l'esclusione di $z = 1$). Poiché gli zeri complessi sono sempre a coppie di valori ~~tra~~ di loro coniugati, devo per forza imporre che -1 sia zero di $D(z)$:

$$D(-1) = -1 + \alpha - \alpha + \beta = 0 \implies \beta = 1$$

Quindi

$$D(z) = z^3 + \alpha z^2 + \alpha z + 1$$
$$= (z+1)\left(z^2 + 1 + (\alpha - 1) z\right)$$

Rimane da imporre che

$$D_1(z) := z^2 + 1 + (\alpha - 1) z$$

abbia una coppia di zeri complessi coniugati di modulo unitario.

Sia $a := \alpha - 1 \Rightarrow D_1(z) = z^2 + az + 1$

Si vede subito che basta imporre $a = 0$ (ossia $\alpha = 1$). In alternativa, si calcolano gli zeri di $D_1(z)$

$$z_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

e si impone che siano complessi coniugati, ossia $a^2 < 4$, cioè

$$-2 < a < 2$$

e che

$$|z_{1/2}|^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 4 - a^2) = 1$$

In conclusione, ogni valore di $a \in (-2, 2)$ risolve il problema. Ossia ogni valore di

$$\alpha \in (-1, 3)$$

risolve il problema.

ESERCIZIO

Si risolva il problema precedente con l'ulteriore vincolo che una delle oscillazioni sia periodica di periodo 6 (e non minore di 6).

SOL.

Devo imporre che i due modi relativi agli zeri complessi di $D(z)$ siano del tipo

$$\cos\left(\frac{2\pi}{6}k\right) \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi}{6}k\right)$$

Ossia gli zeri di $D_1(z)$ devono essere

$$z_{1/2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{6}} = e^{\pm j\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} \pm j\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ma $z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{\sqrt{4-a^2}}{2} \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

ESERCIZIO

Si determini la f. di trasferimento $P_0(s)$ in modo che la f. di trasferimento $P(z)$ ottenuta da $P_0(s)$ per tenuta e campionamento sincroni sia

$$P(z) = \frac{z+3}{(z-3)(z-2)}$$

Il periodo di campionamento è $T = 1$ sec..

SOL.

La f. di trasferimento $P_0(s)$ è del tipo

$$P_0(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Infatti $P_0(s)$ non può avere grado relativo **nullo**.

Devo imporre

$$\begin{cases} e^{s_1 T} = 3 \\ e^{s_2 T} = 2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} s_1 = \ln 3 \\ s_2 = \ln 2 \end{cases}$$

Per determinare α e β impongo

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P_0(s)}{s}\right]\right]\right]$$

$$\frac{P_0(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

con
$$\begin{cases} A = P_0(0) = \dfrac{\beta}{s_1 s_2} \\ B = \dfrac{\alpha s_1 + \beta}{s_1(s_1 - s_2)} \\ C = -A - B \end{cases}$$

Dunque

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[S_T \left[A\, 1(t) + B e^{s_1 t} + C e^{s_2 t} \right]\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[A\, \delta_{-1}(k) + B (e^{s_1 T})^k + C (e^{s_2 T})^k \right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \left[A \frac{z}{z-1} + B \frac{z}{z-3} + C \frac{z}{z-2} \right]$$

$$= A + B \frac{z-1}{z-3} + C \frac{z-1}{z-2}$$

$$= \frac{A(z^2-5z+6) + B(z^2-3z+2) + C(z^2-4z+3)}{(z-3)(z-2)}$$

$$= \frac{\overbrace{(A+B+C)}^{0} z^2 + (-5A-3B-4C) z + 6A+2B+3C}{(z-3)(z-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = -A-B \\ -5A-3B-4C = 1 \\ 6A+2B+3C = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} -5A-3B+4A+4B=1 \\ 6A+2B-3A-3B=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} B-A=1 \\ 3A-B=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} B=A+1 \\ 2A-1=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} B=A+1 \\ A=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} B=3 \\ A=2 \\ C=-5 \end{cases}$$

MA

$$2=A=\beta/S_1S_2 \Rightarrow \beta=2S_1S_2$$

$$3=B=\frac{\alpha S_1+\beta}{S_1(S_1-S_2)} \Rightarrow \alpha=\frac{3(S_1)(S_1-S_2)-\beta}{S_1}$$

$$=3(S_1-S_2)-2S_2$$

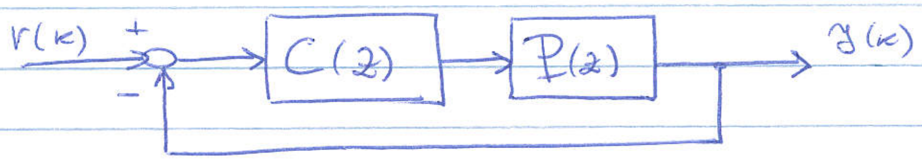
$$=3S_1-5S_2$$

In conclusione

$$P_0(s) = \frac{[3\ln(3) - 5\ln(2)]s + 2\ln(3)\ln(2)}{(s-\ln(3))(s-\ln(2))}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{27}{32}\right)s + 2\ln(3)\ln(2)}{(s-\ln(3))(s-\ln(2))}$$

ESERCIZIO



Sia $P(z) = \dfrac{z}{(2z+1)(4z-1)}$

Si progetti un controllore che garantisce inseguimento asintotico di riferimenti a gradino unitario e introduce un passo di ritardo.

SOL.

Il più semplice $C(z)$ che soddisfa le specifiche è del tipo

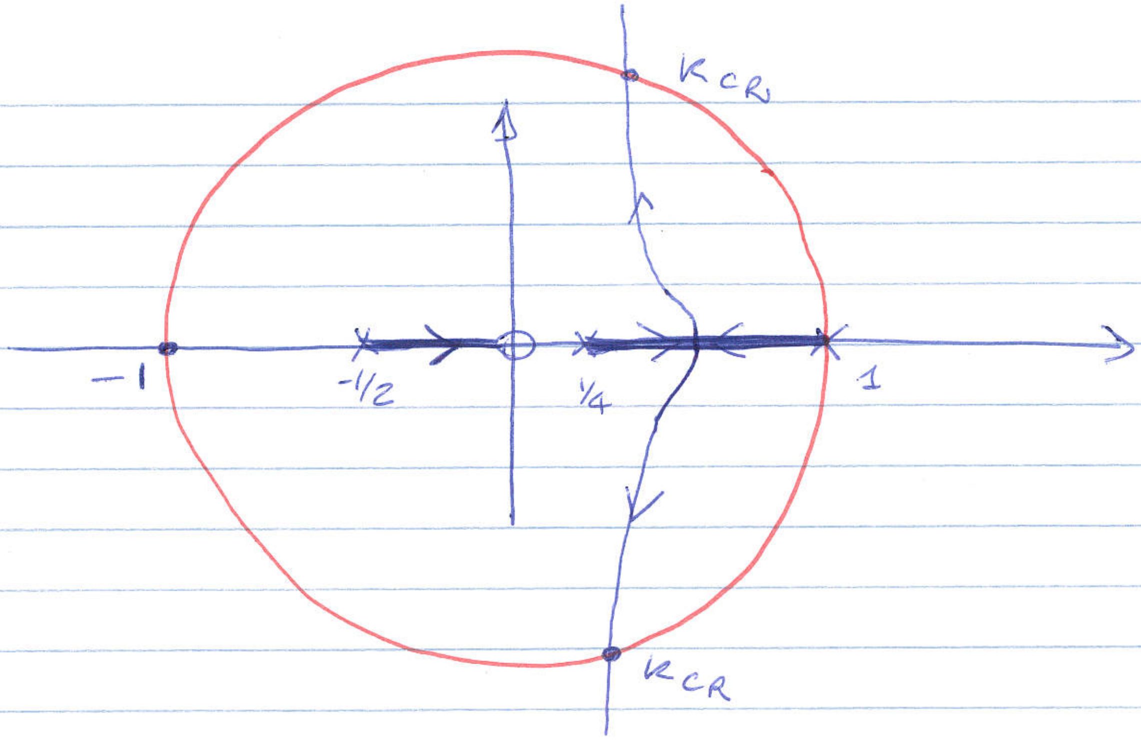
$$C(z) = \frac{K}{z-1}$$

Si tratta solo di verificare che esista

mo valori di k per i quali la catena chiusa è BIBO-stabile e fissare k a uno di tali valori.
Se non esistono valori di k che stabilizzano la catena chiusa devo ~~ri~~ricorrere ad una struttura più ricca di $C(z)$ aggiungendo poli e zeri.
Il denominatore della f. di trasferimento a catena chiusa è

$$D(z) = kz + (z-1)(2z+1)(4z-1)$$
$$= 8z^3 - 6z^2 + (k-3)z + 1$$

Il relativo luogo delle radici è:



Dunque la catena chiusa è BIBO-stabile per $K>0$ sufficientemente piccolo.
Il modo più semplice di fissare un valore di K che risolve il problema è scegliere un valore (per es $K=1$) e verificare se la catena chiusa è BIBO-stabile in corrispondenza a tale valore. Se non lo è si diminuisce K fino a che si trova un valore che stabilizza la catena chiusa.

Alternativamente, possiamo essere interessati a calcolare tutti i valori di K che stabilizzano: $K \in (0, K_{CR})$. Dobbiamo cioè calcolare K_{CR}. A questo scopo usiamo la trasformazione bilineare e definiamo

$$D_1(s) = D(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}$$

$$= 8\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 6\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + (K-3)\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + 1$$

$$= \frac{(10+K)s^3 + (36-K)s^2 + (18-K)s + K}{(1-s)^3}$$

Dobbiamo calcolare per quali valori di K il numeratore di $D_1(s)$ è hurwitziano.

Con la tabella di Routh otteniamo:

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 10+k & 18-k \\
2 & 36-k & k \\
1 & \alpha & \\
0 & k &
\end{array}
$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{36-k}\left[10k+k^2-(18-k)(36-k)\right]$$

$$= \frac{648-64k}{36-k}$$

Dunque, la catena chiusa è BIBO-stabile se e solo se $k>0$ e

$$\begin{cases} 36-k>0 \\ 648-64k>0 \end{cases}$$

ossia

$$\frac{81}{8}=\frac{648}{64}>k>0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{CR}=\frac{81}{8}}$$

In conclusione, ogni valore di $K \in (0, 81/8)$ risolve il problema

ADDENDUM Si dica se la soluzione trovata al punto precedente garantisce stabilità interna dell'interconnessione.

SOL

L'interconnessione è internamente stabile se e solo se

1. $D(z) := (z-1)(2z+1)(4z-1) + Kz$ è di Schur
2. $\deg D(z) = \deg[(z-1)(2z+1)(4z-1)] = 3$

La seconda condizione è ovviamente soddisfatta $\forall K \in \mathbb{R}$. La condizione 1. è soddisfatta $\forall K \in (0, 81/8)$ come si vede dal luogo delle radici analizzato in precedenza. Pertanto, la sol. al problema precedente garantisce stabilità interna dell'interconnessione.