Esercizi sulla scelta del periodo di campionamento

Esercizio 1.

Si calcoli la minima frequenza di campionamento Ω per l'implementazione digitale di un sistema di controllo in modo tale che il sistema a catena chiusa abbia un tempo di salita $t_r = 1/3$ secondi e insegua con errore asintotico nullo un riferimento sinusoidale continuo $r(t) = A\sin(\theta t + \phi)$ con $A > 0$, $\phi = \pi/4$ e $\theta = 100$ rad/secondo. Si vuole anche che sia possibile ricostruire esattamente il segnale $r(t)$ a partire dai suoi campioni.

Soluzione. Si deve imporre

$$T \leq t_r/10$$

per far sì che il tempo di campionamento sia piccolo rispetto al tempo di salita, e

$$\Omega \geq 2\theta$$

per far sì che che sia possibile ricostruire esattamente il segnale $r(t)$ a partire dai suoi campioni. Dalla prima specifica, si ottiene,

$$\Omega \geq \frac{20\pi}{t_r} \simeq 190 \;\; \text{rad/secondo.}$$

Dalla seconda specifica, si ottiene,

$$\Omega \geq 200 \;\; \text{rad/secondo.}$$

Pertanto il minimo valore della frequenza di campionamento Ω è proprio 200 rad/secondo.

Esercizio 2.

Si calcoli la minima frequenza di campionamento Ω per l'implementazione digitale di un sistema di controllo in catena chiusa che includa:

1. Un filtro anti-aliasing di *Butterworth* del secondo ordine con smorzamento $\xi = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e attenuazione $a = 10$.

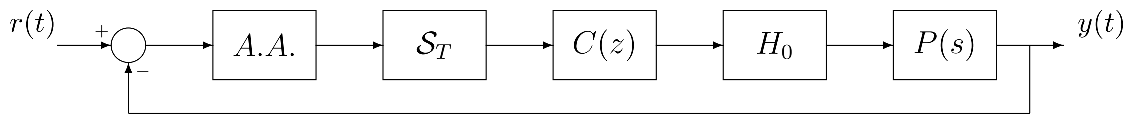
2. Il controllore analogico da digitalizzare progettato in maniera che il margine di fase della catena di azione diretta sia $m_\varphi = \pi/4$ ad $\omega_a = \pi$ rad/secondo.

3. Un interpolatore di ordine zero.

Il minimo margine di fase complessivo tollerabile è $m_\varphi^* = \pi/8$

Soluzione.

Lo schema a blocchi è:



Il controllore di funzione di trasferimento $C(z)$ è ottenuto digitalizzando un controllore di funzione di trasferimento $C_c(s)$ progettato in modo tale che la pulsazione di attraversamento di $G(s) := C_c(s)P(s)$ sia pari a $\omega_a := \pi$ rad/s. Inoltre, il relativo margine di fase è pari a $m_\varphi := \pi/4$. Poiché il margine di fase tollerabile è pari a $m_\varphi^* := \pi/8$, posso imporre che il ritardo di fase complessivamente introdotto dall'interpolatore e dal filtro anti-aliasing $A.A.$, sia pari a $m_\varphi - m_\varphi^* = \pi/4 - \pi/8 = \pi/8$. Ossia, $\varphi_{H_0} + \varphi_M = \pi/8$, o equivalentemente

$$\varphi_M = \pi/8 - \varphi_{H_0},$$

dove $\varphi_{H_0} = \frac{T}{2}\omega_a = \pi T/2$ rad è il ritardo di fase introdotto dall'interpolatore alla pulsazione di attraversamento $\omega_a = \pi$ rad/s (infatti, possiamo approssimare l'interpolatore con un ritardo pari a $T/2$ secondi), e φ_M è il ritardo introdotto dal filtro $A.A.$. Dalla teoria sappiamo che il ritardo φ_M introdotto dal filtro $A.A.$ è legato alla pulsazione di campionamento dalla relazione approssimata

$$\frac{2\pi}{T} = \Omega = 4\xi\sqrt{a}\frac{\omega_a}{\varphi_M}$$

ossia, sostituendo i valori dei parametri e l'espressione imposta di $\varphi_M = \pi/8 - \varphi_{H_0} = \pi/8 - \pi T/2$, si ha

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 4\frac{\pi}{\pi/8 - \pi T/2} = \frac{4}{1/8 - T/2}$$

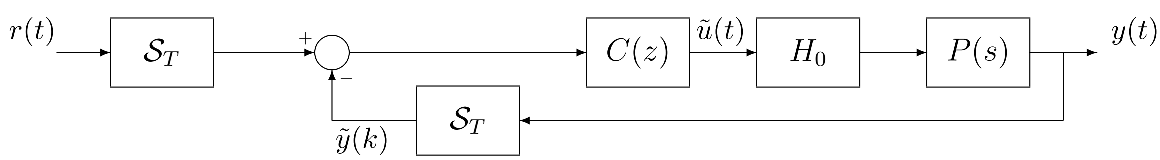
da cui $T/\pi = 1/16 - T/4$ o anche $T(1/\pi + 1/4) = 1/16$ e, infine,

$$T = \frac{1/16}{1/\pi + 1/4} = \frac{\pi}{16 + 4\pi} \simeq 0.1 \quad \text{secondi}$$

ossia

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 16 \cdot 2\pi(1/\pi + 1/4) = 32 + 8\pi \simeq 57 \quad \text{rad/secondo}$$

Esercizio 3. Si consideri lo schema



dove $P(s)$ è una funzione di trasferimento a tempo continuo strettamente propria.

Si calcoli il massimo valore del periodo di campionamento T in modo che un controllore digitale su microprocessore con tempo di calcolo dell'algoritmo di controllo pari a $T_c := 10^{-4}$ secondi, produca, nel caso peggiore, un ritardo t_d nella risposta al gradino campionata $\tilde{y}(k)$ non superiore a 10^{-3} secondi.

Soluzione. Il caso peggiore corrisponde alla situazione in cui il gradino del riferimento continuo inizia immediatamente dopo un istante di campionamento ossia è del tipo

$$r(t) = 1(t - k_0 T - \varepsilon)$$

con k_0 numero naturale e ε positivo ma piccolo. In tal caso, il primo campione $\tilde{r}(k)$ non nullo è quello corrispondente a $k = k_0 + 1$. Dato che il tempo di calcolo è finito e non nullo, il primo campione $\tilde{u}(k)$ non nullo è quello corrispondente a $k = k_0 + 2$. Poiché $P(s)$ è strettamente propria, l'uscita a tempo continuo $y(k_0+2)$ è nulla e quindi il primo campione di $\tilde{y}(k)$ non nullo è quello corrispondente a $k = k_0+3$. In conclusione, il controllore digitale su microprocessore produce, nel caso peggiore, un ritardo t_d arbitrariamente vicino a $3T$. Dunque devo imporre $3T \leq 10^{-3}$ secondi ossia $T \leq \frac{1}{3}10^{-3}$ secondi. Poichè $\frac{1}{3}10^{-3} > T_c$, tale soluzione è accettabile. Dunque, il valore di T cercato è proprio

$$T = \frac{1}{3}10^{-3} \ \text{ secondi.}$$