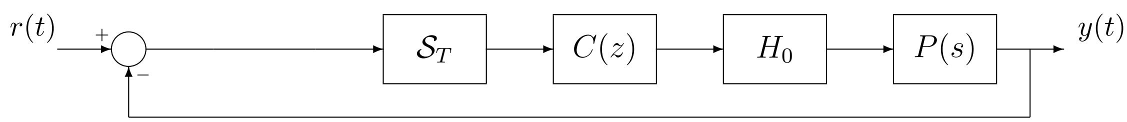
Progetto di reti correttrici e controllori PID e traduzione nel discreto con il metodo di emulazione

Esercizio 1. Si consideri lo schema di controllo rappresentato in figura dove $P(s) = \frac{a}{1+s}$ con $a = 40$.



Si determini la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore ottenuto discretizzando con il metodo di Eulero all'indietro una rete elementare in modo che il sistema a catena chiusa abbia $t_r = 0.1$ secondi e $m_p = 1/40$; si scelga opportunamente il valore T del periodo di campionamento.

Soluzione. Come prima cosa scegliamo T. In mancanza di altre specifiche possiamo prendere

$$T = t_r/10 = 0.01 \quad \text{secondi.}$$

Ora traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sulla pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* e sul margine di fase desiderato m_φ^*:

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8m_p = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.02 = 1.02 \ \ \text{rad},$$

$$\omega_a^* = 2/t_r = 20 \quad \text{rad/s.}$$

Consideriamo ora $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}} P(s)$ e calcoliamo modulo M e fase φ del controllore alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_0(j\omega_a^*)|} = \frac{\sqrt{(\omega_a^*)^2 + 1}}{40} = 0.5,$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \text{Arg}[P_0(j\omega_a^*)] = 1.02 - \pi - (-\omega_a^* T/2 - \text{arctg}(\omega_a^*)) = 1.02 - \pi + \frac{1}{10} + 1.52 = -0.5.$$

L'angolo φ è negativo pertanto posso permettermi di ritardare; inoltre, $M < 1$ e quindi devo attenuare: devo quindi usare una rete attenuatrice. La funzione di trasferimento della rete ha dunque la struttura

$$C_{att}(s) = \frac{1 + \alpha s \tau}{1 + s\tau}$$

dove, utilizzando le note formule, si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M\ (\cos\varphi - M)}{1 - M\ \cos\varphi} = 0.34, \\ \tau &= \frac{1}{\omega_a^*}\sqrt{\frac{1 - M^2}{M^2 - \alpha^2}} = 0.12. \end{aligned}$$

In conclusione,

$$C_{att}(s) = \frac{1 + 0.04s}{1 + 0.12s}$$

Rimane ora da tradurre il controllore nel discreto con l'approssimazione di Eulero all'indietro, ossia sostituendo ad s l'espressione $\frac{z-1}{Tz}$:

$$C(z) = \left.\frac{1 + \alpha s\tau}{1 + s\tau}\right|_{s = \frac{z-1}{Tz}} = \frac{5z - 4}{13z - 12}.$$

Esercizio 2. Si consideri lo schema di controllo descritto nell'escizio precedente con gli stessi dati e le stesse specifiche sul comportamento del transitorio del sistema a catena chiusa. Si determini (se possibile) la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore ottenuto per discretizzazione con il metodo di Tustin di un controllore standard che garantisce che a catena chiusa si abbia inseguimento asintotico perfetto di segnali a gradino.

Soluzione.

Come prima fissiamo

$$T = t_r/10 = 0.01 \quad \text{secondi}$$

e traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sulla pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* e sul margine di fase desiderato m_φ^*:

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8m_p = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.02 = 1.02 \ \ \text{rad},$$

$$\omega_a^* = 2/t_r = 20 \quad \text{rad/s}.$$

Ripetendo ancora i ragionamenti di prima, consideriamo $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}} P(s)$ e calcoliamo modulo M e fase φ di $C(s)$ alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_0(j\omega_a^*)|} = \frac{\sqrt{(\omega_a^*)^2 + 1}}{40} = 0.5,$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \text{Arg}[P_0(j\omega_a^*)] = 1.02 - \pi - (-\omega_a^* T/2 - \text{arctg}(\omega_a^*)) = 1.02 - \pi + \frac{1}{10} + 1.52 = -0.5.$$

Dobbiamo determinare la funzione di trasferimento $C(s)$ di un controllore in modo tale che (come prima)

$$C(j\omega_a^*) = Me^{j\varphi}.$$

Questa volta, però la funzione di trasferimento $C(s)$ deve essere di un controllore standard (PID) e garantire inseguimento asintotico di riferimenti a gradino; dunque $P(s)$ deve contenere un'azione integrale. L'angolo φ è negativo pertanto posso utilizzare una funzione di trasferimento di tipo PI che ha tutte le caratteristiche richieste:

$$C_{PI}(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{sT_I}\right].$$

Si tratta di determinare K_P e T_I in modo che

$$C_{PI}(j\omega_a^*) = Me^{j\varphi}$$

da cui segue

$$K_P = M\cos(\varphi) = 0.44$$

e

$$T_I = -\frac{1}{\omega_a^* \tan(\varphi)} = 0.09.$$

In conclusione,

$$C_{PI}(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{sT_I}\right] = 0.44 \left[1 + \frac{1}{0.09s}\right]$$

Rimane ora da tradurre il controllore nel discreto con l'approssimazione di Tustin, ossia sostituendo ad s l'espressione $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 200\frac{z-1}{z+1}$:

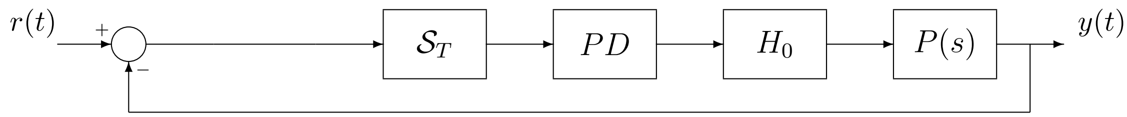
$$C(z) = K_P \left[1 + \frac{1}{sT_I}\right]\Bigg|_{s=200\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.46z - 0.42}{z - 1}.$$

Esercizio 3. Si consideri lo schema di controllo rappresentato in figura dove

$$P(s) = K\frac{1+as}{(1+bs)(1+cs)}$$

con

$$K = 6,\ a = 0.02,\ b = 0.4,\ c = 0.35.$$



Si progetti la funzione di trasferimento di un controllore PD discreto in modo che il sistema a catena chiusa sia stabile e abbia caratteristiche dinamiche simili a quelle di un sistema a tempo continuo con poli dominanti in

$$\mathscr{A} := \left\{ s \in \mathbb{C} :\ |s| \geq 5,\ \left|\frac{\mathbb{R}e(s)}{\mathbb{I}m(s)}\right| \geq \sqrt{3} \right\}.$$

Si confrontino i due controllori PD ottenuti discretizzando con il metodo di Eulero in avanti e con il metodo MPZ.

Soluzione. Scegliamo ora i poli dominanti ai limiti della regione ammissibile (seguendo il principio ingegneristico che prescrive di non imporre specifiche più spinte di quanto non venga richiesto dal problema), cioè imponiamo:

$$\omega_n = 5$$

e

$$\varphi = \text{arctg}\left[\left|\frac{\mathbb{I}m(s)}{\mathbb{R}e(s)}\right|\right] = \text{arctg}\left[1/\sqrt{3}\right] = \pi/6.$$

da cui si ricava l'attenuazione

$$\xi := \cos(\varphi) = \sqrt{3}/2.$$

Le corrispondenti specifiche nel dominio del tempo sono un tempo di salita

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} = 0.36$$

e una massima sovraelongazione

$$m_p = \exp\left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] = 0.004$$

Pertanto, possiamo cercare di progettare il controllore in modo da avere

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8 m_p = 1.036 \;\; \text{rad},$$

$$\omega_a^* = 2/t_r = 5.56 \quad \text{rad/s}.$$

Scegliamo ora il periodo di campionamento T. In mancanza di altre specifiche possiamo prendere

$$T = t_r/10 = 0.036 \quad \text{secondi}.$$

Consideriamo ora $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}} P(s)$ e calcoliamo modulo M e fase φ del controllore (a tempo continuo) alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_0(j\omega_a^*)|} = 0.88,$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \operatorname{Arg}[P_0(j\omega_a^*)] = 0.13 \;\; \text{rad}.$$

L'angolo φ è positivo pertanto devo anticipare e quindi un controllore di tipo PD è adatto allo scopo. Osserviamo inoltre che per la fisica realizzabilità del controllore PD, dovremo certamente aggiungere un polo remoto che introdurrà un ulteriore piccolo ritardo. Per compensare questo ritardo progettiamo il PD in modo da produrre un ulteriore anticipo di $\delta\varphi = 0.1$ rad alla pulsazione di attraversamento, ossia progettiamo il PID in modo da anticipare di

$$\varphi_0 = \varphi + \delta\varphi = 0.23 \;\; \text{rad}$$

alla pulsazione ω_a^*. Si avrà dunque

$$C_{PD}(s) = K_P[1 + sT_D]$$

dove K_P e T_D devono essere fissati in modo da soddisfare

$$C_{PD}(j\omega_a^*) = Me^{j\varphi_0},$$

ossia

$$K_P = M\cos(\varphi_0) = 0.86$$

e

$$T_D = \frac{\tan(\varphi_0)}{\omega_a^*} = 0.042$$

Per la fisica realizzabilità aggiungiamo un polo remoto e consideriamo il controllore

$$C_{PD}(s) = K_P \frac{1 + sT_D}{1 + sT_L}$$

con $T_L = T_D/5 = 0.0084$.

Rimane ora da tradurre il controllore nel discreto. Come richiesto, utilizziamo le due approssimazioni di Eulero in avanti e MPZ. Discretizzando con il metodo di Eulero in avanti, ossia sostituendo ad s l'espressione $(z-1)/T$, otteniamo

$$C_{PD}^{[EA]}(z) = K_P \frac{1 + (z-1)T_D/T}{1 + (z-1)T_L/T} = \frac{z - 0.14}{0.23z + 0.77}.$$

Per discretizzare con il metodo MPZ scriviamo la funzione di trasferimento $C_{PD}(s)$ mettendo in evidenza zeri poli e guadagno:

$$C_{PD}(s) = K \frac{s + z_0}{s + p}$$

con $z_0 = 1/T_D = 24$, $p = 1/T_L = 120$ e $K = \frac{K_P T_D}{T_L} = 4.3$. Possiamo ora procedere alla discretizzazione ottenendo

$$C_{PD}^{[MPZ]}(z) = K_D \frac{z - z_1}{z - p_1}$$

con

$$z_1 = e^{-z_0 T} = 0.42, \quad p_1 = e^{-pT} = 0.013, \quad K_D = K \frac{z_0}{p} \frac{1 - p_1}{1 - z_1} = K_P \frac{1 - p_1}{1 - z_1} = 1.47$$

In conclusione:

$$C_{PD}^{[MPZ]}(z) = 1.47 \frac{z - 0.42}{z - 0.013}$$

Per vedere come vanno questi due controllori, consideriamo i relativi sistemi a catena chiusa. A questo scopo calcoliamo dapprima la funzione di trasferimento a tempo discreto $\tilde{P}(z)$ ottenuta per tenuta e campionamento da $P(s)$:

$$\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z} \mathscr{Z} \left[\mathscr{S}_T \left[\mathscr{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \right] \right]$$

Si può decomporre $P(s)/s$ in frazioni parziali ottenendo

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{b}} + \frac{C}{s + \frac{1}{c}}$$

dove

$$A = P(0) = 6$$

$$B = \lim_{s \to -\frac{1}{b}} \left(s + \frac{1}{b} \right) \frac{P(s)}{s} = -45.6$$
$$C = \lim_{s \to -\frac{1}{c}} \left(s + \frac{1}{c} \right) \frac{P(s)}{s} = 39.6.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z} \left[\mathscr{S}_T \left[\mathscr{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{b}} + \frac{C}{s+\frac{1}{c}} \right] \right] \right] \\
&= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z} \left[\mathscr{S}_T \left[A \; 1(t) + B \; e^{-t/b} + C \; e^{-t/c} \right] \right] \\
&= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z} \left[A \; \delta_{-1}(k) + B \; (e^{-T/b})^k + C \; (e^{-T/c})^k \right] \\
&= \frac{z-1}{z} \left[A \frac{z}{z-1} + B \frac{z}{z-p_b} + C \frac{z}{z-p_c} \right] \\
&= A + B \frac{z-1}{z-p_b} + C \frac{z-1}{z-p_c},
\end{aligned}$$

dove

$$p_b = e^{-T/b} := 0.91, \quad p_c = e^{-T/c} := 0.9.$$

A questo punto, posso valutare il comportamento del sistema discreto equivalente a catena chiusa in corrispondenza ai due controllori calcolati, supponendo che il sistema da controllare sia discreto e abbia funzione di trasferimento pari a $\tilde{P}(z)$.

Calcolo dunque le due funzioni di trasferimento a catena chiusa che sono:

$$W_{EA}(z) = \frac{\tilde{P}(z) C_{PD}^{[EA]}(z)}{1 + \tilde{P}(z) C_{PD}^{[EA]}(z)}$$

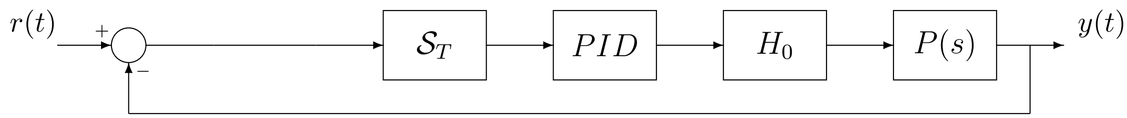
e

$$W_{MPZ}(z) = \frac{\tilde{P}(z) C_{PD}^{[MPZ]}(z)}{1 + \tilde{P}(z) C_{PD}^{[MPZ]}(z)}.$$

Inoltre, possiamo simulare (per esempio con Matlab) le relative risposte al gradino per vedere se il comportamento è del tipo desiderato. Si trova che il controllore discretizzato con il metodo MPZ stabilizza il sistema a catena chiusa e il relativo tempo di salita è adeguato alle richieste di progetto, mentre m_p è più elevato di 0.004 (ma potrebbe essere ancora accettabile visto che era richiesta una dinamica "simile" a quella di un sistema con poli dominanti in una regione assegnata).

Invece, il controllore discretizzato con il metodo di Eulero in avanti non stabilizza nemmeno il sistema a catena chiusa e quindi è certamente da scartare.

Esercizio 4. Si consideri lo schema di controllo rappresentato in figura.



Si progetti la funzione di trasferimento di un controllore PID discreto utilizzando il metodo di emulazione di un PID continuo sviluppato con le tecniche basate sul margine di fase. Le specifiche che vengono imposte sono le seguenti:
1. si desidera che il sistema abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a^* = 10$ rad/s e che il margine di fase sia di 1 rad
2. Per avere un comportamento adeguato nell'errore a regime della risposta alla rampa, il guadagno integrale K_I del controllore (a tempo continuo) è fissato e pari a 1.

Il tempo di campionamento è fissato a $T = 0.01$ secondi ed è noto che $P(j\omega_a^*) = 20e^{-j\pi/4}$.

Si discretizzi con il metodo di Eulero all'indietro.

Soluzione. Come prima cosa, incorporiamo il ritardo dovuto all'holder H_0 e consideriamo $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}}P(s)$. Chiaramente, $P_0(j\omega)$ ha lo stesso modulo di $P(j\omega)$ a tutte le pulsazioni e, in particolare, alla pulsazione di attraversamento ω_a^*; inoltre, l'argomento di $P_0(j\omega)$ è ritardato di $\frac{\omega T}{2}$ rispetto all'argomento di $P(j\omega)$. Dunque si ha

$$P(j\omega_a^*) = 20e^{-j(\pi/4+\frac{\omega T}{2})} = 20e^{-j(\pi/4+0.05)}.$$

Scriviamo la funzione di trasferimento del PID continuo nella forma

$$C_{PID-c}(s) = \frac{K_I}{s}[1 + T_I s + T_I T_D s^2]$$

e ricordiamo che $K_I = 1$ è fissato. Possiamo dunque incorporare anche la parte $\frac{K_I}{s}$ del controllore nel processo da controllare e considerare la funzione di trasferimento ausiliaria

$$P_1(s) := \frac{K_I}{s}P_0(s) = \frac{K_I}{s}e^{-\frac{sT}{2}}P(s).$$

Calcoliamo ora modulo M e fase φ della parte rimanente del controllore (a tempo continuo) ossia di $[1 + T_I s + T_I T_D s^2]$ alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_1(j\omega_a^*)|} = 10/20 = 1/2,$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \mathrm{Arg}[P_1(j\omega_a^*)] = 0.265 \text{ rad.}$$

L'angolo φ è positivo pertanto devo anticipare. Osserviamo inoltre che per la fisica realizzabilità del controllore PID, dovremo certamente aggiungere un polo remoto che introdurrà un ulteriore piccolo ritardo. Per compensare questo ritardo progettiamo il PID in modo da produrre un ulteriore anticipo di $\delta\varphi = 0.1$ rad alla pulsazione di attraversamento, ossia in modo da anticipare di

$$\varphi_0 = \varphi + \delta\varphi = 0.365 \text{ rad}$$

alla pulsazione ω_a^*.

Possiamo quindi imporre

$$1 + T_I j\omega_a^* - T_I T_D(\omega_a^*)^2 = Me^{j\varphi_0} = M\cos(\varphi_0) + Mj\sin(\varphi_0)$$

da cui otteniamo

$$T_I = \frac{M\sin(\varphi_0)}{\omega_a^*} = 0.018$$

e

$$T_D = \frac{1 - M\cos(\varphi_0)}{\omega_a^* M\sin(\varphi_0)} = 0.3$$

Scrivo dunque la funzione di trasferimento del controllore PID a tempo continuo nella forma

$$C_{PID-c}(s) = K_P[1 + \frac{1}{T_I s} + sT_D]$$

con $K_P = K_I T_I = T_I$, e aggiungo il polo remoto in $T_L = T_D/20 = 0.015$ ottenendo la funzione di trasferimento propria

$$C_{PID-Pr}(s) = K_P[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{sT_D}{1 + sT_L}]$$

che è pronta per essere discretizzata con il metodo di Eulero all'indietro ottenendo il controllore discreto: la funzione di trasferimento del controllore discreto si ottiene dalla $C_{PID-Pr}(s)$ sostituendo ad s l'espressione $(z-1)/(zT)$, ossia

$$C_{PID}(z) = K_P[1 + \frac{1}{T_I(z-1)/(zT)} + \frac{[(z-1)/(zT)]T_D}{1 + [(z-1)/(zT)]T_L}].$$

Esercizio 5. Si consideri un sistema da controllare di funzione di trasferimento

$$P(s) := \frac{K}{(s+a)^3}, \quad a = 50, \quad K = 125000.$$

Si progetti un controllore digitale ottenuto per emulazione di un controllore standard con l'approssimazione di Eulero all'indietro. Si richiede che il sistema a catena chiusa abbia tempo di salita $t_r = 0.1$ secondi e sovraelongazione massima non superiore al 5%. Inoltre, si vuole che che il sistema a catena chiusa abbia errore asintotico nullo in risposta ad un riferimento a gradino e insegua la rampa con errore asintotico non superiore a 0.1.

Soluzione.

Come prima cosa fissiamo il periodo di campionamento; in assenza di altre specifiche, possiamo porre

$$T = t_r/10 = 0.01 \quad \text{secondi.}$$

Traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sulla pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* e sul margine di fase desiderato m_φ^*:

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8m_p = 1.04 - 0.8 \cdot 0.05 = 1.04 - 0.04 = 1 \ \text{ rad,}$$

$$\omega_a^* = 2/t_r = 20 \quad \text{rad/s.}$$

Scriviamo ora la funzione di trasferimento del PID continuo nella forma

$$C_{PID-c}(s) = \frac{K_I}{s}[1 + T_I s + T_I T_D s^2].$$

La costante K_I va fissata in modo che il sistema a catena chiusa insegua la rampa con errore asintotico non superiore a 0.1, da cui si ottiene

$$\frac{1}{K_I P(0)} \leq 0.1$$

e, tenuto conto del fatto che $P(0) = 1$, ciò significa $K_I \geq 10$. Fissiamo dunque

$$K_I = 10.$$

Per tenere conto dell'effetto dell'holder, incorporiamo un ritardo pari a $T/2$ nel sistema da controllare e consideriamo la funzione di trasferimento ausiliaria $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}} P(s)$. Possiamo incorporare anche la parte $\frac{K_I}{s}$ del controllore nel processo da controllare e considerare la funzione di trasferimento ausiliaria

$$P_1(s) := \frac{K_I}{s} P_0(s) = \frac{K_I}{s} e^{-\frac{sT}{2}} P(s).$$

Calcoliamo ora modulo M e fase φ della parte rimante del controllore (a tempo continuo) ossia di $[1 + T_I s + T_I T_D s^2]$ alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_1(j\omega_a^*)|} = 2.5,$$
$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \mathrm{Arg}[P_1(j\omega_a^*)] = 0.67 \ \ \mathrm{rad}.$$

La condizione di positività della costante di tempo derivativa T_D ossia

$$M < \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

non è verificata. Tuttavia, tale condizione non è limitativa: basta aumentare il margine di fase, e quindi l'anticipo φ, per soddisfarla. In particolare, possiamo scegliere di anticipare di un angolo

$$\varphi_0 := \arccos[1/M] = 1.16 > \varphi.$$

In tal modo la costante di tempo derivativa T_D data dalla formula

$$T_D = \frac{1}{\omega_a^*}\frac{1 - M\cos(\varphi_0)}{M\sin(\varphi_0)}$$

risulta nulla e quindi ci risulta un controllore PI e non dobbiamo preoccuparci di aggiungere un polo remoto. Con questa scelta si ottiene un margine di fase pari a

$$m_{\varphi 0}^* = \pi + \mathrm{Arg}[P_1(j\omega_a^*)] + \varphi_0 = 1.49$$

maggiore del minimo richiesto ossia $m_\varphi^* = 1$.

La costante di tempo integrale T_I è data da

$$T_I = \frac{1}{\omega_a^*} M \sin(\varphi_0) = 0.11.$$

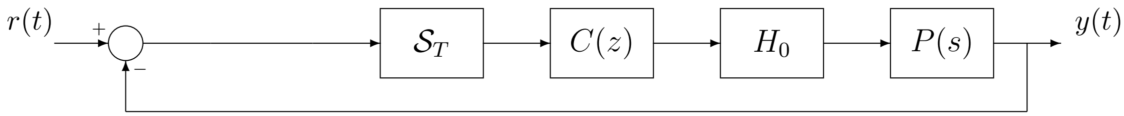
In conclusione, la funzione di trasferimento del controllore continuo è

$$C_{PI}(s) = \frac{K_I}{s}\left[1 + sT_I\right] = \frac{10}{s}\left[1 + 0.11s\right].$$

Rimane ora da tradurre il controllore nel discreto con l'approssimazione di Eulero all'indietro, ossia sostituendo ad s l'espressione $\frac{z-1}{Tz} = \frac{z-1}{0.01z}$:

$$C(z) = \left.\frac{10}{s}\left[1 + 0.11s\right]\right|_{s=\frac{z-1}{0.01z}} = \frac{1.2z - 1.1}{z - 1}.$$

Come ultima verifica, possiamo considerare il consueto sistema a catena chiusa

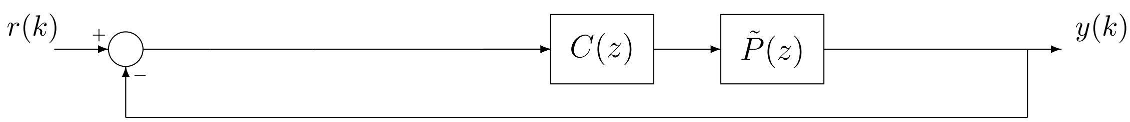


con il controllore di funzione di trasferimento $C(z)$ appena calcolata per vedere se le specifiche sono rispettate.

Discretizzando $P(s)$ si ottiene

$$\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right] = \frac{0.014z^2+0.04z+0.0068}{(z-0.6)^3}$$

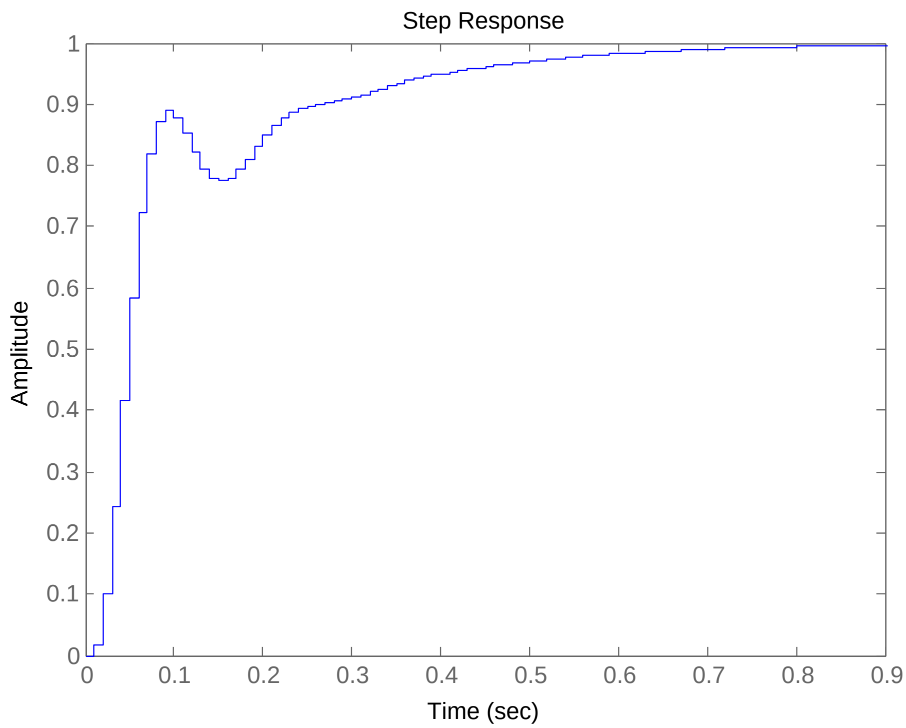
Il corrispondente sistema di controllo discreto è dato dallo schema



la cui funzione di trasferimento a catena chiusa è

$$W(z) = \frac{C(z)\tilde{P}(z)}{1+C(z)\tilde{P}(z)}.$$

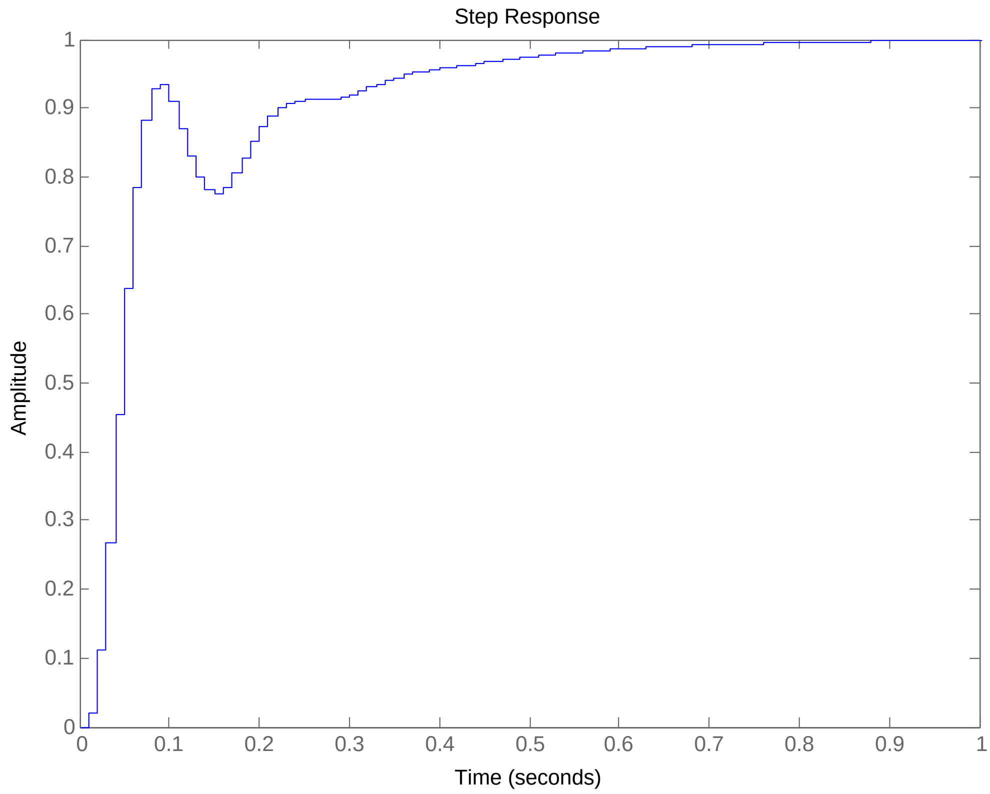
La corrispondente risposta al gradino è riportata in figura. Come si vede, le specifiche sono quasi rispettate. Infatti, vi è assenza di sovraelongazione e quindi da questo punto di vista le prestazioni sono migliori rispetto alle specifiche che richiedono una sovrelongazione massima del 5%. Riguardo al tempo di salita, il picco è leggerissimamente inferiore al 90% del valore di regime e così, a rigore, il tempo di salita risulta artificialmente lungo e, in particolare maggiore di quanto imposto dalle specifiche.



Per ovviare a questo problema possiamo aumentare leggermente il guadagno del controllore in modo da rendere un po' più pronto il sistema. L'effetto collaterale di questa operazione è quello di aumentare la sovraelongazione, ma in questo caso il problema non si pone (purché l'aumento del guadagno sia moderato) in quanto la risposta al gradino non presenta sovraelongazione. Consideriamo dunque un nuovo controllore i cui il guadagno è aumentato del 10%. La corrispondente funzione di trasferimento è

$$C(z) = 1.1\frac{1.2z - 1.1}{z - 1}.$$

Il comportamento della risposta al gradino a catena chiusa è illustrato in figura e, come si vede, rispetta le specifiche assegnate.


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1