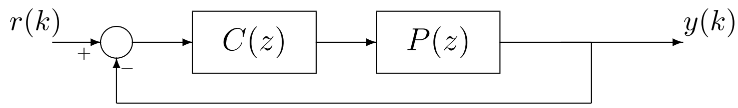
Esercizi sulla sintesi diretta

Esercizio 1. Si consideri l'interconnessione



dove la funzione di trasferimento discreta $P(z)$ è

$$P(z) = \frac{K_p(1+bz)}{(1+az)z},$$

con $a \in [0,2]$ e $b \in [0,3/2]$ e $K_p \neq 0$.

1. Si determini un controllore $C(z) = C_1(z)$ in modo che la funzione di trasferimento a catena chiusa sia

$$W(z) = K_w \frac{1}{z}.$$

Si discuta, al variare di a e b negli intervalli specificati, quando l'interconnessione è internamente stabile e quando il controllore è fisicamente realizzabile.

2. Si dica se l'interconnessione con $C(z) = C_1(z)$ calcolato al punto precedente è dead-beat per l'inseguimento di gradini.

3. Si dica se l'interconnessione con $C(z) = C_1(z)$ calcolato al punto 1. è dead-beat per l'inseguimento di rampe.

4. Si calcoli N affinché il controllore $C(z) = C_2(z)$ che realizza la funzione di trasferimento a catena chiusa

$$W_2(z) = \frac{1}{z^N}$$

introduca un passo di ritardo.

Soluzione.

1. Si ha

$$C_1(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1-W(z)} = \frac{(1+az)z}{K_p(1+bz)} \frac{K_w\frac{1}{z}}{1-K_w\frac{1}{z}} = \frac{K_w(1+az)z}{K_p(1+bz)(z-K_w)}.$$

Poiché $W(z)$ non ha zeri, per l'interna stabilità dell'interconnessione è necessario che gli eventuali zeri di $P(z)$ abbiano modulo minore di 1. Perciò, o $b = 0$ (caso di assenza di zeri di $P(z)$) oppure lo zero di $P(z)$ che si trova in $-1/b$ deve avere modulo minore di 1: $|1/b| < 1$ ossia $b > 1$. Dunque, i valori di b compatibili con l'interna stabilità dell'interconnessione sono $\{0\} \cup (1, 3/2]$.

Consideriamo ora i poli di $P(z)$ e gli zeri di $D_w(z) - N_w(z) = z - K_w$. Per l'interna stabilità dell'interconnessione è necessario che l'eventuale polo "instabile" di $P(z)$ sia zero di $D_w(z) - N_w(z) = z - K_w$. Dunque, i valori di a compatibili con l'interna stabilità dell'interconnessione sono $a = 0$ (caso in cui $P(z)$ ha solo il polo in zero), $a \in (1, 2]$ (caso in cui oltre al polo nell'origine c'è un secondo polo "stabile" in $-1/a$) e $-1/a = K_w$ (caso in cui il polo non nullo di $P(z)$ è zero di $D_w(z) - N_w(z) = z - K_w$).

In conclusione, l'interconnessione è internamente stabile se e solo se

$$b \in \{0\} \cup (1, 3/2] \quad \text{e} \quad a \in \{0\} \cup (1, 2] \cup \{-1/K_w\}.$$

Riguardo alla fisica realizzabilità, poiché $W(z)$ ha grado relativo 1, $C_1(z)$ è fisicamente realizzabile se e solo se il grado relativo di $P(z)$ è non superiore a 1.

In particolare,
a. se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 1 e $C_1(z)$ è fisicamente realizzabile ed anzi ha grado relativo nullo.
b. se $a = b = 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 1 e $C_1(z)$ è fisicamente realizzabile ed anzi ha grado relativo nullo.
c. se $a = 0$ e $b \neq 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 0 e $C_1(z)$ è fisicamente realizzabile ed anzi ha grado relativo pari ad 1, ossia introduce un passo di ritardo.
d. se $a \neq 0$ e $b = 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 2 e $C_1(z)$ NON è fisicamente realizzabile.

2. Rispondiamo prima in modo formale alla domanda. La funzione di trasferimento $W(z)$ ha solo un polo nell'origine pertanto la sua dinamica è di tipo *dead-beat* e quindi l'interconnessione con $C(z) = C_1(z)$ calcolato al punto precedente è dead-beat per l'inseguimento di gradini se e solo se il sistema a catena chiusa insegue con errore asintotico nullo un gradino unitario ossia se e solo se

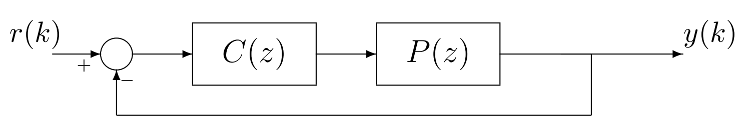
$$1 = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} W(z) R(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} K_w \frac{1}{z} \frac{z}{z-1} = K_w,$$

dove $R(z)$ è la trasformata zeta del gradino. In modo più immediatamente intuitivo, potevamo anche dire subito che l'interconnessione con $C(z) = C_1(z)$ calcolato al punto precedente è dead-beat per l'inseguimento di gradini se e solo se $K_w = 1$. Infatti, la funzione di trasferimento $W(z)$ è un ritardo unitario moltiplicato per un guadagno K_w, quindi un ingresso a gradino produce un'uscita forzata che ancora un gradino ritardato di un passo e ri-scalato per la costante K_w.

3. Potremmo ragionare in modo formale in modo simile a quanto fatto al punto precedente. In modo più diretto, possiamo però dire subito che, poiché la funzione di trasferimento $W(z)$ è un ritardo unitario moltiplicato per un guadagno K_w, un ingresso a rampa produce un'uscita forzata che è ancora una rampa ma ritardata di un passo e con pendenza ri-scalata (secondo la costante K_w). Pertanto, non può esserci errore asintotico nullo e quindi per nessun valore di K_w, l'interconnessione con $C(z) = C_1(z)$ calcolato al punto 1. è dead-beat per l'inseguimento di rampe.

4. La funzione di trasferimento $W_2(z)$ ha grado relativo N. Pertanto, $C_2(z)$ introduce un passo di ritardo (ossia ha grado relativo pari a 1) se e solo se N è pari al grado relativo di $P(z)$ aumentato di 1. Quindi:
a. se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 1 e $C_2(z)$ introduce un passo di ritardo se e solo se $N = 2$.
b. se $a = b = 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 1 e $C_2(z)$ introduce un passo di ritardo se e solo se $N = 2$.
c. se $a = 0$ e $b \neq 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 0 e e $C_2(z)$ introduce un passo di ritardo se e solo se $N = 1$.
d. se $a \neq 0$ e $b = 0$ il grado relativo di $P(z)$ è pari a 2 e $C_2(z)$ introduce un passo di ritardo se e solo se $N = 3$.

Esercizio 2. Si consideri l'interconnessione



dove la funzione di trasferimento discreta $P(z)$ è ottenuta per tenuta e campionamento da

$$P_c(s) = K_p \frac{s+a}{s+b}$$

con $a = -1$, $b = 1$ e $K_p = 2$. Si determinino un controllore e il periodo di campionamento massimo in modo che valgano contemporaneamente le seguenti proprietà:
1. Il sistema a catena chiusa insegua asintoticamente in modo dead-beat la rampa unitaria campionata.

2. La risposta al gradino discreto del sistema a catena chiusa vada a regime in un tempo non superiore a $t^* := 0.03$ s.
3. L'interconnessione sia internamente stabile.

Soluzione. Anzitutto calcoliamo $P(z)$.

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P_c(s)}{s}\right]\right]\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{s(s+1)}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s}+\frac{4}{s+1}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[-2\cdot 1(t)+4\mathrm{e}^{-t}\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[-2\delta_{-1}(k)+4\mathrm{e}^{-kT}\right] \\
&= \frac{z-1}{z}(-2\frac{z}{z-1}+4\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}) \\
&= 2(-1+2\frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-T}}).
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$P(z) = K_p\frac{z-c}{z-p}$$

dove $p = \mathrm{e}^{-bT} = \mathrm{e}^{-T}$ è un polo "stabile" ma lo zero $c = -\mathrm{e}^{-T}+2 > 1$ è "instabile". Pertanto per garantire stabilità interna dell'interconnessione si deve imporre che c sia anche zero della funzione di trasferimento a catena chiusa $W(z)$.

La specifica 1. impone che la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa $W(z)$ abbia solo poli nell'origine. Quindi, invece della scelta usuale $T \leq t_r^*/10$ posso imporre $t^* = nT$ dove n è la molteplicità del polo nell'origine di $W(z)$. Dunque posso scegliere $T = t^*/n$ e quindi devo scegliere il più piccolo valore possibile di n perché è richiesto che T sia massimo.

Affinché si abbia inseguimento asintotico della rampa campionata

$$r(k) = kT$$

corrispondente a

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

potrei utilizzare il principio del modello interno ponendo

$$C(z) = \frac{1}{(z-1)^2}C_1(z).$$

Potrei dunque includere il termine $\frac{1}{(z-1)^2}$ in $P(z)$ e determinare $C_1(z)$ con il metodo dell'equazione diofantea. In questo modo, però

$$\tilde{P}(z) = \frac{1}{(z-1)^2}P(z) = \frac{N_P(z)}{D_{\tilde{P}}(z)}$$

ha un denominatore $D_{\tilde{P}}(z)$ di grado 3 di modo che il denominatore $D_W(z)$ di $W(z)$ dovrebbe essere un polinomio di grado 5 e, quindi (poiché il sistema deve essere dead-beat)

$$D_W(z) = z^5.$$

In questo caso bisognerebbe scegliere $T = t^*/5$ ma non vi è nessuna garanzia che $n = 5$ sia il minimo grado di $D_w(z)$.

Per cercare di aver grado minimo posso seguire una strada diretta: posso cioè vedere direttamente su $W(z)$ cosa impongono le specifiche. So già che $W(z)$ deve avere la forma

$$W(z) = \frac{N(z)}{z^n}.$$

Per la stabilità interna dell'interconnessione si deve avere

$$N(c) = 0.$$

Per la causalità di $C(z)$ si deve avere

$$\deg[N(z)] \leq n$$

e

$$W(\infty) \neq 1.$$

Infine, per l'inseguimento asitotico della rampa, detti $e(k)$ l'errore e $E(z)$ la sua trasformata, si deve avere

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}(1 - W(z))R(z) = 0,$$

ossia,

$$\lim_{z\to 1} \frac{T}{z-1} \frac{z^n - N(z)}{z^n} = 0.$$

Equivalentemente,

$$z^n - N(z) = (z-1)^2 Q(z)$$

con $Q(z)$ polinomio qualunque.

Per minimizzare n posso scegliere $Q(z) = q$ costante e $n = 2$. In tal modo

$$N(z) = z^2 - q(z-1)^2$$

e ho ancora un grado di libertà q che posso scegliere per soddisfare $N(c) = 0$. Infatti basta porre

$$c^2 - q(c-1)^2 = 0$$

da cui

$$q = \frac{c^2}{(c-1)^2}.$$

In conclusione,

$$T = t^*/2 = 0.015,$$

$$p = \mathrm{e}^{-T} \simeq 0.9851,$$

$$c = 2 - \mathrm{e}^{-T} \simeq 1.0149$$

e

$$q = \frac{c^2}{(c-1)^2} \simeq 4647.$$

Quindi

$$W(z) = \frac{N(z)}{z^2}$$

dove

$$N(z) = z^2 - q(z-1)^2 = z^2 - \frac{c^2}{(c-1)^2}(z-1)^2 = \frac{1-2c}{(c-1)^2}\left[(z-c)\left(z + \frac{c}{1-2c}\right)\right].$$

Infine,

$$C(z) = \frac{1}{P(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)} = \frac{z-p}{2(z-c)}\frac{N(z)}{z^2-N(z)} = \frac{(z-p)\frac{1-2c}{(c-1)^2}\left(z+\frac{c}{1-2c}\right)}{2q(z-1)^2}$$

o, anche

$$C(z) = \frac{1-2c}{2c^2}\frac{(z-p)\left(z+\frac{c}{1-2c}\right)}{(z-1)^2} \simeq -0.5\frac{(z-0.9851)\,(z-0.9855)}{(z-1)^2}$$

Si noti che, come sapevo che doveva essere, il controllore non cancella lo zero "instabile" in c di $P(z)$.

Esercizio 3. Si risolva l'esercizio precedente con l'ulteriore vincolo che il controllore introduca un passo di ritardo.

Soluzione. Tutti i ragionamenti fatti in precedenza continuano a valere. Devo aggiungere il vincolo che il controllore introduca un passo di ritardo o, equivalentemente, che $W(z)$ abbia grado relativo pari a 1. Posso ottenere questa proprietà a scapito di un aumento di n infatti devo imporre

$$z^n - N(z) = (z-1)^2 Q(z)$$

con $Q(z)$ polinomio qualunque.

Se scelgo $n = 3$ e $Q(z) = q_1 z + q_0$ posso imporre sia che il grado di

$$N(z) = z^3 - (q_1 z + q_0)(z-1)^2$$

sia pari a 2, da cui ricavo subito

$$q_1 = 1,$$

sia che

$$N(c) = c^3 - (q_1 c + q_0)(c-1)^2 = 0$$

da cui ricavo subito

$$q_0 = \frac{c^3}{(c-1)^2} - q_1 c = \frac{c^3}{(c-1)^2} - c = \frac{2c^2 - c}{(c-1)^2}.$$

A questo punto pongo

$$T = t^*/3 = 0.01 \quad \text{s.}$$

Inoltre,

$$W(z) = \frac{N(z)}{z^3} = \frac{(2-q_0)z^2 + (2q_0 - 1)z - q_0}{z^3}$$

e, al solito,

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)}.$$

Esercizio 4. Si risolvano i due esercizi precedenti nel caso in cui invece che $a = -1$ si abbia $a = 1/2$.

Soluzione.

In questo caso si ha

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P_c(s)}{s}\right]\right]\right] = \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s(s+1)}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[1(t) + \mathrm{e}^{-t}\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left[\delta_{-1}(k) + \mathrm{e}^{-kT}\right] \\
&= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-T}}\right) \\
&= 1 + \frac{z-1}{z - \mathrm{e}^{-T}}.
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$P(z) = K_p \frac{z-c}{z-p}$$

dove, questa volta, $p = \mathrm{e}^{-bT} = \mathrm{e}^{-T}$ è un polo "stabile" e $c = (1 + \mathrm{e}^{-T})/2 \in (0,1)$ è uno zero pure "stabile". Pertanto, la stabilità interna dell'interconnessione non ha bisogno di condizioni ulteriori (rispetto alla BIBO stabilità della $W(z)$).

Consideriamo il primo dei due esercizi precedenti ma con il nuovo valore del parametro $a = 1/2$. Possiamo ripetere i ragionamenti già visti tenendo conto del fatto che NON abbiamo bisogno di imporre la condizione

$$N(c) = 0.$$

In altre parole,

$$T = t^*/2 = 0.015 \text{ s.}$$

Inoltre, possiamo scegliere un qualunque valore di $q \neq 0$ e porre

$$W(z) = \frac{N(z)}{z^2} = \frac{z^2 - q(z-1)^2}{z^2}$$

e quindi

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)}.$$

Possiamo anche sfruttare il grado di libertà relativo al parametro libero q della soluzione appena trovata per risolvere l'esercizio precedente (con il nuovo valore del parametro $a = 1/2$) senza dover aumentare il grado di $D_W(z)$. Infatti ponendo $q = 1$, si ottiene

$$W(z) = \frac{N(z)}{z^2} = \frac{2z - 1}{z^2}$$

e il relativo $C(z)$ ha quindi un passo di ritardo.