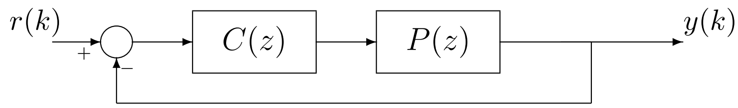
Esercizi sulla sintesi diretta

Esercizio 1. Si consideri l'interconnessione



dove

$$P(z) = K_P \frac{z-q}{(z-p)^2}, \qquad K_P := 2, \quad p := 0.8, \quad q := 1.2.$$

Si determini un controllore $C(z)$ in modo che la funzione di trasferimento $W(z)$ a catena chiusa sia del tipo

$$W(z) = K_W \frac{z^{-N}(z-a)}{(z-p_1)(z-p_2)}, \qquad p_1 := 0.5, \quad p_2 := -0.5,$$

dove K_W, N e a sono determinati in modo che:
1. Il sistema a catena chiusa insegua con errore asintotico nullo un riferimento a gradino.
2. $C(z)$ sia strettamente proprio.
3. L'interconnessione sia internamente stabile.

Soluzione. Affinché l'interconnessione sia internamente stabile lo zero "instabile" di $P(z)$ deve essere anche zero di $W(z)$. Pertanto, si deve avere

$$a = q = 1.2.$$

Affinché $C(z)$ sia strettamente proprio il grado relativo di $W(z)$ ossia $N+1$ deve essere superiore a quello di $P(z)$ che è pari ad 1. Pertanto, si deve avere $N+1 > 1$, ossia $N > 0$. Per avere una $C(z)$ con grado relativo pari ad uno scelgo

$$N = 1.$$

Affinché il sistema a catena chiusa insegua con errore asintotico nullo un riferimento a gradino si deve avere $W(1) = 1$. Pertanto,

$$K_W \frac{1^{-1}(1-a)}{(1-p_1)(1-p_2)} = 1$$

ossia

$$K_W = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1^{-1}(1-a)} = \frac{3/4}{(1-1.2)} = -\frac{15}{4}.$$

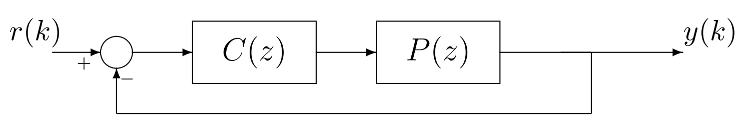
A questo punto

$$
\begin{aligned}
C(z) &= \frac{1}{P(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)} \\
&= \frac{(z-p)^2}{K_P(z-q)}\frac{K_W\frac{z^{-1}(z-a)}{(z-p_1)(z-p_2)}}{1-K_W\frac{z^{-1}(z-a)}{(z-p_1)(z-p_2)}} \\
&= \frac{(z-p)^2}{K_P(z-q)}\frac{K_W(z-q)}{z(z-p_1)(z-p_2)-K_W(z-q)} \\
&= -\frac{15}{8}\frac{(z-0.8)^2}{z(z-1/2)(z+1/2)+(15/4)(z-1.2)} \\
&= -\frac{15}{8}\frac{(z-0.8)^2}{z^3+(7/2)z-9/2}.
\end{aligned}
$$

Si noti che, come ci aspettavamo, $C(z)$ ha un polo in 1. In effetti, sapevamo che doveva essere così perché abbiamo imposto che sistema a catena chiusa insegua con errore asintotico nullo un riferimento a gradino.

Si noti anche che il controllore *non* presenta il polo in q che cancellerebbe lo zero "instabile". Ciò è dovuto al fatto di aver imposto le condizioni di stabilità interna che impediscono che avvengano cancellazioni zero-polo "instabili" fra $C(z)$ e $P(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'interconnessione



dove $P(z)$ è ottenuto per tenuta e campionamento da $P_c(s) = \frac{1}{s^2}$.

Si determini un controllore $C(z)$ in modo che:
1. Il sistema a catena chiusa insegua con errore asintotico nullo un riferimento a gradino.
2. $C(z)$ sia proprio.
3. L'interconnessione sia internamente stabile.
4. Il sistema a catena chiusa abbia un comportamento che soddisfa le seguenti specifiche:

$$
\begin{aligned}
&t_{s,5\%} < 0.1 \text{ s} \\
&t_r < 0.05 \text{ s} \\
&m_p < 0.05
\end{aligned}
$$

Soluzione. Per prima cosa determino la regione ammissibile per i poli nel continuo.

La specifica sul tempo di assestamento $t_{s,5\%}$ si traduce nel fatto che i poli della funzione di trasferimento a catena chiusa devono trovarsi a sinistra di una retta verticale di ascissa pari a $-\sigma$ dove

$$\sigma = \frac{3}{t_{s,5\%}} = 30.$$

La specifica sul tempo di salita t_r si traduce nel fatto che i poli della funzione di trasferimento a catena chiusa devono trovarsi all'esterno di una semi-circonferenza centrata nell'origine di raggio pari a

$$\omega_n = \frac{1.8}{t_r} = 36.$$

La specifica sulla massima sovraelongazione m_p si traduce nel fatto che il coefficiente di smorzamento (ossia il modulo del rapporto fra parte reale e modulo dei poli dominanti della funzione di trasferimento a catena chiusa) deve essere maggiore di

$$\xi = \frac{|\ln(m_p)|}{\sqrt{\ln^2(m_p) + \pi^2}} \simeq 0.7.$$

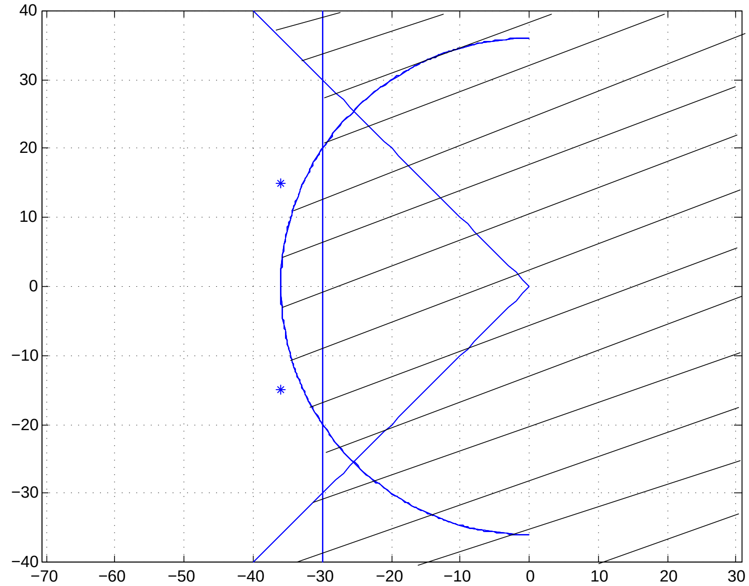
Questo vincolo sul coefficiente di smorzamento si può equivalentemente esprimere imponendo che i poli della funzione di trasferimento a catena chiusa si trovino in un settore del semipiano complesso sinistro delimitato dalle due semirette uscenti dall'origine di pendenza pari a

$$\pm\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \simeq \pm 1.$$

Scegliamo dunque una funzione di trasferimento a catena chiusa con due poli dominanti corrispondenti ai poli continui in

$$p^c_{1,2} = -36 \pm j15$$

Tale scelta (certamente non unica) è ragionevole in quanto non è troppo lontana dal confine della regione ammissibile. La regione ammissibile è illustrata in figura dove i poli $p^c_{1,2} = -36 \pm j15$ che abbiamo scelto sono rappresentati da asterischi.



Dobbiamo ora tradurre queste specifiche nel discreto. Dovremo dunque progettare un controllore di funzione di trasferimento $C(z)$ in modo che la funzione di trasferimento discreta a catena chiusa abbia i poli dominanti in

$$p_{1,2} = \exp(p_{1,2}^c T)$$

Dobbiamo quindi fissare il periodo di campionamento T. In assenza di altre indicazioni, la scelta tipica è

$$T \simeq t_r/10 = 0.005 \text{ s}$$

Pertanto,

$$p_{1,2} = \exp(p_{1,2}^c T) \simeq 0.8329 \pm 0.0626j.$$

Per progettare il controllore devo calcolare $P(z)$ che è ottenuto per tenuta e campionamento da $P_c(s)$:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P_c(s)}{s}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\frac{t^2}{2}1(t)\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[(1/2)k^2T^2\delta_{-1}(k)\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\left[(1/2)T^2\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right] \\
&= \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2}.
\end{aligned}$$

Si noti che tale funzione di trasferimento ha un polo doppio in 1. Pertanto la specifica 1. è automaticamente soddisfatta. Utilizzo il metodo dell'equazione diofantea per soddisfare anche le specifiche 2. e 3.

Scrivo $P(z)$ come rapporto di polinomi:

$$P(z) = \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{N_P(z)}{D_P(z)}$$

cone

$$N_P(z) = \frac{T^2}{2}z + \frac{T^2}{2}$$

e

$$D_P(z) = (z-1)^2 = z^2 - 2z + 1.$$

Poiché $n := \deg[D_P(z)] = 2$ devo scegliere una funzione di trasferimento $W(z)$ a catena chiusa con $2n-1 = 3$ poli, ossia

$$W(z) = \frac{N_W(z)}{D_W(z)}$$

con $\deg[D_W(z)] = 3$. Poiché ho già fissato i 2 poli dominanti di W:

$$p_{1,2} = \exp(p^c_{1,2}T) \simeq 0.8329 \pm 0.0626j,$$

dovrò porre

$$D_W(z) = (z-p_1)(z-p_2)D_v(z)$$

dove $D_v(z)$ corrisponde ad una dinamica veloce: per esempio posso scegliere $D_v(z) = z$. Dunque si avrà

$$D_W(z) = (z-p_1)(z-p_2)z = z^3 + d_2z^2 + d_1z$$

con

$$d_2 = -p_1 - p_2 = -2\mathbb{R}\mathrm{e}(p_1) \simeq -1.6658,$$

$$d_1 = p_1p_2 = |p_1|^2 \simeq 0.6977.$$

Ora posso porre

$$C(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

dove il polinomio incognito $X(z)$ ha grado $n-1 = 1$ e il polinomio incognito $Y(z)$ ha grado non superiore a $n-1 = 1$. Dunque pongo

$$X(z) = x_1z + x_0$$

e

$$Y(z) = y_1z + y_0$$

e devo risolvere l'equazione polinomiale

$$D_P(z)X(z) + N_P(z)Y(z) = D_W(z)$$

nelle quattro incognite x_1, x_0, y_1 e y_0. Tale equazione si può scrivere come un sistema lineare in 4 equazioni e 4 incognite della forma

$$Ax = b$$

con

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & T^2/2 & 0 \\ 1 & -2 & T^2/2 & T^2/2 \\ 0 & 1 & 0 & T^2/2 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.159 \\ 14003 \\ -12730 \end{bmatrix}$$

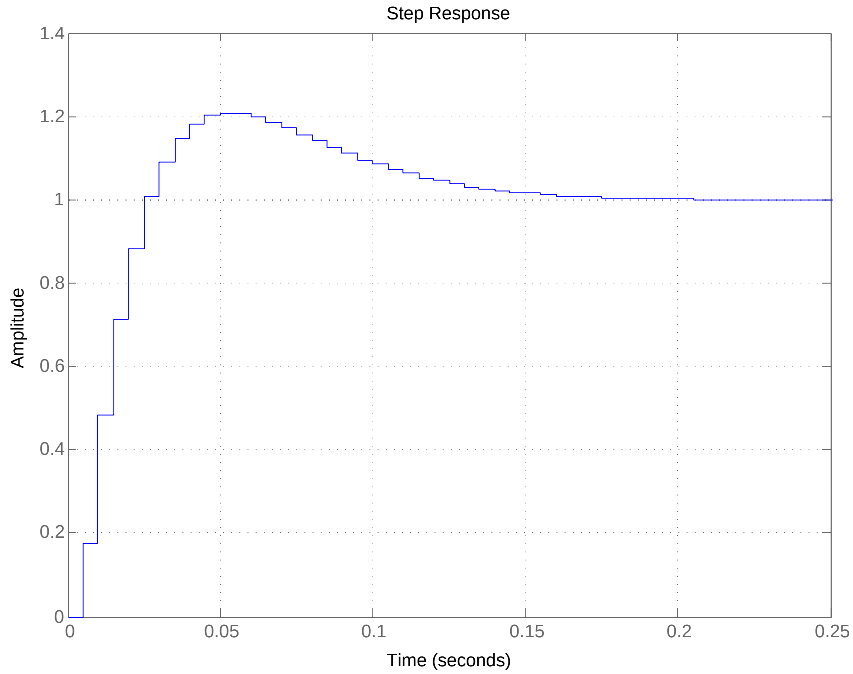
Pertanto,

$$C(z) = \frac{14003z - 12730}{z + 0.1591} = \frac{14003(z - 0.9091)}{z + 0.1591}.$$

Vediamo subito (cosa che possiamo considerare un utile *sanity check*) che non vi sono cancellazioni zero-polo "instabili" fra $C(z)$ e $P(z)$. La funzione di trasferimento a catena chiusa è data da

$$W(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = 0.17504\frac{(z + 1)(z - 0.9091)}{z(z^2 - 1.666z + 0.6977)}.$$

A questo punto, visto che la procedura seguita comporta delle approssimazioni, si può vedere in simulazione se la risposta al gradino soddisfa le specifiche. Il grafico della risposta al gradino è riportato in figura.



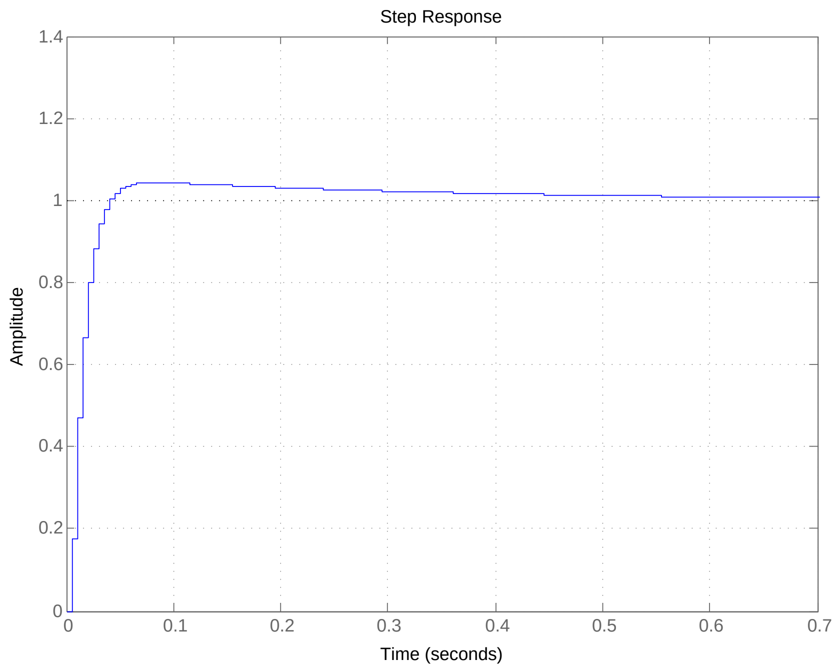
Come si vede, il tempo di salita soddisfa (abbondantemente) le specifiche, il tempo di assestamento è leggermente superiore a quanto imposto mentre la sovraelongazione è molto superiore alle specifiche. Potrei quindi rifare il progetto con una nuova posizione dei poli. In alternativa, posso ricordare che la sovraelongazione spesso risente molto della presenza e della posizione degli zeri. D'altro canto, come mi aspettavo lo zero in 0.9091 di W, coincide con lo zero di $C(s)$ (gli zeri rimangono inalterati con il feedback). Pertanto posso modificare lo zero di $C(s)$ (la qual cosa non distrugge le specifiche 1, 2 e 3 purché lo zero di C sia "stabile") e vedere se riesco a soddisfare le specifiche 4. Spostando lo zero verso 1 e considerando il controllore

$$C(z) = \frac{14003z - 1.379}{z + 0.1591} = \frac{14003(z - 0.985)}{z + 0.1591}$$

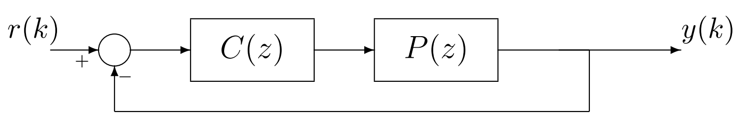
si ottiene la funzione di trasferimento a catena chiusa

$$W(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = 0.17504 \frac{(z+1)(z-0.985)}{(z-0.9842)(z-0.6612)(z-0.02046)}$$

la cui risposta al gradino, riportata nella figura seguente, soddisfa le specifiche senza eccedere troppo nelle performances:



Esercizio 3. Si consideri l'interconnessione



dove

$$P(z) = \frac{z - 1.5}{(z - a)^2}, \qquad a := 0.8.$$

A. Si determini un controllore $C(z)$ in modo che:

1. Il sistema a catena chiusa insegua un riferimento a gradino con errore che si annulla dopo un numero minimo di passi.
2. L'interconnessione sia internamente stabile.
3. $C(z)$ sia proprio.

B. Si dica come cambia la soluzione se al punto 3. si impone $C(z)$ strettamente proprio.

Soluzione.

A. $P(z)$ ha grado relativo pari a 1 e uno zero instabile. Posso quindi imporre direttamente

$$W(z) = K_W \frac{z - 1.5}{z^2}$$

dove K_W deve essere scelto in modo da avere $W(1) = 1$, ossia,

$$K_w \frac{1 - 1.5}{1^2} = -\frac{1}{2} K_W = 1$$

da cui

$$K_W = -2.$$

Dunque

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)} = \frac{-2(z + a)^2}{z^2 + 2z - 3}.$$

B. Per avere $C(z)$ strettamente proprio devo imporre che $W(z)$ abbia grado relativo almeno pari a 2 e quindi posso imporre direttamente

$$W(z) = K_W \frac{z - 1.5}{z^3},$$

dove K_W deve essere scelto in modo da avere $W(1) = 1$, ossia,

$$K_w \frac{1 - 1.5}{1^3} = -\frac{1}{2} K_W = 1$$

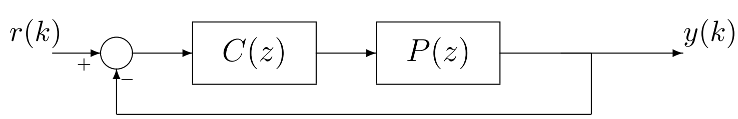
da cui

$$K_W = -2.$$

Dunque

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)} = \frac{-2(z + a)^2}{z^3 + 2z - 3}.$$

Esercizio 4. Si consideri l'interconnessione



dove

$$P(z) = \frac{z + 1}{z - 1/2}.$$

A. Si determini la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore strettamente proprio in modo che la catena chiusa insegua in modo *dead-beat* il riferimento di trasformata

$$R(z) = \frac{1}{(z - 1)^2}.$$

Si dica dopo quanti passi si annulla l'errore.

B. Si discuta cosa cambia se si utilizza lo stesso controllore ma il riferimento ha trasformata

$$R(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Soluzione.

A. $P(z)$ ha grado relativo pari a 0 e uno zero (marginalmente) instabile. Poichè $C(z)$ deve essere strettamente proprio, $W(z)$ deve essere strettamente proprio ossia deve avere grado relativo almeno pari a 1. Per avere comportamento *dead-beat* nell'inseguire il riferimento di trasformata

$$R(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

la funzione di trasferimento a catena chiusa $W(z)$ deve avere la forma

$$W(z) = \frac{z^{2+q} - (z-1)^2\tilde{Q}(z)}{z^{2+q}}$$

dove $q := \deg(\tilde{Q}(z))$. Per imporre che $W(z)$ sia strettamente proprio e che abbia uno zero in -1, $\tilde{Q}(z)$ deve avere grado almeno pari a 1. Pongo allora

$$\tilde{Q}(z) = az + b, \qquad q = 1.$$

Affinché $W(z)$ sia strettamente proprio si deve avere $a = 1$. Rimane da determinare b in modo che $W(z)$ abbia uno zero in -1. Si ha

$$W(z) = \frac{z^3 - (z-1)^2(z+b)}{z^3}$$

da cui $W(-1) = \frac{-1-4(-1+b)}{-1} = 1 - 4 + 4b = -3 + 4b$. Imponendo $W(-1) = 0$ ottengo

$$b = 3/4.$$

Dunque

$$W(z) = \frac{z^3 - (z-1)^2(z+3/4)}{z^3} = (5/4)\frac{(z+1)(z-3/5)}{z^3}$$

e

$$C(z) = \frac{1}{P(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)} = \frac{z-1/2}{z+1}\frac{(5/4)(z+1)(z-3/5)}{z^3-(5/4)(z+1)(z-3/5)} = \frac{(5/4)(z-1/2)(z-3/5)}{z^3-(5/4)z^2-(1/2)z+3/4}.$$

La trasformata dell'errore è data da

$$E(z) = (1-W(z))R(z) = z^{-2} + (3/4)z^{-3}$$

Quindi l'errore è nullo dal quinto passo (ossia k=4) compreso in poi.

B. In questo caso, La trasformata dell'errore è data da

$$E(z) = (1 - W(z))R(z) = (z + 1)(z^{-2} + (3/4)z^{-3}) = z^{-1} + (7/4)z^{-2} + (3/4)z^{-3}$$

Quindi, anche questa volta, l'errore è nullo dal quinto passo (ossia k=4) compreso in poi.

Dovevamo aspettarci questo risultato perché i due riferimenti hanno lo stesso denominatore.