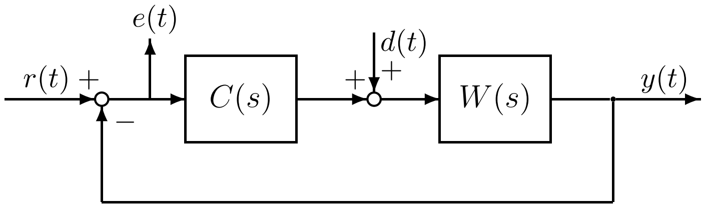
Esercizio 1
Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{H}{s^2 + as + b}.$$

Determinare i parametri K, a e b sapendo che la risposta impulsiva del sistema contiene i modi e^{-t} e te^{-t} e sapendo che il sistema risponde a un gradino unitario con un'uscita che a regime è uguale a 10.



Si consideri il sistema di controllo mostrato nella figura in cui

$$C(s) = \frac{K}{s}$$

Determinare i valori di K che rendono stabile il sistema complessivo. Supponiamo che $r(t) = 2$ e che $d(t) = \cos(t)$. Determinare l'andamento dell'errore $e(t)$ e dell'uscita a regime $y(t)$ in funzione di K.

Esercizio 2
Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = \frac{K}{s+2}, \quad W(s) = \frac{s+1}{s^2+a}$$

e dove a e K sono due parametri reali.

1. Si supponga inizialmente che $K = 0$. Si determini il valore del parametro a sapendo che a un ingresso impulsivo $d(t) = \delta(t)$ il sistema risponde con un'uscita sinusoidale di periodo π.

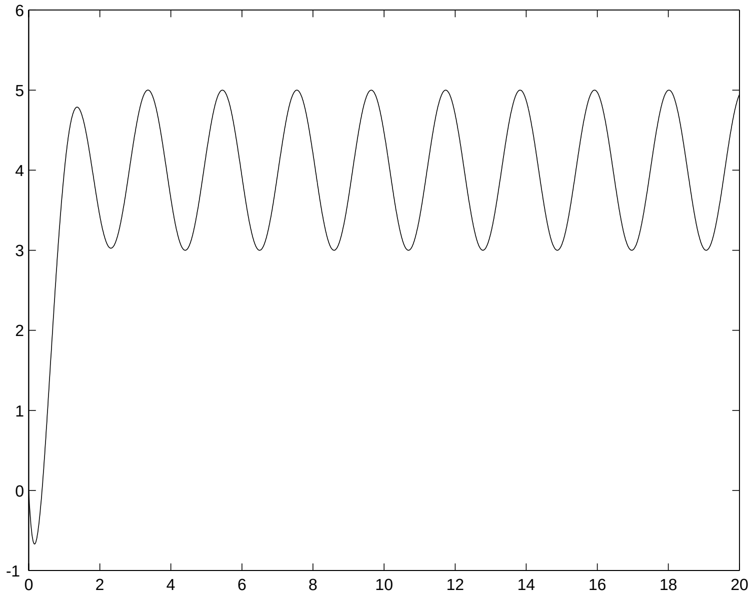
2. Si supponga ora che K sia variabile e supponiamo che che $r(t) = 5 + t$ e $d(t) = sin(2t)$, $\forall t \geq 0$. Determinare i valori di K che rendono stabile il sistema retrazionato. Determinare poi l'errore a regime $e(t)$ corrispondente, al variare di K.

Esercizio 3
Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = K\,\frac{1+s}{s}, \qquad W(s) = \frac{3\,(4-s)}{a + bs + s^2}.$$

a. Con $K = 0$ (cioè in catena aperta e con la sola azione del disturbo) e $d(t) = 3 + \cos 3t$, a transitorio esaurito, l'uscita presenta un andamento mostrato in figura. In base a questo esperimento, quanto valgono i parametri a e b?

b. Con $K = 1$, $r(t) = 4t$ e $d(t) = 1$, si calcoli il valore asintotico dell'errore $e(t)$. E se si prende $K = 2$?



Esercizio 4
Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad W(s) = \frac{s^2 + s + 12}{s^2 + bs + a}$$

e dove a, b e K sono due parametri reali.

1. Si determini il valore del parametro a sapendo che la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ contiene il modo $\sin(3t)$.

2. Determinare il valore di K che il sistema retroazionato reagisca a un segnale di ingresso $d(t) = \cos(3t)$ con un'uscita a regime $y(t) = \cos(3t + \frac{\pi}{2})$.

3. Si supponga ora che K sia variabile. Supponiamo inoltre che $r(t) = 5$ e $d(t) = t$, $\forall t \geq 0$. Determinare l'uscita a regime $y(t)$ corrispondente, al variare di $K \geq 0$.

Esercizio 5
Si consideri un blocco ritardatore descritto dalla relazione ingresso/uscita

$$y(t) = u(t-1).$$

Determinare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento. Dire, giustificando la risposta, se questo sistema è BIBO stabile.

Esercizio 6
Si consideri un sistema con risposta impulsiva

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < T \\ Ke^{-(t-T)} & \text{if } t \geq T \end{cases}$$

Si determini per quali valori di K e T il sistema in catena chiusa e' BIBO stabile. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.

Esercizio 7 (Non in programma)
Si consideri un sistema con risposta impulsiva

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{1}{(1+t)^n} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

dove $n = 0, 1, 2, ...$ Si dica per quali valori di n se il sistema e' BIBO stabile giustificando adeguatamente la risposta.

Esercizio 8

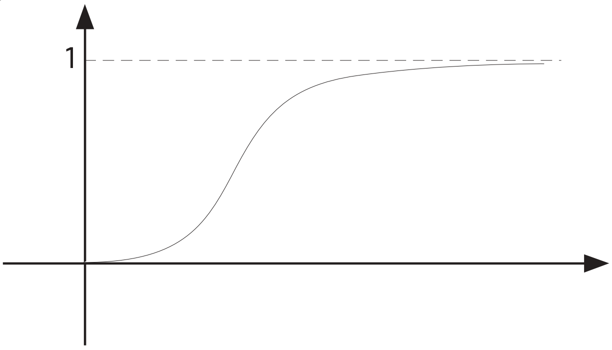
Si consideri il sistema descritto dall'equazione

$$y''(t) + (a+1)y'(t) + ay(t) = u'(t) - 2u(t)$$

Si determini la risposta libera, la risposta impulsiva, la stabilità BIBO e la stabilità rispetto alle condizioni iniziali del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9 9.4.01

Si consideri un sistema avente risposta impulsiva $w(t)$ contenente i modi e^{-t} e te^{-t} e funzione di trasferimento $W(s)$ strettamente propria. Si dica se il sistema è BIBO stabile. Supponendo inoltre che la risposta al gradino unitario sia



determinare $W(s)$. Le risposte vanno adeguatamente motivate.

Esercizio 1

i modi e^{-t}, te^{-t} hanno trasformata $\frac{1}{s+1}$ e $\frac{*}{(s+1)^2}$

e quindi $W(s)$ deve avere un polo -1 doppio nell'origine

$$W(s) = \frac{K}{(s+1)^2}$$

Inoltre $W(0) = 10$ e quindi $k = 10$

La funzioni di trasferimento da ogni ingresso a ogni uscita avrà lo stesso denominatore

$$T_{uy}(s) = \frac{CW}{1+CW} = \frac{\frac{10k}{s(s+1)^2}}{1+\frac{10k}{s(s+1)^2}} = \frac{10k}{s^3+2s^2+s+10k}$$

$$T_{dy}(s) = \frac{W}{1+CW} = \frac{10s}{s^3+2s^2+s+10k}$$

$$T_{de}(s) = \frac{-W}{1+CW} = \frac{-10s}{s^3+2s^2+s+10k}$$

$$T_{ue}(s) = \frac{1}{1+CW} = \frac{s(s+1)^2}{s^3+2s^2+s+10k}$$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 10k \\ 1 & \frac{2-10k}{2} = 1-5k & \\ 0 & 10k & \end{array}$$

Stabilità per $0 < k < \frac{1}{5}$

Calcoliamo l'uscita $y(t)$ utilizzando la sovrapposizione degli effetti

1) $u(t) = 0$ $\quad d(t) = \cos t$

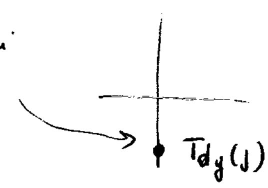
$$y(t) \simeq |T_{dy}(j)| \cos(t + \angle T_{dy}(j))$$

$$T_{dy}(j) = \frac{10j}{-j-2+j+10k} = \frac{10}{10k-2} j$$

per $0 < k < 1/5$ $\quad 10k-2 < 0$

e quindi

$$|T_{dy}(j)| = \frac{10}{2-10k} > 0 \qquad \angle T_{dy}(j) = -\pi/2$$



2) $u(t) = 2$ $\quad d(t) = 0$

$$y(t) \simeq T_{uy}(0)\, 2 = 2$$

Quindi $\quad y(t) \simeq 2 + \frac{10}{2-10k} \cos(t - \pi/2) \qquad t \to \infty$

Il calcolo di $e(t)$ può essere fatto in modo analogo.

Esercizio 2

se $d(t)=\delta(t)$ e $k=0$ significa che $y(t)$ sarà la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento

$$W(s)=\frac{s+1}{s^2+a}$$

$w(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+a}\right]$ sarà un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega=\sqrt{a}$

il periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$ e quindi $\pi=\frac{2\pi}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$

$$W(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$$

Prima di ordinare il sistema in catena chiusa facciamo l'analisi di stabilità con la tabella di Routh

$$T_{re}(s)=\frac{1}{1+CW}=\frac{(s+2)(s^2+4)}{(s+2)(s^2+4)+k(s+1)}=\frac{s^3+2s^2+4s+8}{s^3+2s^2+4s+8+ks+k}$$

$$T_{de}(s)=\frac{-W}{1+CW}=\frac{(s+2)(s+1)}{s^3+2s^2+4s+8+ks+k}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+2s^2+(4+k)s+k+8}$$

3	1	4+k
2	2	8+k
1	$\frac{k}{2}$	
0	8+k	

$k>0$

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

1) $r(t)=0$ $\quad d(t)=\sin(2t)$

$$T_{de}(2j)=\frac{-4+6j+2}{\cancel{-8j}-\cancel{8}+\cancel{8j}+\cancel{8}+k(1+j)}=\frac{1}{k}\,\frac{-2+6j}{1+j}=\frac{1}{2k}(4+8j)=\frac{2}{k}(1+2j)$$

$$|T_{de}(2j)|=\frac{2}{k}\sqrt{5} \qquad \angle T_{de}(2j)=\operatorname{arctg} 2$$

2) $r(t)=5$ $\quad d(t)=0$

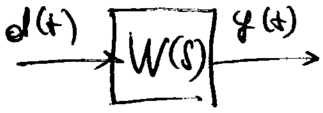
$$y(t)=T_{re}(0)\,5=\frac{8}{8+k}\,5$$

Quindi la risposta globale sarà la somma dei due contributi

$$y(t)=\frac{40}{8+k}+\frac{2\sqrt{5}}{k}\sin(2t+\operatorname{arctg} 2)$$

Esercizio 3

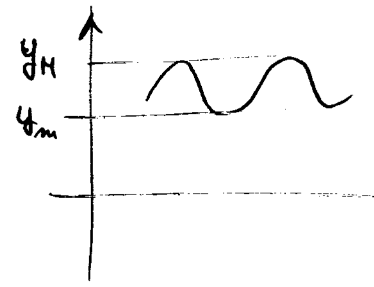
a) Con $k=0$ si ha che



Applicando la sovrapposizione degli effetti

$d(t)=3 \qquad y_1(t)\simeq W(0)\,3$

$d(t)=\cos 3t \qquad y_2(t)\simeq |W(3j)|\cos\left(3t+\angle W(3j)\right)$



Quindi

$$y(t)\simeq 3\,W(0)+|W(3j)|\cos\left(3t+\angle W(3j)\right)$$

$$\begin{cases} y_M=5=3W(0)+|W(3j)| \\ y_m=3=3W(0)-|W(3j)| \end{cases} \qquad \begin{cases} y_m+y_M=8=6W(0) \\ y_M-y_m=2=2|W(3j)| \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(0)=\dfrac{12}{a}=\dfrac{4}{3} \\ |W(3j)|=3\dfrac{|4-3j|}{|a-9+3bj|}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=12\dfrac{3}{4}=9 \\ 3\dfrac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{(a-9)^2+9b^2}}=\dfrac{\cancel{3}\,5}{\cancel{3}|b|}=1 \qquad b=\pm 5 \end{cases}$$

$b=-5$ non è accettabile perché $W(s)$ diventa instabile BIBO

b) Fissiamo $a=9 \quad b=5 \quad k=1$

$$T_{re}(s)=\frac{1}{1+C(s)W(s)}=\frac{s(s^2+5s+9)}{s(s^2+5s+9)+3(s+1)(4-s)}=\frac{s(s^2+5s+9)}{s^3+2s^2+18s+12}$$

$$T_{de}(s)=\frac{-W(s)}{1+C(s)W(s)}=\frac{-3s(4-s)}{s^3+2s^2+18s+12}$$

Stabilità: Uso la tabella di Routh

1	18
2	12
12	
12	

$\Rightarrow$ Stabile

Essendo stabile posso usare il teorema del valore finale

$R(s)=\dfrac{4}{s^2} \rightarrow Y_1(s)=T_{re}(s)\dfrac{4}{s^2}=\dfrac{s^2+5s+9}{s^3+2s^2+18s+12}\,\dfrac{4}{s}$, $y_1(t)\simeq \lim\limits_{\sigma\to 0}\sigma Y_1(\sigma)=3$ $\Rightarrow y(t)\simeq 3$

$D(s)=\dfrac{1}{s} \rightarrow Y_2(s)=T_{de}(s)\dfrac{1}{s}=\dfrac{-3(4-s)}{s^3+2s^2+18s+12}$ $\qquad y_2(t)\simeq \lim\limits_{\sigma\to 0}\sigma Y_2(\sigma)=0$

Fissando $k=2$ si ottiene che le funzioni di trasferimento $T_{re}(s)$ e $T_{de}(s)$ hanno denominatore $s^3-s^2+27s+24$ instabile.

Esercizio 4

1) Come nell'esercizio 2 si deduce che il modo $\sin 3t$ nella risposta impulsiva implica che $W(s)$ ha poli complessi coniugati immaginari in $\pm 3j$ e quindi $a=9$ e $b=0$

2) Calcoliamo $T_{dy}(s) = \frac{W}{1+CW} = \frac{s(s^2+s+12)}{s^3+9s+k(s^2+s+12)}$

L'esperimento implica che $|T_{dy}(3j)| = 1$ e

$\angle T_{dy}(3j) = \frac{\pi}{2}$

$$T_{dy}(3j) = \frac{3j(-9+3j+12)}{-\cancel{27j}+\cancel{27j}+k(-9+3j+12)} = \frac{3}{k}j$$

$$\left.\begin{array}{l} |T_{dy}(3j)| = \frac{3}{|k|} = 1 \quad \Rightarrow |k| = 3 \\ \angle T_{dy}(3j) = \begin{cases} \pi/2 & k>0 \\ -\pi/2 & k<0 \end{cases} \quad \Rightarrow k>0 \end{array}\right\} \Rightarrow k=3$$

3) Analisi di stabilità $\rightarrow$ Tabella di Routh di $s^3+ks^2+(9+k)s+12k$

$$T_{ry}(s) = \frac{k(s^2+s+12)}{s(s^2+9)+k(s^2+s+12)}$$

3	1	$9+k$
2	k	$12k$
1	$k-3$	
0	$12k$	

$-\frac{1}{k}\det\begin{bmatrix} 1 & 9+k \\ k & 12k \end{bmatrix} = \frac{12k-9k-k^2}{-k} = \frac{-\cancel{k}(k-3)}{-\cancel{k}}$

$k > 3$

Sovrapposizione degli effetti

1) $r(t)=5$, $d(t)=0$ $\Rightarrow y(t) \simeq T_{ry}(0)\,5 = 5$

2) $r(t)=0$, $d(t)=t$ $\Rightarrow Y(s) = T_{dy}(s)\frac{1}{s^2} = \frac{s^2+s+12}{s(s^2+9)+k(s^2+s+12)}\frac{1}{s}$

osserviamo che l'antitrasformata di $Y(s)$ contiene i modi propri del sistema che $\rightarrow 0$ (perché è BIBO) + il modo relativo al polo nell'origine che ha residuo

$$A = \lim_{s\to 0} Y(s)s = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+s+12}{s(s^2+9)+k(s^2+s+12)} = \frac{1}{k}$$

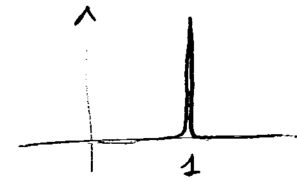
Quindi $Y(s) = \frac{1/k}{s} + \sum \frac{\alpha_{ij}}{(s-\lambda_i)^j}$

$$y(t) = \frac{1}{k} + (\text{termini} \rightarrow 0)$$

la risposta globale è

$y(t) \simeq 5 + \frac{1}{k}$ costante quando $t \rightarrow \infty$

Esercizio 5

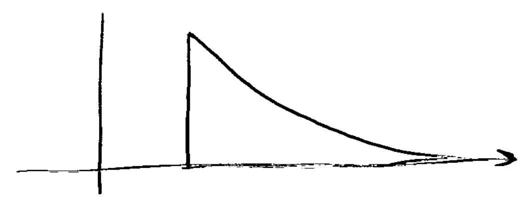


Se $u(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=\delta(t-1)$
quindi la risposta impulsiva è un impulso centrato in 1.

$$W(s)=\int_0^{+\infty}\delta(t-1)\,e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\delta(t-1)\,e^{-s}dt=e^{-s}\int_0^{\infty}\delta(t-1)dt=e^{-s}$$

Il sistema è BIBO dato che a un ingresso limitato esso mappa una uscita traslata in avanti di 1 che deve essere quindi anch'essa limitata

Esercizio 6



È conveniente disegnare la risposta impulsiva che è semplicemente una esponenziale traslata

$$\int_0^{\infty}|w(t)|dt=\int_T^{\infty}k\,e^{-(t-T)}dt=\begin{pmatrix}\text{Cambiamento}\\ \text{di variabile}\\ \sigma=t-T\end{pmatrix}=\int_0^{\infty}k\,e^{-\sigma}d\sigma=k<\infty$$

Quindi è BIBO

La funzione di trasferimento è

$$W(s)=\int_0^{\infty}k\,e^{-(t-T)}e^{-st}dt=k\int_T^{\infty}e^{-(t-T)}e^{-st}dt=(\sigma=t-T)=k\int_0^{\infty}e^{-\sigma}e^{-s(\sigma+T)}d\sigma$$

$$=k\,e^{-sT}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-\sigma}e^{-s\sigma}d\sigma}_{\mathcal{L}[e^{-t}]}=k\,e^{-sT}\frac{1}{s+1}$$

Esercizio 7

Verifichiamo se $W(t)$ è assolutamente integrabile

$$\int_0^{\infty}|w(t)|dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{(t+1)^n}=\int_1^{\infty}\frac{1}{\sigma^n}d\sigma \qquad \text{dove } \sigma=t+1$$

per $n=0$ è costante quindi $W(t)$ non è integrabile

per $n=1$ non è integrabile $\int_1^{\infty}\sigma^{-1}d\sigma=\log\sigma\Big|_0^{\infty}=\infty$

per $n\geq 2$ è integrabile $\int_1^{\infty}\sigma^{-n}d\sigma=\frac{\sigma^{-n+1}}{-n+1}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{n-1}$

Esercizio 8

Se $Y(s)$ è la trasformata di Laplace dello risposta libera $y(t)$
e tenendo conto che $\mathcal{L}[y] = Y(s)$

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = sY(s) - y(0)$$
$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

Allora

$$\ddot{y}(t) + (a+1)\dot{y}(t) + ay(t) = 0$$
$$\Big\downarrow \mathcal{L}[\cdot]$$
$$s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0) + (a+1)[sY - y(0)] + aY = 0$$
$$[s^2 + (a+1)s + a]Y(s) = sy(0) + \dot{y}(0) + (a+1)y(0)$$
$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + (a+1)y(0)}{\underbrace{s^2 + (a+1)s + a}_{\to (s+a)(s+1)}} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to -a} (s+a)Y(s) = \frac{\cancel{-ay(0)} + \dot{y}(0) + \cancel{ay(0)} + y(0)}{-a+1} = \frac{\dot{y}(0) + y(0)}{1-a}$$

$$B = \lim_{s\to -1} (s+1)Y(s) = \frac{\cancel{-y(0)} + \dot{y}(0) + ay(0) + \cancel{y(0)}}{-1+a} = \frac{\dot{y}(0) + ay(0)}{a-1}$$

$$y(t) = Ae^{-at} + Be^{-t}$$

È stabile rispetto alle condizioni iniziali (internamente stabile) $\Leftrightarrow$ $y(t) \to 0$ $\forall$ cond iniziale $\Leftrightarrow$ $a > 0$.

$$W(s) = \frac{s-2}{(s+a)(s+1)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = (s+a)W(s)\big|_{s=-a} = \frac{-a-2}{1-a} = \frac{a+2}{a-1}$$
$$B = (s+1)W(s)\big|_{s=-1} = \frac{-3}{a-1}$$
$$w(t) = \frac{a+2}{a-1}e^{-at} + \frac{3}{a-1}e^{-t}$$

Il sistema è BIBO stabile $\Leftrightarrow$ poli di $W(s)$ sono $Re < 0$

Caso 1 $a \neq 2$

poli $W(s)$ sono $-1, -a$ quindi $a > 0$

Caso 2 $a = 2$

$W(s) = \frac{1}{s+1}$ che è BIBO

Esercizio 9

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Questo è la forma + generale di un sistema con 2 modi (quindi con denominatore di grado $= 2$) e strettamente proprio (quindi con numeratore di grado ≤ 1)

Poiché i modi sono e^{-t} e te^{-t}, allora $W(s)$ deve avere un polo doppio in -1

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s+1)^2} \qquad Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s+1)^2}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 1 \Rightarrow W(0) = 1 \Rightarrow b_0 = 1$$

Si noti che

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = sY(s) = W(s) \qquad \dot{y}(t) = w(t) \quad \text{risposta impulsiva}$$

Quindi $w(0) = \dot{y}(0) = 0$

$$w(t) = A e^{-t} + B t e^{-t} \qquad w(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$W(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} = \frac{B}{(s+1)^2}$$

$B = 1$ come abbiamo visto sopra.

Esercizio

Consideriamo il sistema non lineare in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2 + u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

1) Trovare il sistema linearizzato sapendo che $u \approx 0$ piccolo
2) Trovare il sistema linearizzato sapendo che $u \approx 1$.

1) $u = 0 \Rightarrow$ punti di equilibrio risolvono l'equazione

$$\begin{cases} 0 = x_2 + x_1 x_2 \\ 0 = -x_1 + x_2^2 \end{cases} \qquad x_2(1+x_1) = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ equilibrio}$$

$\hookrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow 0 = 1 + x_2^2$ impossibile

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 + x_1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1$$

$x_1 = x_2 = u = 0$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

2) $u = 1 \Rightarrow$ punti di equilibrio risolvono l'equazione

$$\begin{cases} 0 = x_2 + x_1 x_2 \\ 0 = -x_1 + x_2^2 + 1 \end{cases} \qquad x_2(1+x_1) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

equilibrio $(1,0)$

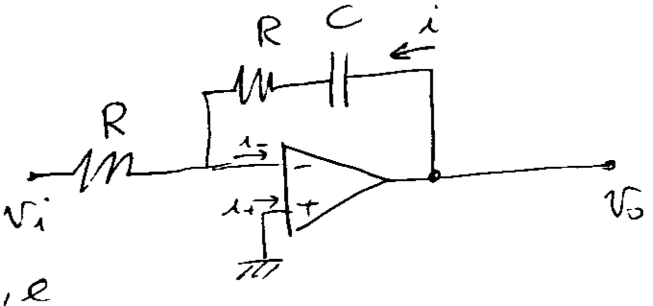
$\hookrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow 0 = 1 + x_2^2 + 1$ impossibile

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad u = 1$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H(s) = \frac{1}{s^2+2}$$

Esercizio

Si consideri la rete



1) si supponga che il modello dell'operazionale imponga $i_- = i_+ = 0$ e che

$$V_o = A(V_+ - V_-) \quad \text{con} \quad A > 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento tra V_i e V_o

2) Ripetere l'esercizio precedente supponendo che il modello dell'operazionale sia

$$V_o = \frac{A}{s+\sigma}(V_+ - V_-)$$

Soluzione

1) Lavoriamo sui segnali trasformati secondo Laplace $\quad \frac{sCR}{2RCs+1}$

$$I(s) = \frac{V_o(s) - V_i(s)}{2R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_+ = 0$$

$$V_- = V_i(s) + RI(s) = V_i(s) + \frac{R}{2R+\frac{1}{sC}}(V_o(s) - V_i(s))$$

$$V_o(s) = A(V_+ - V_-) = -A\left[V_i(s) + \frac{sCR}{1+2RCs}(V_o(s) - V_i(s))\right]$$

$$V_o = -AV_i - A\frac{sCR}{1+2RCs}V_o + A\frac{sCR}{1+2RCs}V_i$$

$$\left[1 + A\frac{sCR}{1+2RCs}\right]V_o = A\left[-1 + \frac{sCR}{1+2RCs}\right]$$

$$\frac{1+2RCs+AsCR}{\cancel{1+2RCs}}V_o = \frac{-1-2RCs+sCR}{\cancel{1+2RCs}}$$

$$V_o = \frac{-(1+CRs)A}{1+2RCs+ACRs}V_i$$

2) Basta sostituire A con $\frac{A}{s+\sigma}$ nella funzione di trasferimento appena ottenuta

$$V_o = \frac{-(1+CRs)\frac{A}{s+\sigma}}{1+2RCs+RCs\frac{A}{s+\sigma}} = \frac{-A(1+RCs)}{(s+\sigma)(1+2RCs)+ARCs}$$