

# PRIMO COMPITINO DI SEGNALI E SISTEMI

## 7 Novembre 2005

Si consideri un sistema SISO LTI descritto dalla generica equazione differenziale

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

con  $a_n, b_m \neq 0$ , e  $n \geq m$ .

**Teoria 1.** [5 punti]

Operando nel dominio del tempo, ricavare l'espressione generale della risposta impulsiva.

**Teoria 2.** [5 punti]

Ricavare l'espressione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata del sistema nel dominio delle trasformate di Laplace.

NOTA: Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

# PRIMO COMPITINO DI SEGNALI E SISTEMI

## 7 Novembre 2005

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+a)\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = (a+1)\frac{du(t)}{dt} + 2au(t),$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- i) [3 punti] Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ ;
- ii) [3 punti] si determini, se possibile, al variare di  $a \geq 0$ , la risposta di regime permanente al segnale di ingresso  $u(t) = \cos(t)\delta_{-1}(t)$ .

Assumendo nel seguito dell'esercizio  $a = 1$ :

- iii) [3 punti] si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1;$$

- iv) [3 punti] si determini, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema,  $h(t)$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{100(s-1)}{s(s+10)^2}.$$

- i) [4 punti] Si tracci il diagramma di Bode (reale ed asintotico) della risposta in frequenza;
- ii) [4 punti] Si determini la risposta forzata  $y_f(t)$  in corrispondenza all'ingresso

$$u(t) = \delta(t) + 11e^t\delta_{-1}(t).$$

## SOLUZIONI

**Teoria 1.** [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2 paragrafo 2.3.

**Teoria 2.** [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 3 paragrafo 3.3

**Esercizio 1.** i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + (1 + a)s + a.$$

L'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 2 e pertanto possiamo determinare per quali valori di  $a$  essa ammette solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo alla regola dei segni di Cartesio, ovvero valutando per quali valori di  $a$  il polinomio ha tutti i coefficienti di ugual segno. È immediato rendersi conto del fatto che i coefficienti del polinomio sono tutti positivi se e solo se

$$a > 0.$$

Non è possibile che siano tutti negativi dal momento che il coefficiente del termine di secondo grado è 1. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a > 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro  $a$  per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro  $a$  in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$H(s) = \frac{(a+1)s + 2a}{s^2 + (1+a)s + a} = \frac{(a+1)s + 2a}{(s+1)(s+a)}.$$

Poichè l'unico zero del polinomio al numeratore è collocato (per  $a \neq -1$ ) in  $-\frac{2a}{a+1}$ , la situazione ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro  $a$  lo zero del numeratore  $-\frac{2a}{a+1}$  coincide con uno dei due zeri del denominatore  $-1$  e  $-a$  ed al tempo stesso lo zero del denominatore che non si cancella è reale negativo, i.e. se vale una delle due condizioni:

$$\begin{cases} -\frac{2a}{a+1} = -1 \\ -a < 0 \end{cases} \quad (1)$$

oppure

$$\begin{cases} -\frac{2a}{a+1} = -a \\ -1 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

È immediato verificare che la (1) vale se e solo se  $a = 1$ , (valore per il quale il sistema è asintoticamente stabile come verificato in precedenza) mentre la (2) vale se  $a = 0$  oppure  $a = 1$ .

Dobbiamo quindi aggiungere all'insieme di valori  $a > 0$  per i quali il sistema è asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile anche il valore  $a = 0$  per il quale il

sistema non è asintoticamente stabile (il polinomio caratteristico ha uno zero in  $s = 0$ ) ma è BIBO stabile in quanto la funzione di trasferimento risulta

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

In conclusione il sistema è asintoticamente stabile per  $a > 0$  e BIBO stabile per  $a \geq 0$ .

ii) [3 punti] La risposta in frequenza del sistema è data da

$$H_a(j\omega) = \frac{(a+1)j\omega + 2a}{(j\omega)^2 + (1+a)j\omega + a}$$

Per  $a \geq 0$  il sistema è BIBO stabile e quindi ha senso parlare di risposta di regime permanente ed essa è data da

$$y_{rp}(t) = |H_a(j)| \cos(t + \angle H_a(j))$$

dove

$$|H_a(j)| = |H_a(j\omega)|_{\omega=1} = \sqrt{\frac{5a^2 + 2a + 1}{2 + 2a^2}}$$

$$\angle H_a(j) = \angle H_a(j\omega)|_{\omega=1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & a = 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{a+1}{2a}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1+a}{a-1}\right) - \pi & a \in (0, 1) \\ -\frac{\pi}{4} & a = 1 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{a+1}{2a}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1+a}{a-1}\right) & a > 1 \end{cases}$$

iii) [3 punti] Per  $a = 1$  l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 0 &= y(0^-) = y_\ell(0) = c_1, \\ -1 &= \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \left. \frac{dy_\ell(t)}{dt} \right|_{t=0} = c_2 - c_1, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 = -1.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = -t e^{-t} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

iv) [3 punti] Per  $a = 1$  l'equazione caratteristica ha una radice doppia in  $-1$ ; di conseguenza la risposta impulsiva del sistema assume l'espressione parametrica

$$h(t) = d_0\delta(t) + [d_1e^{-t} + d_2te^{-t}] \delta_{-1}(t).$$

Poichè il sistema è strettamente proprio, si ha  $d_0 = 0$ . Inoltre, le derivate prima e seconda della risposta impulsiva sono date rispettivamente da

$$\frac{dh(t)}{dt} = [-d_1e^{-t} - d_2te^{-t} + d_2e^{-t}] \delta_{-1}(t) + d_1\delta(t)$$

e

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = [d_1e^{-t} + d_2te^{-t} - 2d_2e^{-t}] \delta_{-1}(t) + (d_2 - d_1)\delta(t) + d_1\delta_1(t).$$

Ponendo  $y(t) = h(t)$  e  $u(t) = \delta(t)$  troviamo

$$d_1\delta_1(t) + (d_2 - d_1)\delta(t) + 2d_1\delta(t) = 2\delta_1(t) + 2\delta(t),$$

da cui segue immediatamente che  $d_1 = 2$  e  $d_2 = 0$ . In definitiva la risposta impulsiva del sistema è data da

$$h(t) = 2e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [4 punti]

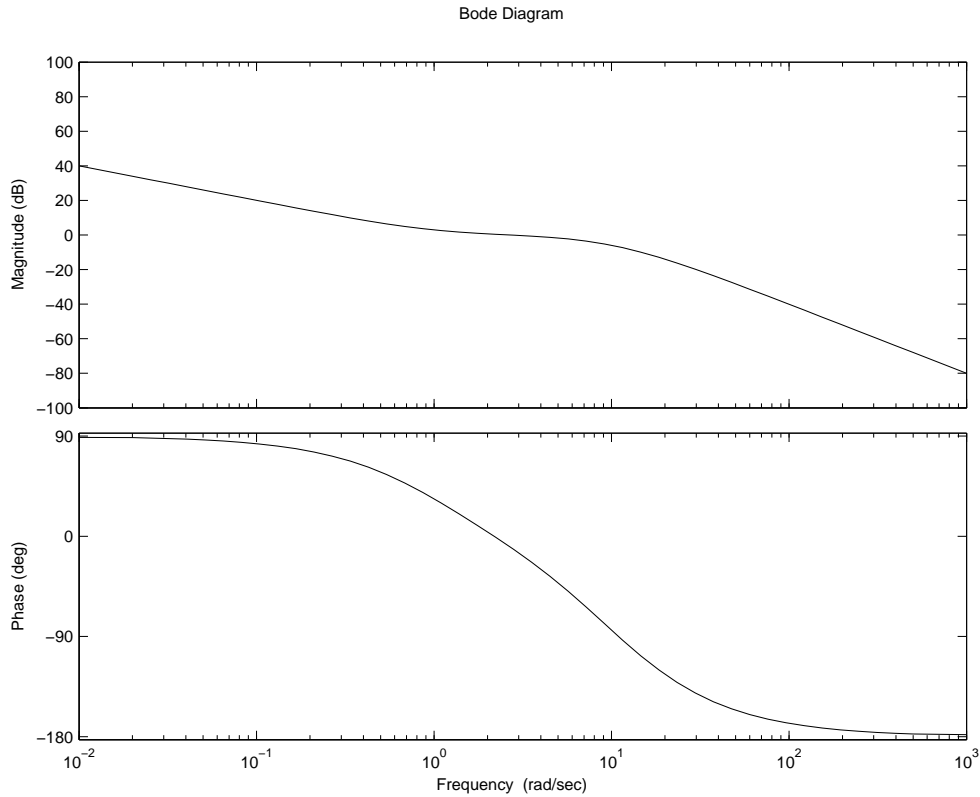
La funzione di trasferimento del sistema si riscrive in forma di Bode come segue:

$$H(s) = -\frac{(1-s)}{s(1+0.01s)^2}$$

e la corrispondente risposta in frequenza del sistema è

$$H(j\omega) = -\frac{(1-j\omega)}{j\omega(1+j\omega 0.01)^2}$$

i cui diagrammi di Bode (reali) sono i seguenti:



ii) [4 punti]

La risposta forzata all'ingresso

$$u(t) = \delta(t) + 11e^t \delta_{-1}(t)$$

si può calcolare utilizzando le trasformate di Laplace. La trasformata di Laplace dell'ingresso è data da

$$U(s) = 1 + \frac{11}{s-1} = \frac{s+10}{s-1}.$$

La trasformata di Laplace  $Y_f(s)$  della risposta forzata  $y_f(t)$  è quindi

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = 100 \frac{(s-1)}{s(s+10)^2} \frac{s+10}{s-1} = \frac{100}{s(s+10)}.$$

Sviluppando  $Y_f(s)$  in fratti semplici:

$$Y_f(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} = \frac{100}{s(s+10)}$$

si ottiene immediatamente

$$A = 10 \quad B = -10$$

e quindi

$$Y_f(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+10}.$$

Antitrasformando si ottiene immediatamente

$$y_f(t) = 10\delta_{-1}(t) - 10e^{-10t}\delta_{-1}(t).$$