

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

19 Dicembre 2005

Teoria 1. Si enunci e dimostri il teorema del campionamento ideale, ricavando la formula di ricostruzione nel dominio del tempo.

Teoria 2. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo discreto causale, descritto da un'equazione alle differenze lineare e a coefficienti costanti, si derivi la forma generale della risposta impulsiva operando nel dominio delle trasformate zeta (a partire cioè dalla funzione di trasferimento).

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

19 Dicembre 2005

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(k) - (2 + a)y(k - 1) + 2ay(k - 2) = u(k - 1) - 3u(k - 2) + 2u(k - 3) \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

con a parametro reale.

- i) Si studi, al variare di a in \mathbb{R} , la stabilità asintotica e la stabilità BIBO. Ponendo $a = 1/2$ nel seguito dell'esercizio:
- ii) Si determini la risposta impulsiva del sistema
- iii) Si scelga, se possibile, un ingresso $u(k)$, nullo per $k < 0$, tale che la corrispondente uscita forzata sia

$$y_f(k) = \delta(k - 1)$$

Esercizio 2. Si consideri un sistema lineare a tempo continuo il cui comportamento ingresso uscita è descritto dalla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{(s + 10)^2}{(100s^3 + 0.5s^2 + s)}.$$

- i) Si traccino i diagrammi di Bode (reali e asintotici)
- ii) Si dica se ne esiste una descrizione in termini di equazioni differenziali che sia asintoticamente stabile.

Esercizio 3. Sia $u(t), t \in \mathbb{R}$, un segnale a tempo continuo, periodico di periodo T , che tra $-T/2$ e $T/2$ vale

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/12, \\ 0, & T/12 < |t| < T/2. \end{cases}$$

- i) Si determini la serie di Fourier esponenziale del segnale $u(t)$.
- ii) Supponendo che tale segnale alimenti in ingresso un filtro di risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\alpha f}$$

si determinino i valori di α tali che, con riferimento alla serie esponenziale di Fourier del corrispondente segnale di uscita $v(t)$, i coefficienti dei termini a frequenza $3/T$ abbiano ampiezza (modulo) inferiore a $1/100$.

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 paragrafo 5.6.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6: paragrafo 6.8 per l'espressione generale della funzione di trasferimento e il paragrafo 6.9 per l'antritrasmformata zeta di funzioni razionali proprie.

Esercizio 1. i) [3 punti] Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = z^2 - (2 + a)z + 2a = (z - a)(z - 2)$$

e quindi ha come zeri $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = a$. Se $a = 0$ l'equazione caratteristica si riduce a $z - 2 = 0$, la cui unica radice è $\lambda_1 = 2$. Poiché $|\lambda_1| > 1$ il sistema NON è mai asintoticamente stabile. Per la BIBO stabilità calcoliamo la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^3 - (2 + a)z^2 + 2az} = \frac{(z - 1)(z - 2)}{z(z - 2)(z - a)} = \frac{(z - 1)}{z(z - a)}$$

Dobbiamo distinguere i casi $a \neq 1$ e $a = 1$.

Se $a \neq 1$ il poli sono in 0 e a e quindi il sistema è BIBO stabile per $|a| < 1$. Se $a = 1$ la funzione di trasferimento si riduce a $H(z) = z^{-1}$ che chiaramente è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile. Di conseguenza il sistema è BIBO stabile per $-1 < a \leq 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1/2$, la funzione di trasferimento diventa

$$H(z) = \frac{(z - 1)}{z(z - 1/2)}$$

Dalla scomposizione in fratti semplici:

$$H_1(z) = z^{-1}H(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1/2}$$

si ottiene $A = 2$, $B = 2$, $C = -2$ da cui

$$H(z) = 2 + 2\frac{1}{z} - 2\frac{z}{z - 1/2}$$

$$h(k) = 2\delta(k) + 2\delta(k - 1) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k)$$

iii) [3 punti] Si può operare nel dominio delle trasformate:

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

e imponendo che $Y_f(z) = z^{-1}$ si ottiene:

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \frac{1}{z} \frac{z(z - 1/2)}{z - 1} = \frac{z - 1/2}{z - 1}$$

Scomponendo in fratti semplici:

$$U_1(z) = z^{-1}U(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

si ottiene $A = B = 1/2$, da cui

$$U(z) = 1/2 + 1/2 \frac{z}{z-1}$$

e quindi

$$u(k) = 1/2\delta(k) + \frac{1}{2}\delta_{-1}(k)$$

Esercizio 2.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = 10^2 \cdot \frac{(1 + j0.1\omega)^2}{(1 + 2 \cdot 0.025/0.1 \cdot j\omega - \omega^2/0.01)}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

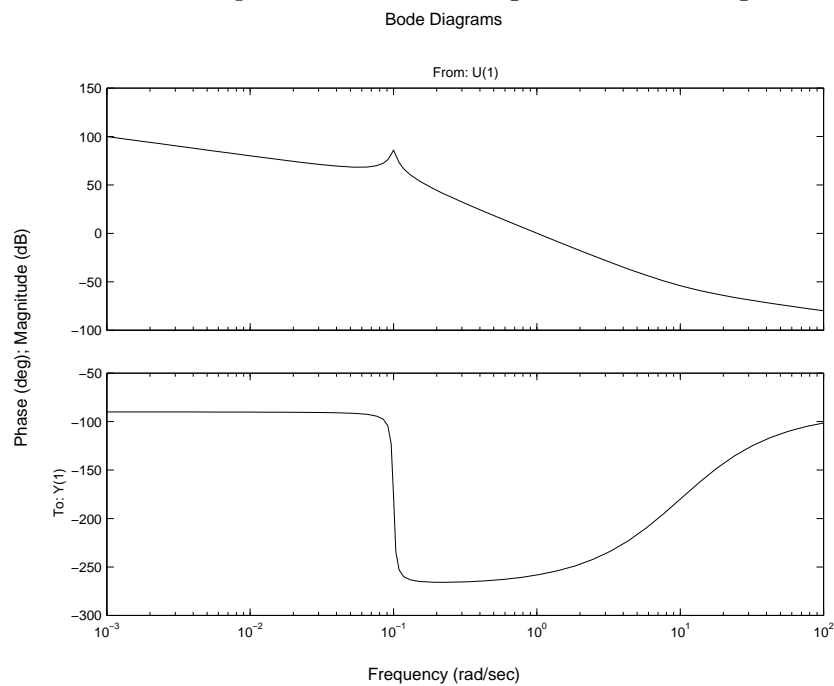


Figura 1. Diagramma di Bode.

ii) [2 punti] Il sistema non è BIBO stabile e quindi non può essere descritto da un'equazione differenziale il cui polinomio caratteristico ha tutte le radici a parte reale strettamente negativa.

Esercizio 3. i) [2 punti] Sviluppriamo $u(t)$ in serie di Fourier esponenziale, nella forma

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt}$$

A tal fine osserviamo che, in base alla tecnica illustrata nel paragrafo 5.4.1 per la valutazione della serie di Fourier di un segnale periodico attraverso la trasformata di Fourier di un suo generatore, possiamo scrivere

$$u_k = \frac{1}{T} \mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{T/6} \right) \right] (f) \Big|_{f=\frac{k}{T}},$$

dove $\mathcal{F}[\cdot]$ rappresenta l'operatore trasformata di Fourier. Pertanto

$$u_k = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{6} \operatorname{sinc} \left(\frac{fT}{6} \right) \right) \Big|_{f=\frac{k}{T}} = \frac{1}{6} \operatorname{sinc}(k/6).$$

ii) [3 punti]

Il segnale di uscita $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ si può espandere in serie di Fourier

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

dove $v_k = H \left(\frac{k}{T} \right) u_k = \frac{1}{1+j\alpha \frac{k}{T}} u_k$.

I coefficienti corrispondenti agli esponenziali di frequenza $f = \pm \frac{3}{T}$ sono quelli che si ottengono per $k = \pm 3$. Di conseguenza dobbiamo determinare α in modo che

$$|v_{-3}| = |v_3| = \frac{1}{|1 + j\alpha f|_{f=\pm 3/T}} u_{\pm 3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9\alpha^2/T^2}} \frac{1}{6} \operatorname{sinc}(1/2) < 1/100$$

da cui si ottiene:

$$\alpha^2 > \frac{T^2}{9} \frac{10000 - 9\pi^2}{9\pi^2}$$