

# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

## 18 giugno 2009

**Teoria 1. [5 punti]** Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si ricavi, operando nel dominio delle trasformate, l'espressione della risposta forzata e dell'evoluzione libera. Si faccia un esempio numerico di un modello non asintoticamente stabile, la cui risposta impulsiva sia assolutamente integrabile.

**Teoria 2. [5 punti]** Si dia la definizione di trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo e di serie di Fourier per un segnale a tempo continuo periodico. Dato un segnale a tempo continuo periodico si ricavi la relazione tra i suoi coefficienti di Fourier e la trasformata di Fourier di un segnale generatore.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI

## 18 giugno 2009

**Esercizio 1.** [9 punti] Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + \frac{a^3}{4}y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 9u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

con  $a$  parametro reale.

- i) Si studi, al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , il carattere (convergente/limitato/divergente) dei modi elementari del sistema e si studi la stabilità (asintotica e BIBO).
- ii) Si determinino (se possibile), al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , le condizioni iniziali

$$y(0^-) \quad \text{e} \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-}$$

a cui corrisponde un'evoluzione libera di tipo oscillatorio (eventualmente smorzato).

- iii) Ponendo  $a = 1$  e imponendo l'ingresso  $u(t) = [1 + e^{-4t}] \delta_{-1}(t)$  si determini, qualora esista, il limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t).$$

**Esercizio 2.** [5 punti] Si traccino i diagrammi di Bode (reali e asintotici) della seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{(s^2 + 99s - 100)}{(s + 10)(s^2 + 1.6s + 1)}.$$

**Esercizio 3.** [6 punti] Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k+1) = ay(k) + u(k) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Si consideri il sistema inizialmente a riposo (cioè  $y(-1) = 0$ ). Si determini un ingresso  $u(k)$ ,  $k \geq 0$ , non nullo solo per un numero finito di valori di  $k$  (e nullo per  $k < 0$ ), in modo che l'uscita  $y(k)$  sia non nulla solo per  $k = 1$ .
2. Si assuma  $a = 1/2$ . Si dica se, dato  $u(k) = \sin(\omega k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , esiste un opportuno  $\omega$  tale che l'uscita soddisfi  $|y(k)| > 3$  per qualche valore di  $k$ .

## SOLUZIONI

**Teoria 1.** [5 punti] Si veda il libro di testo

**Teoria 2.** [5 punti] Si veda il libro di testo

**Esercizio 1.** i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = s^2 + as + \frac{a^3}{4} = 0$$

e quindi ha come zeri  $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - a^3}{4}}$ . Utilizzando la regola dei segni di Cartesio si ha:

1. I modi sono convergenti per  $a > 0$
2. Un modo è convergente e l'altro divergente per  $a < 0$ .
3. Per  $a = 0$  l'equazione caratteristica ha due radici coincidenti  $\lambda_{1,2} = 0$  e quindi un modo è limitato e l'altro divergente.

Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile per  $a > 0$  mentre non è asintoticamente stabile per  $a \leq 0$ .

Per quanto riguarda la BIBO stabilità possiamo subito affermare che il sistema è BIBO stabile per  $a > 0$  (la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO). Per  $a = 0$  la funzione di trasferimento ha un polo doppio in zero e quindi il sistema non è BIBO stabile. Per  $a < 0$  il sistema può essere BIBO stabile solo se la radice instabile (a parte reale positiva) di  $p(s)$  viene cancellata nella funzione di trasferimento  $H(s) := \frac{s+9}{s^2 + as + \frac{a^3}{4}}$ . Poichè l'unica cancellazione possibile corrisponde ad un radice "stabile"  $\lambda = -9$ , se ne deduce che il sistema non può mai essere BIBO stabile se  $p(s)$  ha almeno una radice a parte reale positiva; di conseguenza il sistema non è BIBO stabile per  $a \leq 0$ .

ii) [3 punti] Affinchè l'evoluzione libera sia di tipo oscillatorio (eventualmente smorzato) è necessario che le radici del polinomio caratteristico abbiano parte immaginaria non nulla. Questo succede se il discriminante dei  $p(s)$  è negativo, cioè  $\Delta := \frac{a^2 - a^3}{4} < 0$ , e quindi per  $a > 1$ . Per questi valori di  $a$  ogni scelta di condizioni iniziali (non identicamente nulle) fornisce una evoluzione libera di tipo oscillatorio smorzato (perchè, per  $a > 0$ , le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa).

iii) [3 punti] Convieni operare nel dominio delle trasformate di Laplace. La trasformata di Laplace dell'ingresso risulta

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+4}.$$

Di conseguenza, l'uscita forzata ha trasformata di Laplace

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{s+9}{s^2 + s + \frac{1}{4}} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+4} \right].$$

Per  $a = 1$  i poli di  $H(s)$  sono  $p_1 = p_2 = -1/2$ .

Di conseguenza  $Y_f(s)$  ammette la decomposizione

$$Y_f(s) = Y_{f1}(s) + Y_{f2}(s)$$

dove

$$Y_{f1}(s) := \frac{As^2 + Bs + C}{(s + 1/2)^2(s + 4)} \quad Y_{f2}(s) := \frac{D}{s}$$

e, antitraformando  $y_{f1}(t) := \mathcal{L}^{-1}[Y_{f1}(s)](t)$ ,  $y_{f2}(t) := \mathcal{L}^{-1}[Y_{f2}(s)](t) = D$  si ottiene

$$y_f(t) = y_{f1}(t) + y_{f2}(t) = y_{f1}(t) + D.$$

Poichè i poli di  $Y_{f1}$  sono a parte reale negativa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{f1}(t) = 0.$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = D.$$

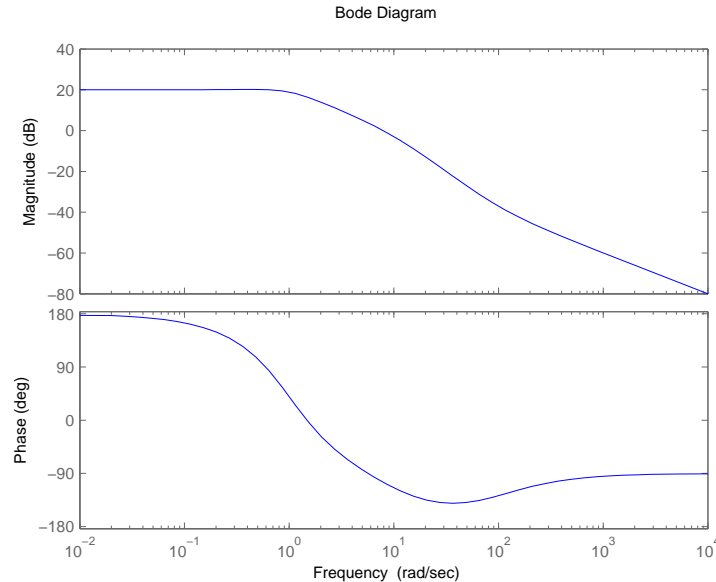
La costante  $D$  si può calcolare come

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} sY_f(s) = H(0) = 36.$$

**Esercizio 2.** [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10 \cdot \frac{(1 - j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)}{(1 + j1.6\omega - \omega^2)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati in Figura 1.



**Figura 1.** Diagramma di Bode.

**Esercizio 3.** i) [3 punti] Poichè le condizioni iniziali sono nulle, l'uscita coincide con la risposta forzata. Operando nel dominio delle trasformate zeta, si ottiene

$$Y(z) = Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{z-a}U(z)$$

Affinchè l'uscita sia non nulla solo per  $k = 1$ , la trasformata zeta di  $y(k)$  deve essere

$$Y(z) = y(1)z^{-1}$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} U(z) &= Y(z)/H(z) = (z-a)(y(1)z^{-1}) \\ &= y(1) - ay(1)z^{-1} \end{aligned}$$

Ne consegue che l'ingresso cercato deve avere la forma:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_1 & k = 0 \\ -au_1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

dove  $u_1$  è arbitrario (ma non nullo).

ii) [3 punti] Poichè per  $a = 1/2$  il sistema è BIBO stabile, l'uscita in corrispondenza all'ingresso  $u(k) = \sin(\omega k)$  ha la forma

$$y(k) = |H(e^{j\omega})|\sin(\omega k + \angle H(e^{j\omega}))$$

dove

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{e^{j\omega} - 1/2}$$

è la risposta in frequenza.

Affinchè  $y(k)$  possa essere maggiore di 3 in modulo per qualche valore di  $k$ , deve esistere un valore di  $\omega$  per il quale  $|H(e^{j\omega})| > 3$ .

Si verifica immediatamente che

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{(\cos(\omega) - 1/2)^2 + \sin^2(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4 - \cos(\omega)}}$$

Poichè  $-1 \leq \cos(\omega) \leq 1$ , si ottiene

$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}} \leq |H(e^{j\omega})| \leq 2 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]$$

Di conseguenza, per qualunque scelta di  $\omega$ ,  $|y(k)| \leq 2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  e quindi non è possibile scegliere  $\omega$  in modo che  $|y(k)| > 3$  per qualche valore di  $k \in \mathbb{Z}$ .