

Corso di Identificazione dei Modelli ed Analisi dei Dati
Esercizi Proposti

21 dicembre 2009

Esercizio 1. Una variabile aleatoria continua X ha la seguente funzione di distribuzione:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \in [0, 1/4] \\ c & t \in [1/4, 1] \\ t^2/4 & t \in [1, 2] \\ 1 & t > 2. \end{cases}$$

1. Si calcoli c in maniera che $F_X(t)$ sia una funzione di distribuzione.
2. Si calcoli la funzione di densità di probabilità $f_X(t)$.
3. Si calcoli $P[X \in [-1/2, 3/2]]$

Esercizio 2 Usando la definizione di covarianza e la linearità del valore atteso mostrare che, date due variabili aleatorie X e Y (con media e varianza finite),

1. $cov(X, Y) = E[XY] - (E[X])(E[Y])$
2. le variabili sono incorrelate se e solo se $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Esercizio 3 Il numero di prede catturate Y da un predatore in un'ora si può modellare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro Λ . La densità di una variabile di Poisson di parametro Λ ha la forma:

$$p_Y(k) := P[Y = k] = e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Due predatori, diciamo A e B , indistinguibili alla vista, hanno diverse abilità di preda. Supponiamo che il predatore B sia più "bravo" di A . In termini di numero di prede catturate in un'ora questo si può modellare dicendo che X_A , il numero di prede catturate in un'ora da A , è una variabile di Poisson di parametro Λ_A mentre X_B , il numero di prede catturate da B in un'ora, è una variabile di Poisson di parametro Λ_B , con $\Lambda_A < \Lambda_B$. Supponiamo $\Lambda_A = 4$, $\Lambda_B = 8$. Si scelga a caso uno dei due predatori (si ricordi che sono indistinguibili alla vista e quindi non si sa quale dei due si è scelto) e lo si mandi a cacciare. Si indichi con X la variabile che modella il numero di prede catturate in un'ora dal predatore scelto a caso.

1. Quale sarebbe la densità di probabilità di X se si sapesse che si è scelto il predatore più bravo?

D'ora in poi NON si conosce quale predatore si è scelto.

2. Si calcoli $P[X = 3]$.
3. Si ricavi $p_X(k) = P[X = k]$, $k = 0, 1, 2, \dots$
4. Sapendo che il predatore ha catturato 2 prede in un'ora, si calcoli la probabilità che sia il predatore A .
5. Quale sarebbe la conclusione del punto 4. se il predatore avesse catturato 4 prede in due ore?

Esercizio 5 Si abbiano a disposizione due urne, diciamo A e B. Nell'urna A ci sono 7 palline, di cui 3 rosse e 4 nere, nell'urna B ci sono 4 palline, di cui 1 rossa e 3 nere. Si estragga una pallina a caso dall'urna A e la si inserisca (senza guardarla) nell'urna B. Ora si estragga una pallina dall'urna B.

Si calcoli

1. La probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa.
2. Sapendo che la pallina estratta è rossa, qual'è la probabilità che sia proprio quella estratta dall'urna A e inserita nell'urna B.
3. Gli eventi "la seconda pallina estratta proviene originariamente dall'urna A" e "la seconda pallina estratta è rossa" sono eventi indipendenti?

Esercizio 6 Enunciare e dimostrare la Regola di Bayes

Esercizio 7 Si assuma che le variabili X, Y_1, Y_2 siano congiuntamente Gaussiane e tali che $E[X] = E[Y_1] = E[Y_2] = 0$ e

$$\text{Var} \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY_1} & \Sigma_{XY_2} \\ \Sigma_{Y_1X} & \Sigma_{Y_1Y_1} & \Sigma_{Y_1Y_2} \\ \Sigma_{Y_2X} & \Sigma_{Y_2Y_1} & \Sigma_{Y_2Y_2} \end{bmatrix}$$

1. Si calcoli $\tilde{Y}_2 := Y_2 - E[Y_2|Y_1]$ la sua varianza e $\text{cov}(\tilde{Y}_2, Y_1)$ (Si giustifichi intuitivamente quest'ultimo risultato)
2. Si mostri che

$$E[X|Y_1, \tilde{Y}_2] = E[X|Y_1] + E[X|\tilde{Y}_2]$$

e, usando il risultato del punto 1, che $E[X|Y_1]$ e $E[X|\tilde{Y}_2]$ sono scorrelate (e quindi indipendenti)

Esercizio 8 Due operatori A e B dispongono di due strumenti diversi per la misura di CO_2 nell'atmosfera. Si recano indipendentemente nello stesso posto ed effettuano una misura di concentrazione di CO_2 . Si assuma il seguente modello per le misure Y_A di A e Y_B di B:

$$Y_A = X + W_A$$

$$Y_B = X + W_B$$

dove la concentrazione X di CO_2 viene modellata come una variabile Gaussiana, a media m_x e varianza σ_x^2 note (si pensi ad un esperimento preliminare tramite il quale abbiamo ottenuto questo modello) e W_A e W_B sono variabili aleatorie Gaussiane, indipendenti, indipendenti da X , a media nulla e varianza σ_A^2 e σ_B^2 rispettivamente.

1. Ricavare l'espressione dello stimatore a minima varianza di X basato sulla misura Y_A e su entrambe le misure Y_A ed Y_B .
2. Scrivere l'espressione per la varianza d'errore nei due casi.
3. cosa succede se $\sigma_x^2 \rightarrow \infty$. Cosa significa ?

Esercizio 8 Si voglia stimare il valore dell'accelerazione di gravità in un determinato punto della terra. Si hanno a disposizione N pezzi di masse m_i che si possono considerare note con precisione. Si disponga di uno strumento (una bilancia!) che fornisce misure di forza F_i che si possono modellare (a seguito di imprecisioni di misura, di incertezza nel modello della molla ecc.) come

$$F_i = g_0 m_i + n_i$$

dove n_i sono Gaussiani, indipendenti, a media nulla e varianza σ^2 (incognita).

1. si fornisca l'espressione dello stimatore a massima verosimiglianza di g_0 e di σ^2 .
2. si ricavi la varianza dell'errore di stima di g_0 e la sua stima a massima verosimiglianza
3. si supponga di ottenere un risultato $\hat{g}_{ML} = 9.86$ e $\hat{\sigma}_{ML}^2 = 25 * 10^{-4}$. Come verifichereste se il risultato è compatibile con il risultato atteso di $g_0 = 9.81$ o se si può concludere che ci si trova in un punto della terra in cui l'accelerazione è più alta?

[LA RISPOSTA A QUESTA DOMANDA RICHIEDE NOZIONI CHE NON ABBIAMO INTRODOTTO A LEZIONE. NON SI CHIEDE UN RISULTATO NUMERICO. CERCARE DI UTILIZZARE GLI STRUMENTI NOTI PER DARE UNA RISPOSTA "SENSATA"]

Esercizio 9 Sia data la seguente distribuzione di probabilità:

	Y		
	1	2	4
X			
2	0.1	0	0.1
3	0	0.2	0
5	0.2	0.1	0.1
6	0	0	0.2

L'elemento in posizione (i, j) della tabella indica la probabilità congiunta della coppia di valori di X e Y che si trovano rispettivamente nella riga i -esima e nella colonna j -esima, es. $P[X=3, Y=2]=0.2$.

1. Si determini $P[X = 3]$
2. Si determini la distribuzione condizionata di Y dato $X = 5$.
3. Si stabilisca se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 10 Si effettuino 2 misure $Y_A = X + N_A$ e $Y_B = X + N_B$ di una grandezza incognita X . Si assuma che N_A ed N_B siano variabili aleatorie Gaussiane, indipendenti, a media zero e varianze σ_A^2 e σ_B^2 rispettivamente.

1. Si assuma X sia una variabile aleatoria Gaussiana, a media m , varianza σ_x^2 ed indipendente da N_A ed N_B . Si scriva lo stimatore (Bayesiano) a minima varianza di X basato su Y_A ed Y_B .
2. Si modelli invece X come una quantità fissa ma incognita e si assuma di avere a disposizione una terza misura m , indipendente da Y_A ed Y_B , a media X e varianza $\sigma_m^2 = \sigma_x^2$. Si ricavi lo stimatore lineare (corretto) a minima varianza basato sulle misure Y_A , Y_B ed m .

(Sugg. si usi il fatto che lo stimatore a minima varianza di X basato su Y_A , Y_B ed m si può scrivere nella forma $\hat{X} = (1 - \alpha - \beta)m + \alpha Y_A + \beta Y_B$ dove α e β si ottengono minimizzando la varianza dell'errore di stima.)

3. Si dica che relazione c'è tra gli stimatori ottenuti al punto 1 e 2.¹ Spiegare il significato.

¹Si usi, se necessario, il fatto che $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$

Esercizio 11 Si supponga di effettuare N misure $Y_i, i = 1, \dots, N$ di una grandezza incognita θ che possono essere modellate come:

$$Y_i = \theta + N_i$$

dove N_i sono variabili aleatorie incorrelate a media zero e varianza σ_i^2 .

Si consideri lo stimatore $\hat{\theta}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$. Trovare un valore $\alpha(\epsilon, N)$ che soddisfi

$$P[|\hat{\theta}_N - \theta| > \epsilon] < \alpha(\epsilon, N)$$

Cosa succede ad $\alpha(\epsilon, N)$ se $N \rightarrow \infty$?

Esercizio 12 Si assuma che il processo aleatorio stazionario $\{y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ può essere modellato con un modello $AR(2)$

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + e(t) \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

dove $e(t)$ è rumore bianco a media nulla e varianza σ^2

1. Si scriva l'espressione del predittore lineare ad un passo $\hat{y}(t|t-1)$.
2. Si scriva l'espressione del predittore lineare a due passi $\hat{y}(t|t-2)$.
3. Supponendo siano a disposizione N misure $y(t), t = 1, \dots, N$, si scriva l'espressione dello stimatore di a_1 e a_2 a minimo errore di predizione.

Esercizio 13 Si consideri il sistema lineare

$$y(t) = F(z)u(t) + G(z)e(t)$$

dove $F(z) = z^{-1}F_1(z)$ ed $F_1(z)$ è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile e $G(z)$ è causale e causalmente invertibile ($G(z)$ e $G^{-1}(z)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi BIBO e causali) con $G(\infty) = 1$.

1. Si scriva l'espressione del predittore lineare $\hat{y}(t|t-1)$.

Suggerimento: Si osservi che $y(t) = F(z)u(t) + G(z)e(t) = F(z)u(t) + (G(z) - 1)e(t) + e(t)$; usando il fatto che $G(\infty) = 1$ si osservi che $G(z) - 1$ contiene un ritardo puro, e quindi $F(z)u(t) + (G(z) - 1)e(t)$ è una funzione lineare di $u(s), s < t$ ed $e(s), s < t$. Ne segue che $\mathbb{E}[(F(z)u(t) + (G(z) - 1)e(t))e(t)] = 0$.

2. (**Controllo a Minima Varianza**)[DIFFICILE] Si assuma che gli zeri di $F_1(z)$ siano all'interno del cerchio unitario e sia $r(t)$ un segnale di riferimento; si assuma che, all'istante t , sia disponibile il valore di $r(t+1)$. Si vuole progettare un controllore della forma

$$u(t) = H_1(z)r(t+1) + H_2(z)y(t) = zH_1(z)r(t) + H_2(z)y(t)$$

dove $H_2(z)$ e $H_1(z)$ sono BIBO e causali, in modo che sia minimizzata la potenza dell'errore di inseguimento

$$\mathbb{E}[(y(t) - r(t))^2]$$

Soluzione: $H_1(z) = \frac{G(z)}{F_1(z)}$ $H_2(z) = -\frac{G(z)-1}{F(z)}$

Esercizio 14 Si descriva il meccanismo di "tuning" del Filtro di Kalman

Esercizio 15 Sia $d(t)$ un segnale di disturbo a bassa frequenza che può essere modellato tramite il modello di stato

$$\begin{cases} x(t+1) &= 0.9x(t) + w(t) \\ d(t) &= 1.8x(t) + w(t) \end{cases}$$

dove $w(t)$ è un rumore bianco a media nulla e varianza σ_w^2

Sia $y(t)$ il segnale di uscita del modello di stato

$$\begin{cases} s(t+1) &= As(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cs(t) + n(t) \end{cases}$$

dove $v(t)$ ed $n(t)$ sono rumori bianchi scorrelati, a media nulla e varianze, rispettivamente, Q ed R e l'ingresso $u(t)$ è misurabile. Le matrici A, B, C, Q, R sono note.

Sia ora $z(t)$ una misura rumorosa di $y(t)$ della forma $z(t) = y(t) + d(t)$ dove d ed y sono incorrelati. Si vuole stimare la grandezza $y(t)$ sulla base di misure $z(s), u(s), s \leq t$.

Costruire un filtro di Kalman per calcolare $\hat{y}(t|t) := \hat{E}[y(t)|z(s), u(s), s \leq t]$.

Commento: questo esercizio modella molte situazioni nelle quali un segnale viene misurato con rumore. Si conoscono un modello del segnale (ad esempio da considerazioni fisiche) e del rumore. Si vuole costruire (per scopi di controllo, predizione, monitoraggio etc.) uno stimatore della grandezza di interesse $y(t)$ a partire dalle misure rumorose $z(t)$.

Esercizio 16 [Intervalli di Confidenza]

Sia $\hat{\theta}_N$ uno stimatore per un parametro (scalare per semplicità) θ . Si assuma che $\hat{\theta}_N$ sia una variabile Gaussiana a media θ e Varianza σ^2 .

Indicare un procedimento per trovare un valore Δ in modo che l'intervallo (aleatorio)

$$I(\hat{\theta}_N, \Delta) := [\hat{\theta}_N - \Delta/2, \hat{\theta}_N + \Delta/2]$$

soddisfi alla condizione

$$P[\theta \in I(\hat{\theta}_N, \Delta)] = \alpha \quad (2)$$

per un assegnato valore α .

*Il significato di questo esercizio è il seguente: Supponiamo $\alpha = 0.95$. La condizione (2) ci dice che l'intervallo aleatorio $I(\hat{\theta}_N, \Delta)$ ha probabilità 0.95 di contenere il valore vero (ed incognito) del parametro θ . In termini di esperimenti questo fatto si può interpretare nel seguente modo: si considerino molti esperimenti $i = 1, \dots, M$ (indipendenti) di stima del parametro θ , per ciascuno dei quali si ottiene un valore generalmente diverso della stima, diciamo $\hat{\theta}_N^i$, e, di conseguenza, un intervallo $I^i = I(\hat{\theta}_N^i, \Delta) := [\hat{\theta}_N^i - \Delta/2, \hat{\theta}_N^i + \Delta/2]$. Allora, mediamente, il 95% di questi intervalli contiene il parametro vero θ . Nella terminologia statistica si dice che l'intervallo $I(\hat{\theta}_N, \Delta)$ è un intervallo di confidenza del $\alpha * 100\%$ per il parametro θ .*

Esercizio 17 [Minimi quadrati con “forgetting factor”]

Si consideri il modello lineare nei parametri

$$y(t) = \varphi^\top(t)\theta + e(t) \in \mathbb{R}$$

dove $\varphi(t)$ è un vettore di variabili misurabile (eventualmente contenente anche valori passati di y , ($y(s), s < t$), θ è un vettore di parametri incogniti ed $e(t)$ è un rumore bianco (scalare) a media zero e varianza σ^2 .

Si assuma che il parametro θ possa essere lentamente variabile, o eventualmente costante a tratti.

Si vuole costruire un algoritmo di stima per θ che sia in grado di “seguire” eventuali variazioni del parametro θ . Come abbiamo già visto a lezione questo si può fare utilizzando il filtro di Kalman (si vedano le note, pag. 137 e seguenti). Una soluzione alternativa consiste nel considerare una versione “pesata” dell'errore di predizione:

$$J_N(\theta) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \lambda^{N-t} \|y(t) - \varphi^\top(t)\theta\|^2 \quad |\lambda| < 1 \quad (3)$$

Il ruolo di λ è quello di “pesare” in maniera decrescente gli errori di predizione $y(t) - \varphi^\top(t)\theta$ al diminuire di t (cioè nel passato); per questo motivo λ prende il nome di “forgetting factor” (fattore d'oblio in italiano).

1. Si trovi lo stimatore $\hat{\theta}_N(\lambda)$ che risolve il problema

$$\hat{\theta}_N(\lambda) := \arg \min_{\theta} J_N(\theta)$$

2. (**DIFFICILE**) Si ricavino delle equazioni ricorsive (in N) per $\hat{\theta}_N(\lambda)$. *Sugg: si deve utilizzare il Lemma di Inversione di Matrice*
3. Confrontare le equazioni trovate al punto precedente con le equazioni che abbiamo ottenuto a lezione utilizzando il filtro di Kalman.