ESERCIZIO

Si assuma i dati siano generati dal modello "VERO"

$$y(t) = a_1^\circ y(t-1) + b_0^\circ u(t) + e_0(t) \qquad (*)$$

DOVE $e(t)$ BIANCO, $\mathbb{E}[e_0(t)] = 0$ $\quad Var[e_0(t)] = \sigma^2$

$u(t)$ BIANCO $\quad \mathbb{E}[u(t)] = 0$ $\quad Var[u(t)] = \sigma_u^2$

Si cerchi di identificare un modello del tipo

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + e(t)$$

utilizzando il metodo PEM. Si denoti $\theta := [b_0 \; b_1]^T$

e $\hat{\theta}_N$ lo stimatore PEM con N dati.

DOVE CONVERGE $\hat{\theta}_N$ per $N \longrightarrow +\infty$?

SOLUZIONE:

Lo stimatore PEM converge all'insieme dei punti di minimo di

$$J(\theta) := \mathbb{E}\left[\left(y(t) - \hat{y}_\theta(t|t-1)\right)^2\right] \qquad (**)$$

dove $\hat{y}_\theta(t|t-1) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1)$

PER Calcolare $(**)$ bisogna usare $(*)$ nel seguente modo:

$$J(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(a_1^\circ y(t-1) + b_0^\circ u(t) + e_0(t) - \hat{y}_\theta(t|t-1)\right)^2\right] =$$

ES. 2

$$= \mathbb{E}\left[\left(a_1^\circ y(t-1) + (b_0^\circ - b_0)u(t) - b_1 u(t-1) + e_0(t)\right)^2\right]$$

$$= (a_1^\circ)^2 \sigma_y(0) + (b_0^\circ - b_0)^2 \sigma_u(0) + b_1^2 \sigma_u(0) + \sigma^2 +$$

$$+ 2 a_1^\circ (b_0^\circ - b_0) \operatorname{cov}\{y(t-1), u(t)\} - 2 b_1 a_1^\circ \operatorname{cov}\{y(t-1), u(t-1)\} +$$

$$+ 2 (b_0^\circ - b_0) b_1 \operatorname{cov}\{u(t), u(t-1)\} +$$

CON:

$$\sigma_y(0) = \operatorname{Var}\{y(t)\}$$

$$\sigma_u(0) = \operatorname{Var}\{u(t)\} = \sigma_u^2$$

$\operatorname{cov}\{u(t), y(t-1)\} = 0 \longrightarrow$ xchè $u(t)$ è bianco, scorrelato da $e(t)$

$\operatorname{cov}\{y(t-1), u(t-1)\} = b_0^\circ \sigma_u^2 \longrightarrow$ [Usando (*) della pag. precedente]

$\operatorname{cov}\{u(t), u(t-1)\} = 0 \longrightarrow$ xchè $u(t)$ è bianco

$$\Rightarrow J(\theta) = (a_1^\circ)^2 \sigma_y(0) + (b_0^\circ - b_0)^2 \sigma_u^2 + b_1^2 \sigma_u^2 + \sigma^2 - 2 b_1 a_1^\circ \sigma_u^2 b_0^\circ$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial b_0} = -2(b_0^\circ - \hat{b}_0)\sigma_u^2 = 0 \iff \hat{b}_0 = b_0^\circ$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial b_1} = 2 \hat{b}_1 \sigma_u^2 - 2 a_1^\circ \sigma_u^2 b_0^\circ = 0 \iff \hat{b}_1 = a_1^\circ b_0^\circ$$

L'UNICO MINIMO DI $J(\theta)$ SI TROVA PER $\begin{cases} \hat{b}_0 = b_0^\circ \\ \hat{b}_1 = a_1^\circ b_0^\circ \end{cases}$