II COMPITINO SEGNALI E SISTEMI
AA 2005/06

Teoria 1. [5 punti] Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo discreto, descritto da un'equazione alle differenze lineare e a coefficienti costanti, si derivi l'espressione della risposta in evoluzione libera ed in evoluzione forzata operando nel dominio della zeta trasformata.

Teoria 2. [5 punti]

Sia dato un segnale a tempo continuo $v(t)$, periodico di periodo T; si indichi con v_k il $k-$esimo coefficiente di Fourier. Si dimostri che vale la relazione

$$v_k = \frac{1}{T} V_g\left(\frac{k}{T}\right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove $V_g(f)$ é la trasformata di Fourier di un generatore $v_g(t)$, cioé di un segnale $v_g(t)$ tale che

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_g(t - kT)$$

Suggerimento: si scriva $v(t)$ mediante il suo sviluppo in serie di Fourier, se ne calcoli la trasformata e si confronti il risultato con la trasformata del segnale ottenuto per ripetizione periodica di $v_g(t)$.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

II COMPITINO DI SEGNALI E SISTEMI
AA 2005/06

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$v(k) - (a+1)v(k-1) + av(k-2) = u(k) - u(k-1), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

con a parametro reale.

i) [1+2 punti] Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) [1 punto] Si calcoli la risposta impulsiva del sistema.

iii) [3 punti] Si calcoli, per $a = -2$, la risposta del sistema in corrispondenza del segnale in ingresso

$$u(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k)$$

e delle condizioni iniziali

$$v(-1) = 1 \qquad \text{e} \qquad v(-2) = 0.$$

Esercizio 2. Si consideri il segnale periodico di periodo T dato in $(-T/2, T/2)$ dalla seguente espressione

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-T/2, -T/4) \cup (T/4, T/2). \\ 2, & t \in (-T/4, T/4). \end{cases}$$

Si chiede di calcolare

i) [5 punti] i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier esponenziale e trigonometrico di $u(t)$;

ii) [4 punti] l'uscita $v(t)$ del filtro con risposta in frequenza $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{W}\right)$, $0 < W < 2/T$, in corrispondenza all'ingresso $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

iii) [4 punti] i vincoli che deve soddisfare la banda monolatera W del filtro passabanda ideale di risposta in frequenza

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f - 1/T}{W}\right) + \Pi\left(\frac{f + 1/T}{W}\right)$$

in grado di fornire un'uscita sinusoidale di frequenza $1/T$, in corrispondenza al segnale $u(t)$ in ingresso.

SOLUZIONI

Teoria 1. Si veda il libro di testo, capitolo 6 paragrafo 6.8.

Teoria 2. Si veda il libro di testo, pag. 155, 156.

Esercizio 1. i) L'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 - (a+1)z + a = (z-a)(z-1).$$

Quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile. Per verificare se esistano o meno valori di a per i quali il sistema è BIBO stabile determiniamo la fdt del sistema. Tenuto conto che la fdt è data da

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{(z-a)(z-1)} = \frac{z}{z-a},$$

segue che il sistema è BIBO stabile per $|a| < 1$.

ii) È immediato verificare che la risposta impulsiva del sistema è data da

$$h(k) = a^k \delta_{-1}(k)$$

per $a \neq 0$ e

$$h(k) = \delta(k)$$

per $a = 0$.

iii) Per $a = -2$ il sistema ammette come radici caratteristiche -2 e 1 e, quindi, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$v_\ell(k) = c_1(-2)^k + c_2, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

È immediato verificare che alle assegnate condizioni iniziali corrispondono $c_1 = -4/3$ e $c_2 = 1/3$ e, quindi, l'evoluzione libera è data da

$$v_\ell(k) = -\frac{4}{3}(-2)^k + \frac{1}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Per quanto riguarda, invece, la risposta in evoluzione forzata

$$V_f(z) = H(z)U(z) = \frac{z}{z+2}\frac{z}{z+1} = \frac{z^2}{(z+1)(z+2)}.$$

La decomposizione in frazioni parziali di $V_1(z) = V_f(z)/z$ restituisce

$$V_1(z) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

a cui corrisponde la seguente espressione nel dominio del tempo

$$v_f(k) = [2(-2)^k - (-1)^k]\delta_{-1}(k).$$

Esercizio 2. i) È immediato verificare che un generatore del segnale $u(t)$ è dato da

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \Pi\left(\frac{2t}{T}\right)$$

a cui corrispondono i coefficienti

$$u_k = \mathrm{sinc}(k) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & k = 0, \\ 0, & |k| \geq 1, \text{pari}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), & |k| \geq 1, \text{dispari}. \end{cases}$$

ii) Il filtro passabasso ideale $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{W}\right)$, $0 < W < 2/T$ é tale che $H(f) = 0$ $\forall f = k/T$, $|k| \geq 1$, e di conseguenza l'uscita $v(t)$ del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso $u(t)$ é data da

$$v(t) = H(0)u_0 = u_0 = \frac{3}{2}, \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

iii) Con considerazioni analoghe a quelle fatte sopra, con riferimento alla serie trigonometrica di Fourier, é necessario e sufficiente che tutte le armoniche del segnale di ingresso, esclusa quella a frequenza $1/T$, vengano fermate dal filtro. Di conseguenza deve valere $H(f) = 0$ per $f = k/T$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\}$. Di conseguenza la banda monolatera W del filtro passabanda deve essere tale che $0 < W < 2/T$.