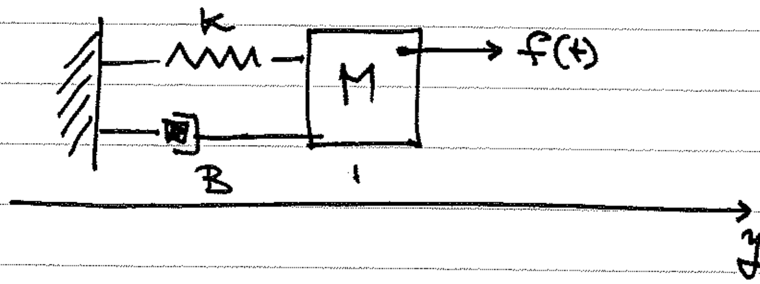
IL FILTRO DI KALMAN

Esempio 1

Si consideri il sistema dinamico:



$$M\ddot{y}(t) = f(t) - B\dot{y}(t) - Ky(t)$$

DEFINIAMO: $\quad x(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad = Ax(t) + Bf(t) \quad (*)$$

Si assuma siano disponibili misure (rumorose) di accelerazione:

$$z_a(t) = \ddot{y}(t) + r_a(t) \qquad r_a(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$$

e misure rumorose di forza

$$z_f(t) = f(t) + r_f(t) \qquad r_f(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

PROBLEMA: Stimare la posizione della massa M a partire da misure rumorose di accelerazione e di forza.

MODELLO A TEMPO DISCRETO

Assumendo che la forza $f(t)$ sia costante in intervalli di tipo $[kT, (k+1)T)$ si può ottenere il modello a tempo discreto:

$$X((k+1)T) = A_d X(kT) + B_d f(kT) \qquad (**)$$

DOVE:

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = \int_0^T e^{As} B \, ds$$

pag. precedente

Pf: Basta osservare che la soluzione di $(*)$ nell'intervallo $[kT, (k+1)T)$ ha la forma:

$$X(t) = e^{A(t-kT)} X(kT) + \int_{kT}^{t} e^{A(t-s)} B f(s) \, ds$$

e quindi, usando il fatto che $f(s)$ è costante in $s \in [kT, (k+1)T)$ si ottiene:

$$X((k+1)T) = e^{AT} X(kT) + \left[\int_0^T e^{As} B \, ds \right] f(kT)$$

IPOTESI: La forza applicata varia "lentamente" e quindi si può modellare con:

$$(***)\quad f((k+1)T) = f(kT) + w_f(k) \qquad w_f(t) \text{ BIANCO } \sim N(0,\sigma_w^2)$$

PS: La varianza σ_w^2 misura con che velocità può variare $f(kT)$. Ovviamente modelli più sofisticati sono possibili.

Mettendo insieme (**) pag. precedente e (***) si ottiene: [Si Assuma x semplicità $T=1$]

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ f(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ f(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_f(k)$$

$$z_a(k) = \begin{bmatrix} -K/M & -B/M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ f(k) \end{bmatrix} + r_a(k)$$

$$z_f(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ f(k) \end{bmatrix} + r_f(k)$$

cioè si può scrivere nella forma:

$$s(k) := \begin{bmatrix} x(k) \\ f(k) \end{bmatrix}$$

$$s(k+1) = A_s\, s(k) + B_s\, w_f(k)$$

$$z(k) = C_s\, s(k) + r(k)$$

<u>DOVE:</u> $A_s := \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B_s := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$C_s := \begin{bmatrix} -K/M & -B/M & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(k) := \begin{bmatrix} r_a(k) \\ r_f(k) \end{bmatrix}$$

Il problema di stimare la posizione $y(k)$ basandosi su misure $\{z_a(h), z_f(h)\}$ $h \in [0, k]$

è ovviamente un <u>sottoproblema</u> della stima dello stato $s(k)$ a partire dalle misure.

$\{z_a(h), z_f(h)\}$ $h \in [0, k]$, cioè di Trovare:

$$\hat{S}(k|k) := \hat{E}\left[S(k) \mid H_{[0,k]}(z_a, z_f) \right]$$

ESEMPIO 2

* Stima (e soppressione) di un disturbo sinusoidale.
  (es. una VIBRAZIONE)

Supponiamo un segnale $y(t)$ sia affetto da un disturbo $d(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ dove ω È NOTA ma non lo sono l'ampiezza A e la fase φ.

* Assumiamo siano disponibili misure

$$z(t) := y(t) + d(t)$$

e si voglia eliminare il disturbo sinusoidale, cioè si vuole calcolare

$$\hat{y}(t|t) := \hat{E}[\, y(t) \,/\, H_{[0,t]}(z)\,]$$

(o, analogamente, $\hat{d}(t|t) := \hat{E}[\, d(t) \,/\, H_{[0,t]}(z)\,]$

$$= z(t) - \hat{y}(t|t)\,)$$

OSSERVAZIONI:

$$e^{j(\omega(t+1)+\varphi)} = e^{j\omega} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos\left[\omega(t+1)+\varphi\right] + j \sin\left[\omega(t+1)+\varphi\right] =$$

$$= \left[\cos\omega + j\sin\omega\right]\left[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \cos\left[\omega(t+1)+\varphi\right] = \cos\omega\cos(\omega t+\varphi) - \sin\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\sin\left[\omega(t+1)+\varphi\right] = \sin\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi) + \cos\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x(t) := \begin{bmatrix} A\cos(\omega t+\varphi) \\ A\sin(\omega t+\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t+1) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} x(t)}$$

MODELLO PER IL SEGNALE OSSERVATO $z(t)$?

Supponiamo sia disponibile un modello per $y(t)$ [$\equiv$ sia nota la covarianza del processo $y(t)$] e sia scrivibile in forma di stato:

$$\begin{cases} \xi(t+1) = A\xi(t) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = C\xi(t) + D\varepsilon(t) \end{cases}$$

Come abbiamo visto nella pagina precedente:

$$X(t+1) = A_\omega X(t) \qquad A_\omega = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$S(t) := \begin{bmatrix} \xi(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} S(t+1) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_\omega \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} C & 1 & 0 \end{bmatrix} S(t) + D\,\varepsilon(t) \end{cases} \qquad (*)$$

STIMARE $d(t)$ ≡ stimare la prima componente di $X(t) = \begin{bmatrix} A \cos \omega t \\ A \sin \omega t \end{bmatrix}$

⇒ Dobbiamo stimare lo stato $s(t)$ del modello (*) a partire da misure $z(k)$, $k \in [0,t]$

$$\boxed{\hat{S}(t|t) := \hat{E}\left[s(t) \mid H_{[0,t]}(z) \right]}$$