COMPORTAMENTO "ASINTOTICO" DI $P(t|t-1)$

Abbiamo visto che le matrici $P(t|t)$ e $P(t|t-1)$ soddisfano alle equazioni:

$$P(t+1|t) = F P(t|t) F^T + \tilde{Q}$$

$$P(t|t) = P(t|t-1) - P(t|t-1) C^T \left(C P(t|t-1) C^T + R \right)^{-1} C P(t|t-1)$$

$$= [I - L(t)C] P(t|t-1) [I - L(t)C]^T + L(t) R L^T(t)$$

Dove $L(t) := P(t|t-1) C^T [C P(t|t-1) C^T + R]^{-1}$

LE DUE EQUAZIONI SI POSSONO COMBINARE OTTENENDO:

$$\boxed{P(t+1|t) = \Gamma(t) P(t|t-1) \Gamma^T(t) + K(t) R K^T(t) + \tilde{Q}}$$

Dove: $K(t) := F L(t)$
$\Gamma(t) := F - K(t) C$

EQUAZIONE DI RICCATI

DOMANDA 1

Come si comporta quando $t \to +\infty$?

DOMANDA 2

CHE SIGNIFICATO HA $\Gamma(t) = F - K(t)C$?

- Rispondiamo prima alla domanda 2:

$\Rightarrow$ $\Gamma(t)$ è la matrice che regola la dinamica dell'errore $\tilde{x}(t+1|t)$, nel senso che:

$$\boxed{\tilde{x}(t+1|t) = \Gamma(t)\,\tilde{x}(t|t-1) + \tilde{\omega}(t) - K(t)\,v(t)}$$

Prova: $\quad x(t+1) = F x(t) + S R^{-1} y(t) + \tilde{\omega}(t)$

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t) + S R^{-1} y(t)$$

$$= F\hat{x}(t|t-1) + K(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\right] + S R^{-1} y(t)$$

Facendo la differenza membro a membro:

$$\tilde{x}(t+1|t) = F\tilde{x}(t|t-1) - K(t)C\tilde{x}(t|t-1) + \tilde{\omega}(t) - K(t)\,v(t)$$

$$= \left[F - K(t)C\right]\tilde{x}(t|t-1) + \tilde{\omega}(t) - K(t)\,v(t)$$

C.V.D

DESIDERATA: $\quad |\lambda(\Gamma_\infty)| < 1 \qquad \left[\Gamma_\infty := \lim_{t\to+\infty} \Gamma(t)\right]$

(La dinamica dell'errore deve essere stabile)

TEOREMA:

$$\lim_{t \to +\infty} P(t|t-1) = P_\infty \geq 0 \quad \forall \quad P(0|-1) \geq 0$$

$$\Gamma_\infty := F - K_\infty C \quad \text{s.t.} \quad |\lambda(\Gamma_\infty)| < 1$$

$$K_\infty := F P_\infty C^T (C P_\infty C^T + R)^{-1}$$

In questo caso si dice che la soluzione è STABILIZZANTE cioè rende Γ_∞ STABILE

$\Uparrow \quad \Downarrow$

(F, C) RIVELABILE ($\equiv$ Il sottospazio corrispondente agli autovalori instabili di F è osservabile con C)

$(F, \tilde{Q}^{1/2})$ STABILIZZABILE ($\equiv$ Il sottospazio corrispondente agli autovalori instabili di F è raggiungibile con $\tilde{Q}^{1/2}$)

OSS: In particolare

(F, C) OSSERVABILE $\Rightarrow$ (F, C) Rivelabile

$(F, \tilde{Q}^{1/2})$ RAGGIUNGIBILE $\Rightarrow$ $(F, \tilde{Q}^{1/2})$ STABILIZZABILE