PREDITTORE PER UN MODELLO ARMA(n,m)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(t-i) = \sum_{i=0}^{m} c_i\, \epsilon(t-i)$$

$\mathcal{E}(t)$ bianco

$\mathrm{Var}\, \mathcal{E}(t) = 1$

In forma simbolica:

$$A^*(z^{-1})\, y(t) = C^*(z^{-1})\, \epsilon(t) \qquad A^*(z^{-1}) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}$$

$$C^*(z^{-1}) := \sum_{i=0}^{m} c_i z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, z^{-k}$$

$$\Rightarrow \quad h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z) = \frac{c_0}{a_0}$$

OSS: $H(z)$ CAUSALE e CAUSALMENTE INVERTIBILE:

$$H(z) = \frac{z^{n-m}\, C(z)}{A(z)} \qquad C(z) := z^m C^*(z^{-1})$$

$$A(z) := z^n A^*(z^{-1})$$

$$p_i = \text{ZERI DI } A(z) \;:\; |p_i| < 1$$

$$z_i = \text{ZERI DI } C(z) \;:\; |z_i| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}(t|t-1) = \left[H(z) - H(\infty)\right] H^{-1}(z)\, y(t)$$

$$= \frac{\bar{C}^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}\, y(t) \qquad \text{DOVE } \bar{C}^*(z^{-1}) := C^*(z^{-1}) - \frac{c_0}{a_0} A^*(z^{-1})$$

OSS: $\bar{C}^*(\infty) = C^*(\infty) - \frac{c_0}{a_0} A^*(\infty) = c_0 - \frac{c_0}{a_0} \cdot a_0 = 0$

IL PROCESSO DI INNOVAZIONE

Consideriamo $\{y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ t.c.

$$\varepsilon(t) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(t)$$

$\varepsilon(t)$ bianco

$\mathrm{Var}\, \varepsilon(t) = 1$

$\left.\begin{matrix} H(z) \\ H^{-1}(z) \end{matrix}\right\}$ BIBO e CAUSALI

Abbiamo visto che il predittore:

$$\hat{y}(t|t-1) = \left[H(z) - h(0) \right] H^{-1}(z)\, y(t)$$

$$= y(t) - h(0)\, \varepsilon(t) \qquad (*)$$

SIAMO INTERESSATI <u>ALL'ERRORE DI PREDIZIONE</u>

$$\boxed{e(t) := y(t) - \hat{y}(t|t-1)} \equiv \{e(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$$ È IL <u>PROCESSO DI INNOVAZIONE</u>

<u>DEFINIZIONE</u>: $\{e(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ si chiama

"processo di innovazione"

<u>OSS</u>: DA $(*)$ è immediato verificare che

$$\boxed{e(t) = h(0)\, \varepsilon(t)}$$

PERCHÈ SI CHIAMA <u>PROCESSO DI INNOVAZIONE</u>?

<u>OSS 1</u> $e(t) = h(0)\,\epsilon(t) \Rightarrow H_t^-(e) = H_t^-(\epsilon)$

<u>OSS 2</u> $\mathrm{cov}\{e(t), y(s)\} = 0 \quad \forall\, s < t$

$\Downarrow$

$e(t)$ è scorrelato da tutti gli elementi di $H_t^-(y) = H_t^-(e)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} H_{t+1}^-(y) = H_{t+1}^-(e) &= \mathrm{span}\{e(t)\} \oplus H_t^-(e) \\ &= \mathrm{span}\{e(t)\} \oplus H_t^-(y) \end{aligned}}$$

Somma "ortogonale"
gli elementi di $\mathrm{span}\{e(t)\}$ e quelli di $H_t^-(e) = H_t^-(y)$ sono scorrelati.

<u>INTERPRETAZIONE:</u>

$e(t)$ rappresenta "<u>quanto c'è di nuovo</u>" in $y(t)$ rispetto a $H_t^-(y)$