ESERCIZIO [Predittore per un modello ARMA(1,1) usando il filtro di Kalman]

Si consideri:

$$(*) \quad \begin{cases} x(t+1) = a\,x(t) + w(t) \\ y(t) = c\,x(t) + v(t) \end{cases} \qquad Var\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcolare $\hat{E}\left[\, x(t) \mid H_{[0,t)}(y) \right]$ e $\hat{E}\left[\, y(t) \mid H_{[0,t)}(y) \right]$

2. Cosa succede per $t \to +\infty$?

SOLUZIONE:

Dalle equazioni del filtro di Kalman si ottiene che:

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + L(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t|t-1) \right]$$

$$L(t) = P(t|t-1)C^T\left[C\,P(t|t-1)C^T + R \right]^{-1} = \frac{p(t|t-1)\,c}{c^2 p(t|t-1) + 1}$$

$$p(t|t) = p(t|t-1) - L(t)\left[c^2 p(t|t-1) + 1 \right] L^T(t)$$

$$= p(t|t-1) - \frac{c^2 p^2(t|t-1)}{c^2 p(t|t-1) + 1} = \frac{1}{1 + c^2 p(t|t-1)}$$

$$\hat{x}(t+1|t) = a\,\hat{x}(t|t)$$

$$p(t+1|t) = a^2 p(t|t) + 1$$

mettendo insieme il passo di predizione e quello di filtraggio

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = a\hat{x}(t|t-1) + aL(t)\left[y(t) - c\hat{x}(t|t-1)\right] \\ p(t+1|t) = \dfrac{a^2 p(t|t-1)}{1+c^2 p(t|t-1)} + 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE [cosa succede per $t \to \infty$]

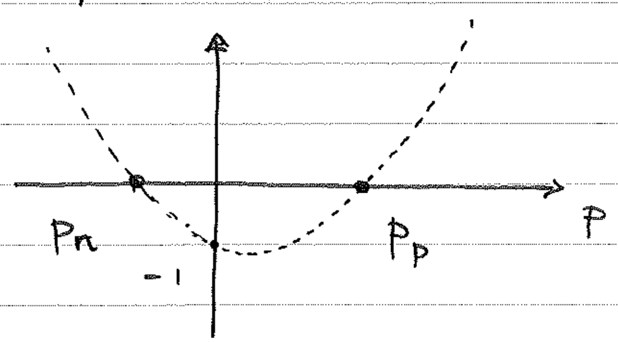
Se $p(t|t-1) \longrightarrow p$ allora deve valere:

$$p = \frac{a^2 p}{1+c^2 p} + 1 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad c^2 p^2 + \left[1 - a^2 - c^2\right] p - 1 = 0$$

$$p = \frac{1-a^2-c^2}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{(1-a^2-c^2)^2 + 4c^2}{4c^2}}$$

$p_n < 0$
$p_p > 0$



OSS: p è una varianza $\Rightarrow$ deve essere positiva.

Come evolve $p(t|t-1)$?

1) Calcoliamo $\Delta p(t) := p(t+1|t) - p(t|t-1)$

$$= -\left[\frac{c^2 p^2(t|t-1) + (1-a^2-c^2)\,p(t|t-1) - 1}{1 + c^2 p(t|t-1)}\right]$$

Se $p(t|t-1) > p_p \Rightarrow \Delta p(t) < 0$ [$p(t|t-1)$ DIMINUISCE]

se $0 < p(t|t-1) < p_p \Rightarrow \Delta p(t) > 0$ [$p(t|t-1)$ AUMENTA]

2) $\Delta p(t) := p(t+1|t) - p(t|t-1)$

$$= \frac{a^2 p(t|t-1)}{1+c^2 p(t|t-1)} + \cancel{1} - \frac{a^2 p(t-1|t-2)}{1+c^2 p(t-1|t-2)} - \cancel{1}$$

$$= \frac{a^2\left[p(t|t-1) - p(t-1|t-2)\right]}{\left(1+c^2 p(t|t-1)\right)\left(1+c^2 p(t-1|t-2)\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{a^2}{\left[1+c^2 p(t|t-1)\right]\left[1+c^2 p(t-1|t-2)\right]}}_{|\cdot| < 1 \quad [\text{se } |a| < 1]} \cdot \Delta p(t-1)$$

$\Rightarrow \Delta p(t)$ DIMINUISCE $\Rightarrow$ $\boxed{p(t|t-1) \text{ CONVERGE}}$

$$\Rightarrow \; p(t|t-1) \xrightarrow[t \to \infty]{} P_p = \frac{1-a^2-c^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{(1-a^2-c^2)^2+4c^2}{4c^2}}$$

$\Rightarrow$ A REGIME [i.e. con $t \to +\infty$]

$$(**)\;\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = a\hat{x}(t|t-1) + \bar{k}\left[y(t) - c\hat{x}(t|t-1)\right] \\ \qquad\qquad\;\; = (a-\bar{k}c)\hat{x}(t|t-1) + \bar{k}\, y(t) \\ y(t) = c\hat{x}(t|t-1) + e(t) \end{cases}$$

$\longrightarrow e(t) := y(t) - c\hat{x}(t|t-1)$ = errore di predizione di un passo

$$\bar{k} := a\bar{L} = a p_p c \left(c^2 p_p + 1\right)^{-1}$$

$$(a-\bar{k}c) = a - \frac{a p_p c^2}{c^2 p_p + 1} = \frac{a}{1 + c^2 p_p}$$

CHE SIGNIFICATO HA?

SCRIVIAMO:

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = a\hat{x}(t|t-1) + \bar{k}\, e(t) \\ y(t) = c\hat{x}(t|t-1) + e(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\left[C(zI-A)^{-1}\bar{K} + 1 \right]}_{H(z)} e(t)$$

$e(t)$ BIANCO, $\quad Var\{e(t)\} = C P_p C^T + 1 = c^2 P_p + 1$

$$\Phi_y(z) = \underbrace{\left[\frac{z-(a-c\bar{k})}{z-a} \right]}_{H(z)} \cdot \underbrace{\left[\frac{z^{-1}-(a-c\bar{k})}{z-a} \right]}_{H^T(1/z)} \underbrace{\left[c^2 P_p + 1 \right]}_{Var\{e(t)\}}$$

Si ricordi che siamo partiti dal modello (*) a pag 127. che ha funzione di trasferimento

$$W(z) = c(zI-a)^{-1}[1\ 0] + [0\ 1]$$

con ingresso $r(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad Var\{v(t)\} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_y(z) = W(z)\, Var\{v(t)\} \cdot W^T(1/z)$$

$$\overset{!}{=} \left[\frac{[c\ 0]}{z-a} + [0\ 1] \right] I \cdot \left[\frac{1}{z^{-1}-a} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{c^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{c^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} + 1 = \left[\frac{z-(a-c\bar{k})}{z-a} \right] \left[\frac{z^{-1}-(a-c\bar{k})}{z^{-1}-a} \right] (c^2 P_p + 1)}$$

OSSERVAZIONI:

Cosa si può dire su $|a - \bar{K}c|$?

$$a - \bar{K}c = \frac{a}{1 + c^2 P_P} \Rightarrow |a - \bar{K}c| < 1 \qquad (**)$$

⇨ Il filtro di Kalman a regime (= per $t \to \infty$) ha eseguito "gratis" la fattorizzazione spettrale di

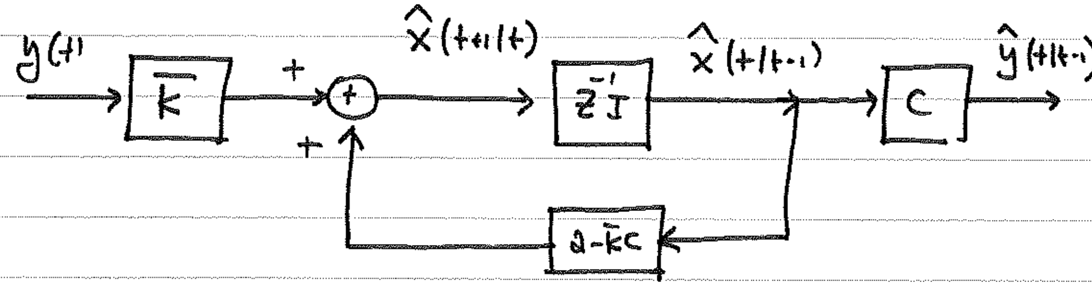
$$\Phi_y(z) = \frac{c}{(z-a)(z^{-1}-a)} + 1$$

EQUAZIONE DEL PREDITTORE

(**) a pag 130

$$\hat{x}(t+1|t) = (a - \bar{K}c)\,\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}\,y(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = c\,\hat{x}(t|t-1)$$



ESERCIZIO:

Verificare cosa succede della "matrice" $a-\bar{k}c$ ($\bar{k} := a\bar{p}c(c^2\bar{p}+1)^{-1}$) se $\bar{p}$ è la soluzione negativa dell'equazione (*) a pag 128.

SOLUZIONE: Deve risultare $a-\bar{k}c = \frac{1+c^2pp}{a}$ che è l'inverso di (**) a pag 132