TEORIA POLIEDRALE

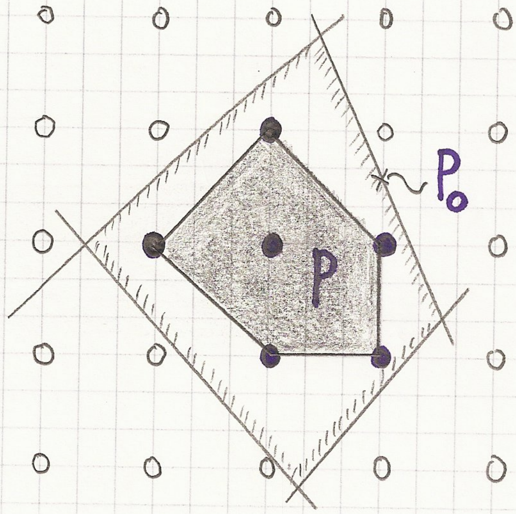
- MOTIVAZIONI
- POLIEDRI E POLITOPI
- DIMENSIONE DI UN POLIEDRO
- FACCE, FACCETTE E VERTICI
- DETERMINAZIONE DELLA DIMENSIONE DI UN POLIEDRO:
    - METODO DIRETTO
    - METODO INDIRETTO
    - ESEMPI
- LIFTING

POLIEDRALE È BELLO!

MOTIVAZIONI

- PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (PLI)

$$\min\{cx : Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ INTERO}\}$$



- POLIEDRI

$$P_0 := \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$P := \text{conv}\{x : Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ INTERO}\}$$

→ P_0 descritto mediante un sistema di disuguaglianze lineari

→ P descritto come luogo delle COMBINAZIONI CONVESSE delle soluzioni intere

- <u>OBIETTIVO</u>: DESCRIVERE P MEDIANTE VINCOLI LINEARI → RISOLVERE PLI COME $\min\{cx : x \in P\}$

- DESCRIZIONE DI P:

$$P = \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{ll} Bx = d & \text{(equazioni)} \\ Dx \leq e & \text{(disuguagl.)} \end{array} \right\}$$

(spesso un numero ESPONENZIALE di vincoli)

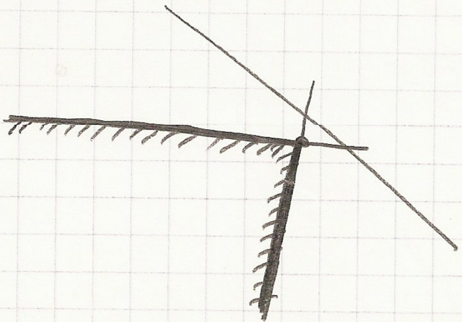
- DESCRIZIONE MINIMALE di P:

(1) Quali EQUAZIONI ?

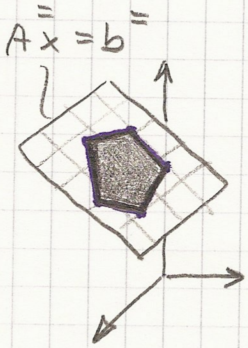
- Tutte quelle di $Bx = d$, meno quelle linearmente dipendenti !
- Alcune equazioni "nascoste" in $Dx \leq e$!
- $\Rightarrow$ SISTEMA MASSIMALE DI EQUAZIONI VALIDE E LINEARMENTE INDIPENDENTI : EQUATION SYSTEM

(2) Quali DISUGUAGLIANZE ?

- Tutte quelle non ricavabili come "conseguenza lineare" delle altre (FARKAS' LEMMA) !



- PUNTO (1) [EQUAZIONI]

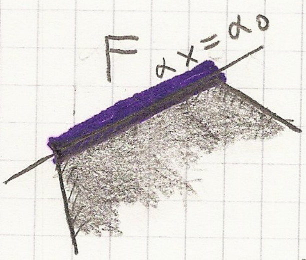


Quante (e quali) sono le equazioni di un EQUATION SYSTEM per P ?

→ STUDIO DELLA **DIMENSIONE** DI P !

- PUNTO (2) [DISUGUAGLIANZE]

Una assegnata disuguaglianza $\alpha x \le \alpha_0$ è ricavabile come "conseguenza lineare" di ALTRE disuguaglianze valide ?



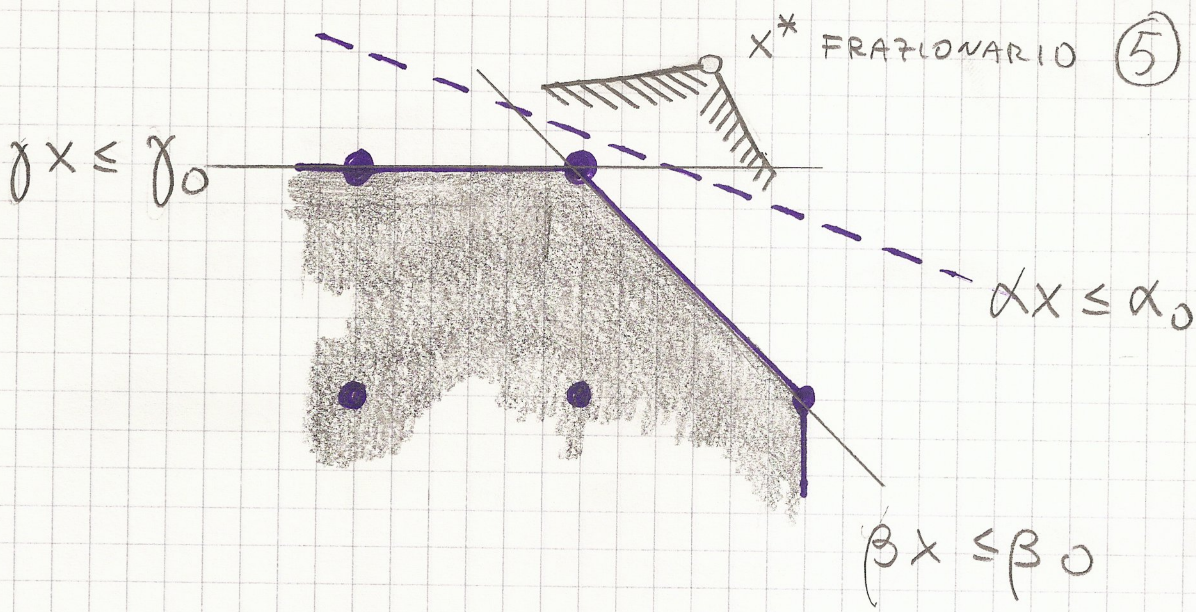
→ $\alpha x \le \alpha_0$ definisce una **FACCETTA** di P ?

→ studio della **DIMENSIONE** di $F := \{ x \in P : \alpha x = \alpha_0 \}$!

- STUDIO DELLA **DIMENSIONE** DI UN POLIEDRO

⟺ STUDIO DELLA **RIDONDANZA LINEARE** DI UN SISTEMA DI VINCOLI

⇒ FONDAMENTALE PER CUTTING PLANE !



- $\alpha x \leq \alpha_0$ VIOLATO DA x^*, MA RICAVABILE A PARTIRE DA $\beta x \leq \beta_0$ E $\gamma x \leq \gamma_0$

$\Rightarrow$ INVECE DI AGGIUNGERE ALL' LP IL VINCOLO $\alpha x \leq \alpha_0$, CONVIENE AGGIUNGERE I DUE VINCOLI $\beta x \leq \beta_0$ E $\gamma x \leq \gamma_0$ (ALMENO UNO DEI QUALI È VIOLATO DA x^*)

- STUDIO POLIEDRALE DI UNA CLASSE DI VINCOLI $\{\alpha x \leq \alpha_0\}$

  - dimostro che $\alpha x \leq \alpha_0$ definisce una FACCETTA di P $\rightarrow$ 
  - dimostro che $\alpha x \leq \alpha_0$ **NON** definisce una FACCETTA di P ($\Leftarrow$ VINCOLI PIÙ FORTI !) $\rightarrow$ 
  - non riesco a dimostrare faccetta / non-faccetta $\rightarrow$ 

POLIEDRI E POLÍTOPI

- SPAZIO $\mathbb{R}^n$
- SEMISPAZIO $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x \leq \alpha_0\}$
- IPERPIANO $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x = \alpha_0\}$
- POLIEDRO := INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SEMISPAZI (E/O IPERPIANI)
- POLÍTOPO := POLIEDRO LIMITATO

<u>ES</u>:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \ 0 \leq x \leq 1\}$$

- <u>FATTO</u>: P POLÍTOPO $\Leftrightarrow \exists \ x^1, x^2, \dots, x^m \in P$

tali che

$$P = \text{conv}\{x^1, x^2, \dots, x^m\} :=$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i x^i, \quad \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m \geq 0, \quad \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^m = 1\}$$

P = combinazione convessa di punti

DIMENSIONE DI UN POLIEDRO

DEFINIZIONI

Sia $X := \{x^1, x^2, \dots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$.

- X **LINEARMENTE INDIPENDENTE** $\overset{def}{\iff}$

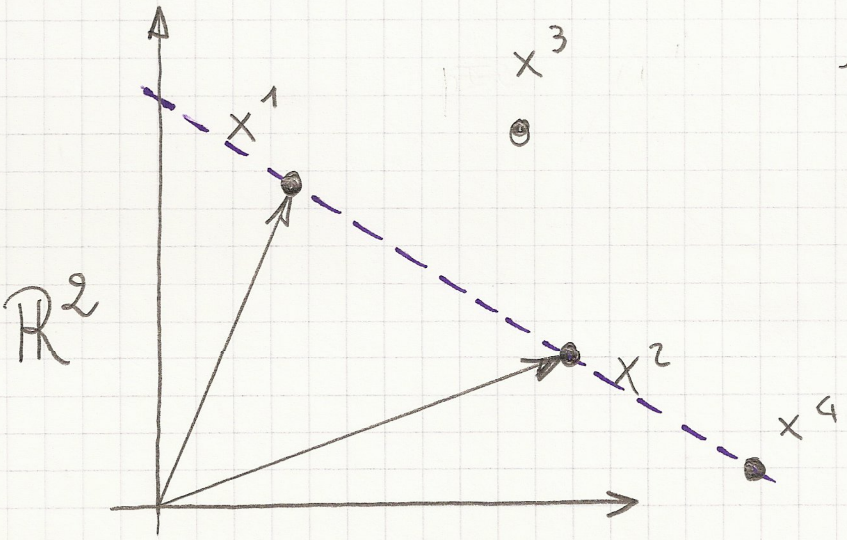
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^i x^i = 0 \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^k = 0$$

(altrim., $\exists\, \ell : x^\ell = \sum_{i \neq \ell} \mu^i x^i$)

- X **AFFINEMENTE INDIPENDENTE** $\overset{def}{\iff}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} \lambda^i x^i = 0 \\ \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^k = 0$$

(altrim., $\exists\, \ell : x^\ell = \sum_{i \neq \ell} \mu^i x^i \ \& \ \sum_{i \neq \ell} \mu^i = 1$)



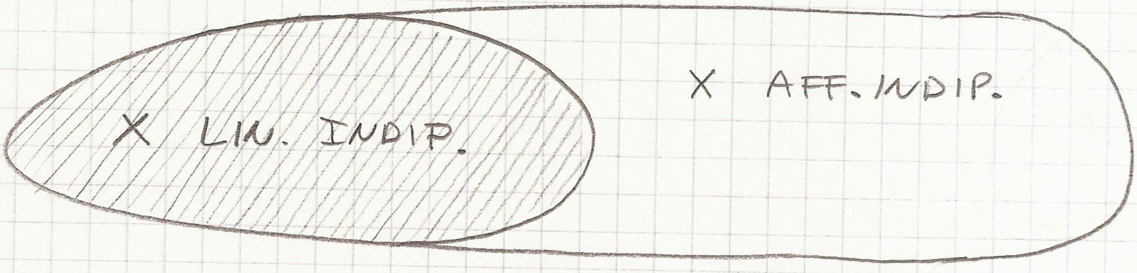
$\{x^1, x^2\}$ L./A. IND.

$\{x^1, x^2, x^3\}$ A. IND.

$\{x^1, x^2, x^4\}$ A. DIP

OSSERVAZIONI

- X LIN. INDIP. $\Rightarrow$ X AFFIN. INDIP.



- SUPPONIAMO $X \subset \{ x : \alpha x = \alpha_0 \}$, $\alpha_0 \neq 0$.

ALLORA

X LIN. INDIP. $\Leftrightarrow$ X AFFIN. INDIP.

Infatti

- X LIN. INDIP. $\Rightarrow$ X AFFIN. INDIP. $\Big\}$ vero sempre
- X LIN. DIPEND. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \mu^i : x^\ell = \sum_{i \neq \ell} \mu^i x^i$$

$$\Rightarrow \alpha x^\ell = \sum_{i \neq \ell} \mu^i \underbrace{(\alpha x^i)}_{\alpha_0} = \alpha_0$$

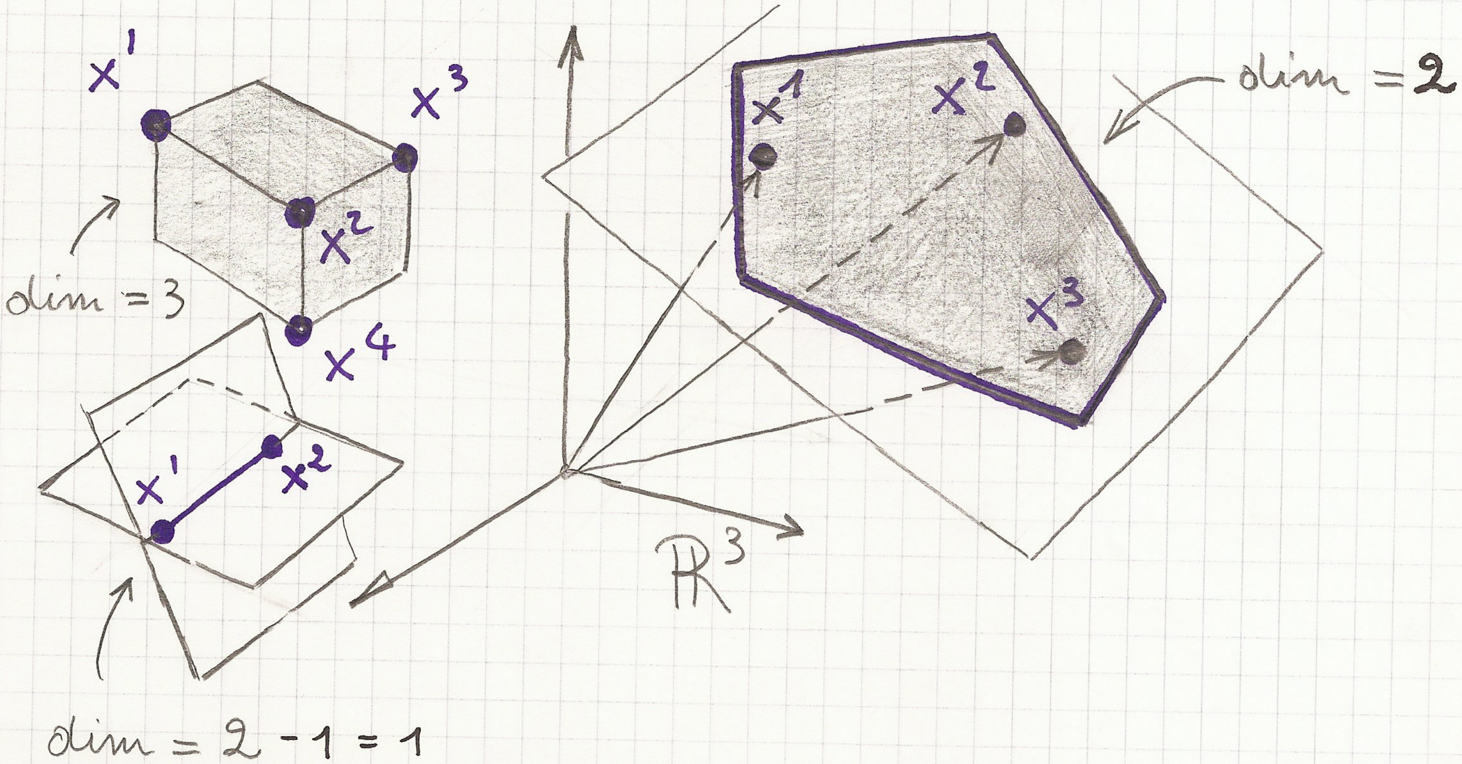
$$\Rightarrow \sum_{i \neq \ell} \mu^i = 1$$

$\Rightarrow$ X AFFIN. DIPEND. $\square$

- **DIMENSIONE** di P :

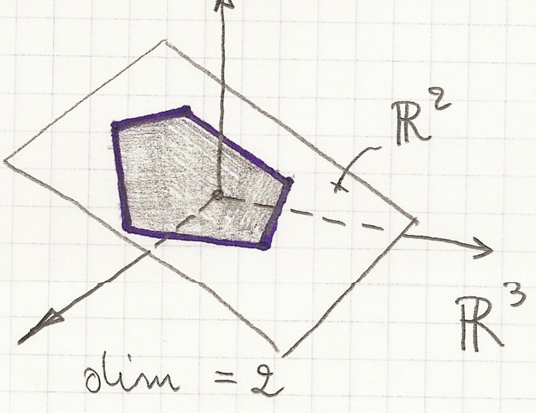
$$\dim(P) := \delta - 1 \quad , \text{ ove}$$

$\delta :=$ massimo numero di punti $x \in P$ **AFFINEMENTE** INDIPENDENTI



- Dato $x^0 \in P$, vale

$\dim(P) =$ dimensione del più piccolo SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i punti $x - x^0$ con $x \in P$



CONCETTO "USUALE" DI DIMENSIONE

- **EQUAZIONE VALIDA** per $P \overset{def}{\iff}$

  $\alpha x = \alpha_0$ soddisfatta $\forall\ x \in P$

- **PROPRIETÀ**: Sia $P \subset \mathbb{R}^n$.

  $\dim(P) = n - \rho$, ove

  $\rho :=$ massimo numero di EQUAZIONI VALIDE linearmente indipendenti

  Ogni equazione (linearmente indip.) diminuisce di 1 la dimensione di P

- **EQUATION SYSTEM** per P : sistema massimale di equazioni valide per P e linearmente indipendenti

  ($\Rightarrow$ contiene esattamente $n - \dim(P)$ equazioni)

- P DIMENSIONE PIENA $\overset{def}{\iff} \dim(P) = n$

  $\iff \nexists$ equazioni valide (diverse da $0x=0$)

• FACCE, FACCETTE e VERTICI

- Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro.
- **DISUGUAGLIANZA VALIDA** per $P \overset{def}{\iff}$

$$\alpha x \leq \alpha_0 \text{ soddisfatta } \forall x \in P$$

- **FACCIA** di P definita (o indotta) da una disuguaglianza valida:

$$F(\alpha, \alpha_0) := \{ x \in P : \alpha x = \alpha_0 \}$$

- Nota: $F(\alpha, \alpha_0)$ è un poliedro!

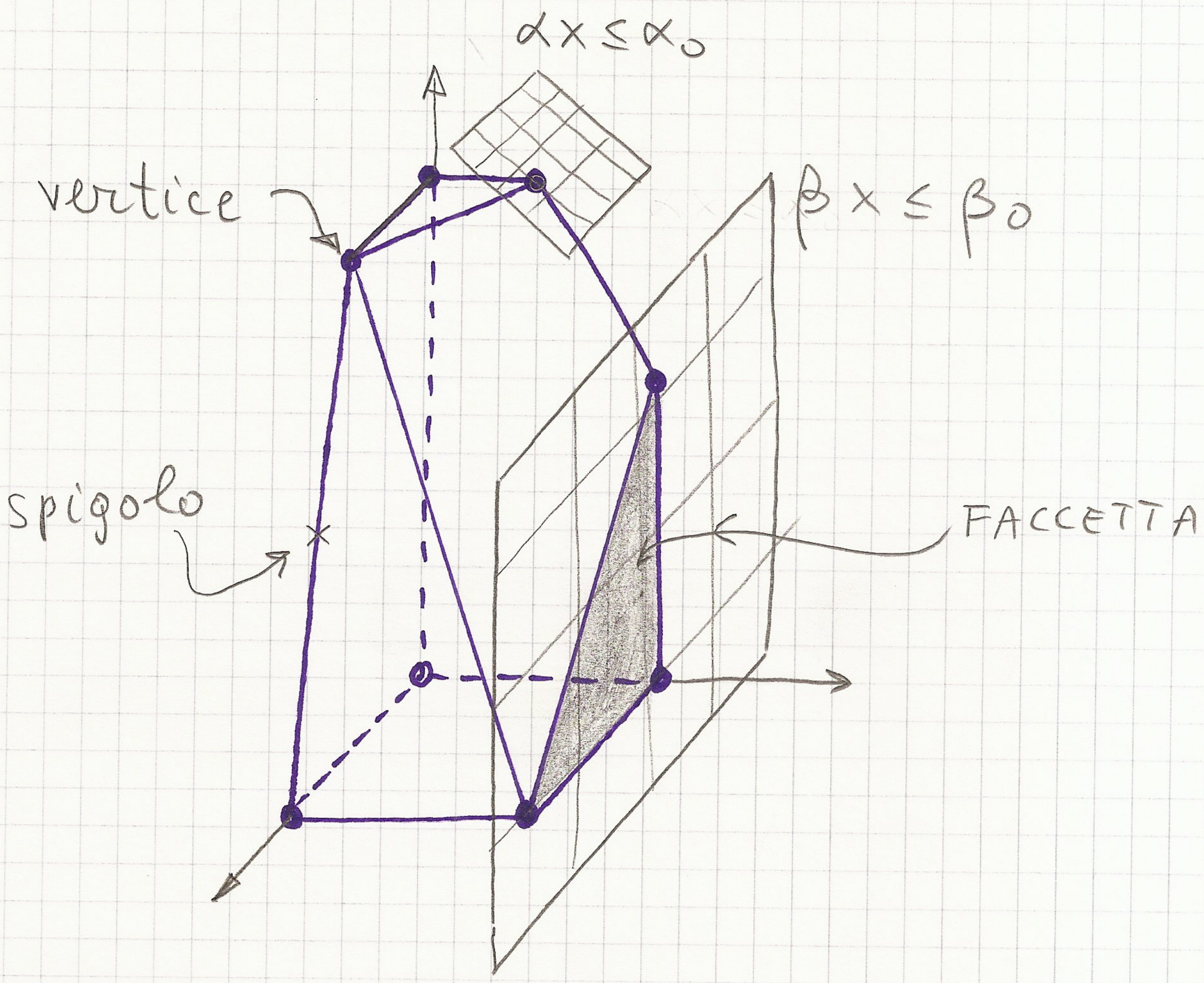
→ Casi possibili:

- $F(\alpha, \alpha_0) = \emptyset$ → CASO DEGENERE...
- $F(\alpha, \alpha_0) = P$ → FACCIA IMPROPRIA

- $\dim(F(\alpha, \alpha_0)) = 0$ → **VERTICE** di P
- $\dim(F(\alpha, \alpha_0)) = 1$ → **SPIGOLO** di P

- $\dim(F(\alpha, \alpha_0)) = \dim(P) - 1$

  → **FACCETTA** di P (CONTIENE $\dim(P)$ PUNTI AFFIN. INDIP.)



• PROPRIETÀ : P può essere descritto (in modo minimale) come

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Bx = d,\ \alpha^i x \le \alpha_0^i \ (i=1,\dots,M) \}$$

ove

$Bx = d$ EQUATION SYSTEM per P

$\alpha^i x \le \alpha_0^i$ definisce una FACCETTA di P $(i = 1, \dots, M)$

$\Rightarrow$ IMPORTANZA delle FACCETTE ...

DETERMINAZIONE DELLA DIMENSIONE DI UN POLIEDRO

- DATO UN POLIEDRO $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (A VOLTE UNA FACCIA DI UN ALTRO POLIEDRO ...) ED UN UPPER BOUND d TALE CHE $\dim(P) \leq d$, **DIMOSTRARE CHE** $\boldsymbol{\dim(P) \geq d}$ ($\Rightarrow \dim(P) = d$).

(1) **METODO DIRETTO**:

dimostrare che esistono $d+1$ punti (di solito vertici) $x^i \in P$ affinemente indipendenti

(2) **METODO INDIRETTO**:

(2.1) individuare $n-d$ equazioni valide per P e lin. indip., siano

$$\alpha^i x = \alpha_0^i \quad (i=1,\dots,n-d)$$

(2.2) mostrare che ogni equazione valida per P, sia

$$\beta x = \beta_0 ,$$

è una COMBINAZIONE LINEARE del sistema $\alpha^i x = \alpha_0^i \quad (i=1,\dots,n-d)$

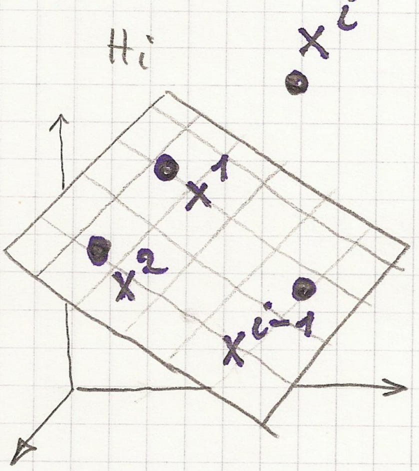
$\Rightarrow \alpha^i x = \alpha_0^i \; \forall i$ EQUAT. SYST. $\Rightarrow \dim(P) = n-(n-d)$

CONSIDERAZIONI

• METODO DIRETTO :

- mostrare l'esistenza di un numero elevato ($= d+1$) punti $x^i \in P$
  $\Rightarrow$ usare INDUZIONE!

- dimostrare l'indipendenza affine dei punti x^i considerati, p. es:
  $\Rightarrow$ considerare $x^1, \dots, x^{d+1}$ in SEQUENZA
  $\Rightarrow$ $\forall\ i = 2, \dots, d+1$, mostrare che
  x^i non può essere ottenuto
  come COMBINAZIONE AFFINE
  dei punti $x^1, x^2, \dots, x^{i-1}$ precedenti



$\rightarrow$ mostrare l'esistenza di un iperpiano $H_i = \{x : ax = b\}$ tale che

$$x^1, x^2, \dots, x^{i-1} \in H_i$$

$$x^i \notin H_i$$

• METODO INDIRETTO

→ punto (7.1) "individuare $n-d$ equazioni" di solito semplice

→ punto (7.2) : Sia $\beta x = \beta_0$ una <u>qualunque</u> equazione valida per P.
Dobbiamo dimostrare che $\exists\, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-d}$ tali che

$$
\begin{array}{l}
\lambda^1 * [\alpha^1 x = \alpha_0^1] + \\
\lambda^2 * [\alpha^2 x = \alpha_0^2] + \\
\quad \dots \\
\lambda^{n-d} * [\alpha^{n-d} x = \alpha_0^{n-d}] = \\
\hline
\qquad \beta x = \beta_0
\end{array}
$$

cioè

$$\boxed{(\beta, \beta_0) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda^i (\alpha^i, \alpha_0^i) \qquad (*)}$$

→ **INTERCHANGE ARGUMENT** : $\forall\, x^1, x^2 \in P$,

$$\beta x^1 = \beta x^2 = \beta_0 \Rightarrow \beta (x^1 - x^2) = 0$$

⇒ ripetendo per varie coppie x^1, x^2 si riesce a dimostrare $(*)$

→ semplificazione : **FORMA CANONICA** per $\beta x = \beta_0$

- Equazione $\beta x = \beta_0$ <u>arbitraria</u>
- Rappresentiamo $\alpha^i x = \alpha_0^i$ $(i = 1, \dots, n-d)$ come

$$A x = b \, ,$$

e sia $A = [B \mid F]$ con B base di A.

Conseguentemente $\beta = (\beta_B, \beta_F)$.

- Consideriamo la nuova equazione

$$\tilde{\beta} x = \tilde{\beta}_0 \, , \quad \text{ove}$$

$$(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}_0) = (\tilde{\beta}_B, \tilde{\beta}_F, \tilde{\beta}_0) :=$$

$$(\beta_B, \beta_F, \beta_0) - [\beta_B B^{-1}] (B, F, b)$$

$$= (\mathbf{0}, \tilde{\beta}_F, \tilde{\beta}_0) \, .$$

- $\tilde{\beta} x = \tilde{\beta}_0$ VALIDA PER P
- $\tilde{\beta} x = \tilde{\beta}_0$ LIN. INDIP. da $A x = b$

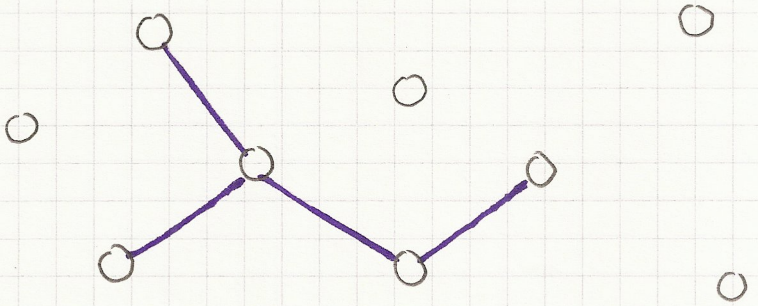
  $\iff \beta x = \beta_0$ LIN. INDIP. DA $A x = b$

- $\Rightarrow$ SOSTITUIAMO A $\beta x = \beta_0$ LA SUA FORMA CANONICA $\tilde{\beta} x = \tilde{\beta}_0$

ESEMPIO : K-CARD TREES

- GRAFO COMPLETO $G = (V, E)$

- K-CARDINALITY TREE : ALBERO DI G CON K LATI E $K+1$ NODI



$K = 4$

- VARIABILI

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E \text{ scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in V \text{ scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- VETTORE CARATTERISTICO :

$$(x, y) \in \{0, 1\}^{|E| + |V|}$$

associato ad un K-CARD TREE.

- **IPOTESI** : $3 \leq K \leq n-2$

($K = n-1 \Rightarrow$ SPANNING TREE**!**)

- POLÍTOPO K-CARD TREE :

$$P := \text{conv}\left\{ (x,y) \in \{0,1\}^{|E|+|V|} : (x,y) \text{ descrive un K-CARD TREE} \right\}$$

- $\min\{ cx + wy : (x,y) \in P \}$: NP-HARD !

- ANALISI POLIEDRALE DI P

  - EQUAZIONI VALIDE ? → $\dim(P) = ?$
  - VINCOLI VALIDI ?
  - VINCOLI ESSENZIALI ? → FACCETTE ?

- <u>NOTAZIONE</u> : Dato $S \subseteq V$:

$$\delta(S) := \{ [i,j] \in E : i \in S, j \notin S \}$$
$$\gamma(S) := \{ [i,j] \in E, i \in S, j \in S \}$$

Dati (x,y), $S \subseteq V$, $Q \subseteq E$:

$$y(S) := \sum_{j \in S} y_j$$

$$x(Q) := \sum_{e \in Q} x_e$$

$n := |V|$; $m := |E|$

- EQUAZIONI :

(1) $x(E) = k$ (k LATI)

(2) $y(V) = k+1$ (k+1 NODI)

(1)-(2) LINEARMENTE INDIPENDENTI :

→ ESISTONO ALTRE EQUAZIONI VALIDE ?

→ $\dim(P) = m + n - 2$?

Nota : nel caso $k = n-1$ (Spanning) esistono le equazioni $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$!

TEOREMA Se $3 \leq k \leq n-2$, allora

$$\dim(P) = m + n - 2$$

DIMOSTRAZIONE

→ Upper bound $\dim(P) \leq m + n - 2$: OVVIO !

→ Dimostrare $\dim(P) \geq m + n - 2$

METODO DIRETTO

- Osservazione : è noto che

$$\dim(P_{\substack{SPANNING\\TREE}}) = m-1$$

- CLAIM : $\exists\ (m+n-2)+1$ punti $(x^i, y^i) \in P$ affinemente indipendenti.

- DIMOSTRAZIONE DEL CLAIM :

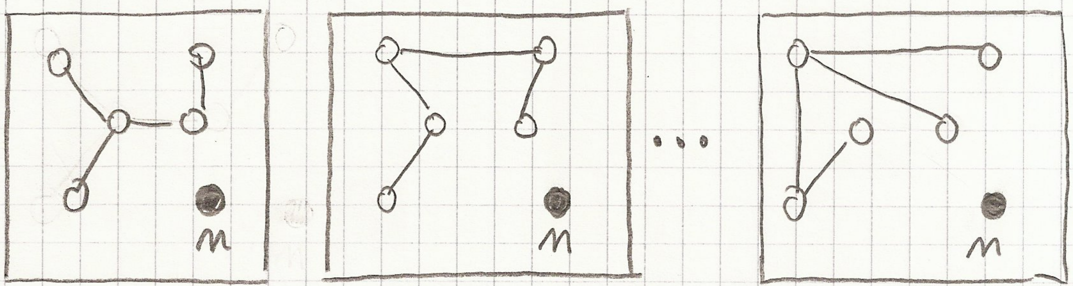
$\Rightarrow$ per INDUZIONE su

$n-(k+1)$ = numero di nodi scoperti in una soluzione

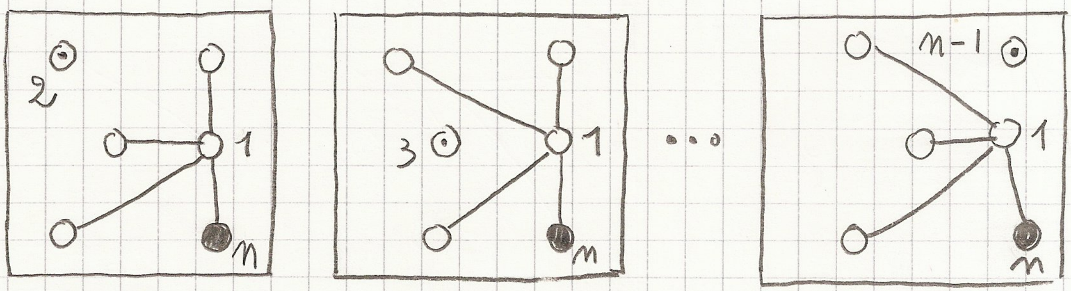
Nota : $n-(k+1)=0$ escluso dal teorema !

BASE DELL' INDUZIONE : $n-(k+1)=1$

SPANNING TREE in $G-\{n\}$

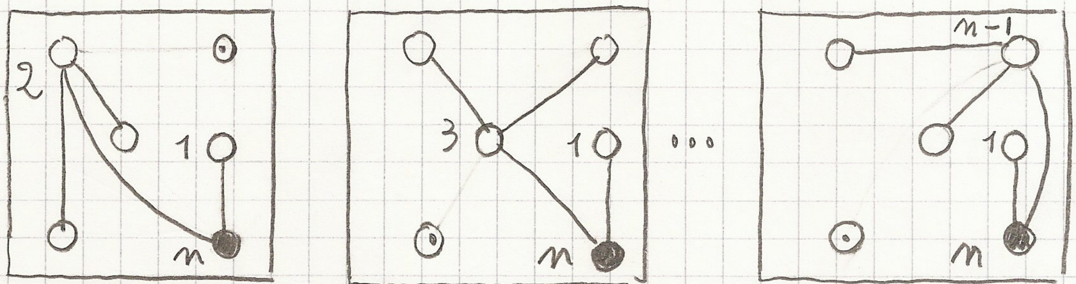


$\left|E \setminus \delta(n)\right| = m-n+1$ punti



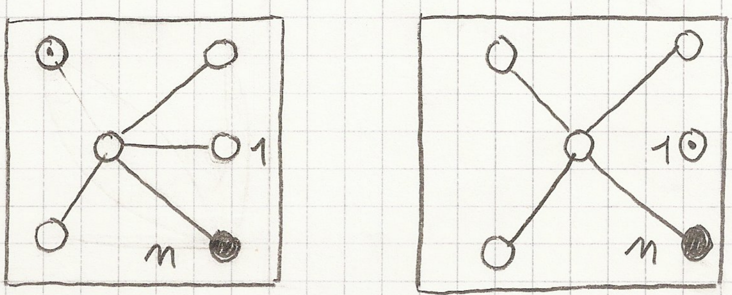
$y_2 \neq 1$ $y_3 \neq 1$ $y_{n-1} \neq 1$

$n-2$ punti



$x_{2n} \neq 0$ $x_{3n} \neq 0$ $x_{n-1,n} \neq 0$

$n-2$ punti



$x_{1n} \neq y_n$ $y_1 \neq 1$

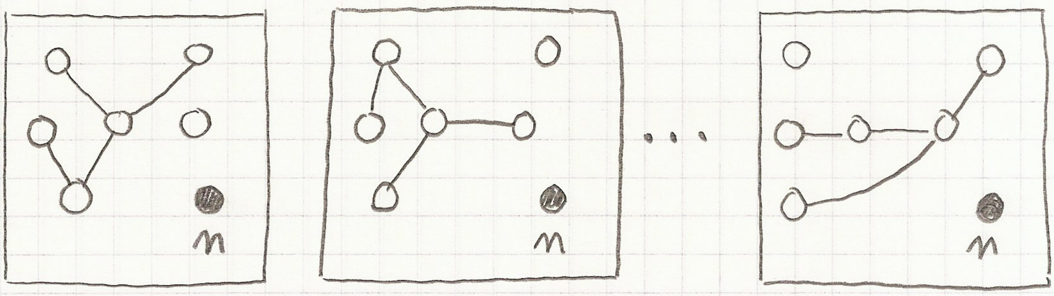
2 punti

totale $= m+n-1$

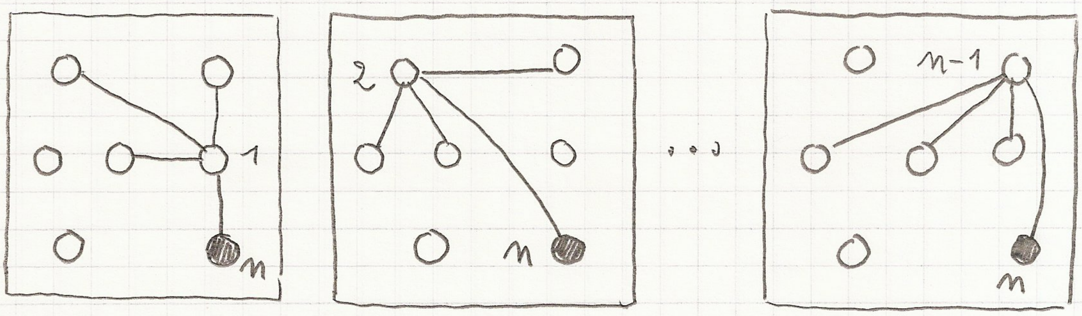
punti affin. indipend.

INDUCTION STEP: $[n-(k+1)=p] \Rightarrow [n-(k+1)=p+1]$

K-CARD TREE in $G-\{n\}$

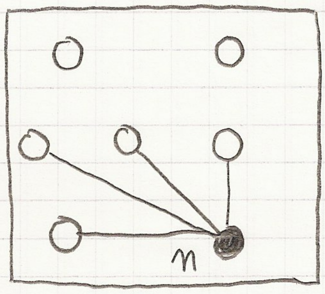


$|E\setminus\delta(n)| + |V\setminus\{n\}| - 1 = m-1$ punti



$x_{1n}\neq 0$ $x_{2n}\neq 0$ $x_{n-1,n}\neq 0$

$n-1$ punti



$x(\delta(n))\neq y_n$

1 punto

totale $= m+n-1$ punti affinem. indipend.

$\square$

- **METODO INDIRETTO**

- Sia $\alpha x + \beta y = \gamma$ una <u>qualunque</u> eq. valida per P. Vogliamo dimostrare che $\alpha x + \beta y = \gamma$ è una COMBINAZIONE LINEARE delle due equazioni:

$$(1) \quad x(E) = K$$
$$(2) \quad y(V) = K+1$$

- <u>NORMALIZZAZIONE</u>: Scegliamo arbitrariamente $e^* \in E$ e $j^* \in V$, e supponiamo senza perdita di generalità

$$\alpha_{e^*} = \beta_{j^*} = 0$$

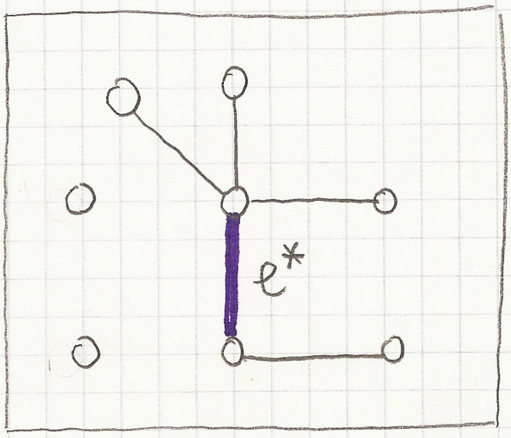
(basta sottrarre da $\alpha x + \beta y = \gamma$ le due eq. (1)-(2) moltiplicate rispettivamente per α_{e^*} e β_{j^*})

- <u>CLAIM</u>: DOPO LA NORMALIZZAZIONE,

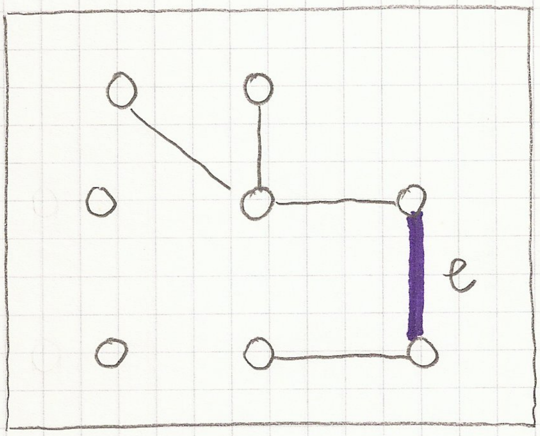
$$\alpha_e = \beta_j = 0 \qquad \forall\, e \in E,\ j \in V$$

(e quindi $\gamma = 0$)

• DIMOSTRAZIONE DEL CLAIM (INTERCHANGE ARGUM.)



$(x^1, y^1) \in P$

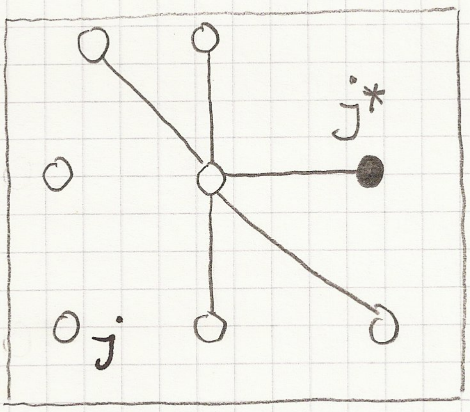


$(x^2, y^2) \in P$

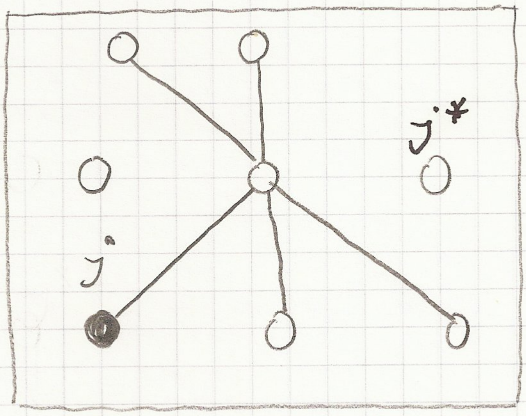
$$\alpha x^1 + \beta y^1 = \gamma = \alpha x^2 + \beta y^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\alpha (x^1 - x^2)}_{\alpha_{e^*} - \alpha_e} + \beta \underbrace{(y^1 - y^2)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_e = \alpha_{e^*} := 0 \quad \forall\, e \in E}$$



$(x^1, y^1) \in P$



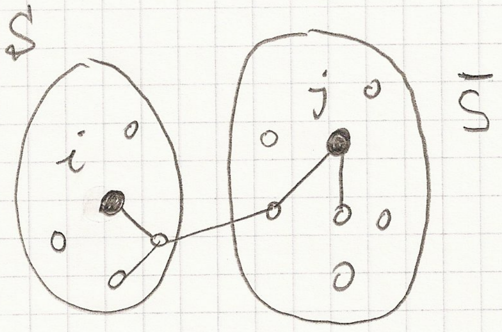
$(x^2, y^2) \in P$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\alpha}_{=0} (x^1 - x^2) + \underbrace{\beta (y^1 - y^2)}_{\beta_{j^*} - \beta_j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta_j = \beta_{j^*} := 0 \quad \forall\, j \in V} \qquad \square$$

• DISUGUAGLIANZE

- MODELLO DI PLI $\min \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{j \in V} w_j y_j$



$$\text{s.t.} \quad (x,y) \in \{0,1\}^{m+n}$$
$$x(E) = K$$
$$y(V) = K+1$$

$$(*) \quad x(\delta(S)) \geq y_i + y_j - 1 \quad \forall\, S \subset V,\ i \in S,\ j \in \bar{S}$$

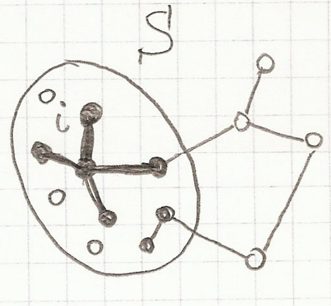
- I vincoli (*) possono essere separati in modo efficiente (← MAX-FLOW)
- I vincoli (*) sono FORTI (DEFINISCONO FACCETTE) ?
- Riscriviamo (*) come

$$\underbrace{x(E)}_{y(V)-1} - x(\gamma(S)) - x(\gamma(\bar{S})) \geq y_i + y_j - 1$$

$$\Rightarrow \quad x(\gamma(S)) + x(\gamma(\bar{S})) \leq \overbrace{y(S) + y(\bar{S})}^{y(V)} - y_i - y_j$$

$\Rightarrow$ (*) è la SOMMA di 2 vincoli validi!

$$x(\gamma(S)) \leq y(S) - y_i$$
$$x(\gamma(\bar{S})) \leq y(\bar{S}) - y_j$$



- I VINCOLI

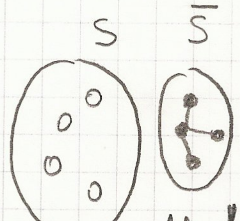
$$x(\gamma(S)) \leq y(S) - y_t \quad , \forall S \subseteq V, t \in S, \; |S| \geq 2$$

DEFINISCONO FACCETTE DI P ?

- Sicuramente <u>NO</u> quando

  * $S = V \Rightarrow x(E) \leq y(V) - y_t$ dominata da $x(E) = y(V) - 1$!

  * $|S| \geq n - k \Rightarrow |\bar{S}| \leq k \Rightarrow$



No !

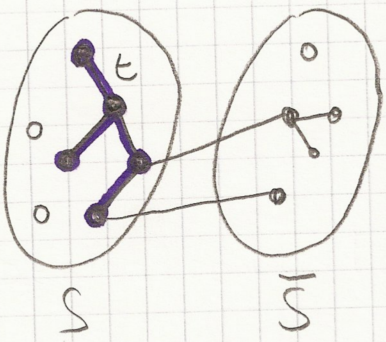
$\Rightarrow x(\gamma(S)) \leq y(S) - y_t$ dominata da $x(\gamma(S)) \leq y(S) - 1$

- I VINCOLI $x(\gamma(S)) \leq y(S) - y_t$ DEFINISCONO FACCETTE QUANDO $|S| < n - k$!

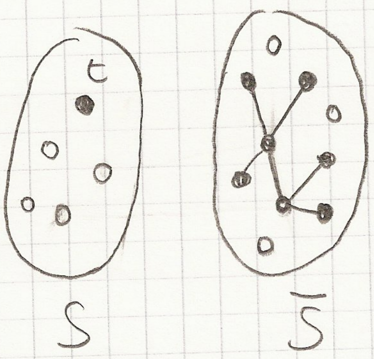
- DIMOSTRAZIONE (METODO INDIRETTO)

Sia $F := \{ (x,y) \in P : x(\gamma(S)) = y(S) - y_t \}$ la FACCIA di P indotta da $x(\gamma(S)) \leq y(S) - y_t$.

- OSSERVAZIONE: $(x, y) \in F$ sono del tipo



$y_t = 1$, ed $x(\gamma(S))$ definisce un albero (possib. $= \emptyset$)



$y_t = 0$, ed $y(S) = 0$

- Dobbiamo dimostrare

$$\dim(F) = \dim(P) - 1 = m + n - 3,$$

cioè, un EQUATION SYSTEM per **F** è

$$\begin{cases} x(E) & = k & (1) \\ \quad\quad y(V) & = k+1 & (2) \\ x(\gamma(S)) - y(S) + y_t & = 0 & (3) \end{cases}$$

- Sia allora $\alpha x + \beta y = \gamma$ una equazione valida per **F**.

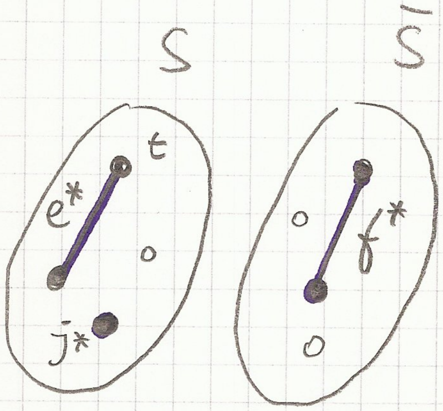
- **Normalizzazione** : W.L.O.G.

$$\alpha_{e^*} = \alpha_{f^*} = \beta_{j^*} = 0$$

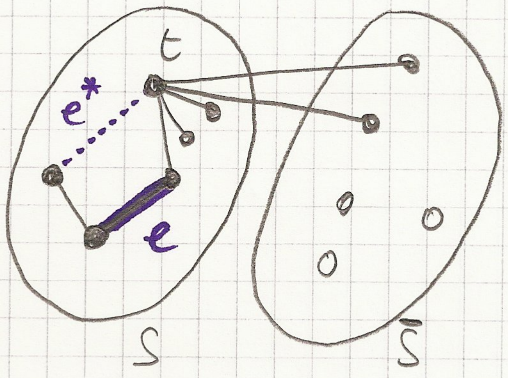
ove $\quad e^* \in \gamma(S) \cap \delta(t)$

$\quad f^* \in \gamma(\bar{S})$

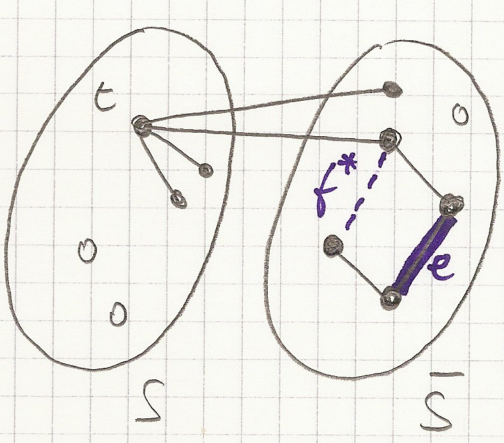
$\quad j^* \in S \setminus \{t\}$



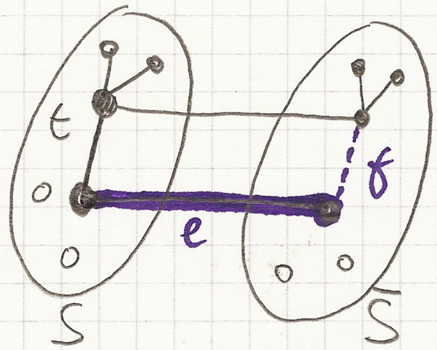
- **DIMOSTRIAMO** $\quad \alpha = \beta = 0 \quad (\Rightarrow \gamma = 0)$:



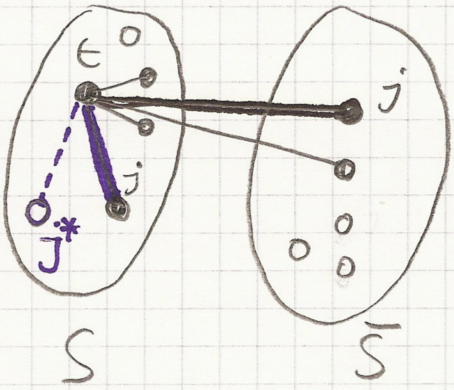
$$\alpha_e = \alpha_{e^*} = 0 \quad \forall\, e \in \gamma(S)$$



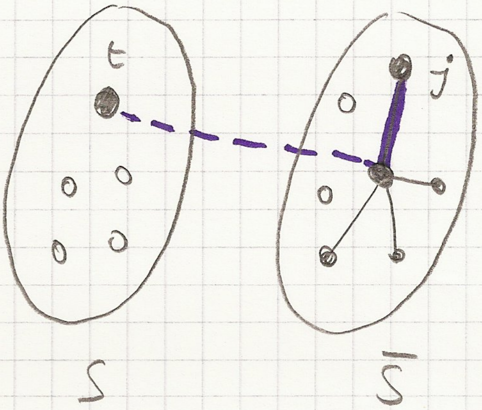
$$\alpha_e = \alpha_{f^*} = 0 \quad \forall\, e \in \gamma(\bar{S})$$



$\alpha_e = \alpha_f = 0 \qquad \forall\ e \in \delta(S)$



$\beta_j = \beta_{j^*} = 0 \qquad \forall\ j \in V \setminus \{t\}$



$\beta_t = \beta_j = 0$

$\square$

ESERCIZI

- Dimostrare che

$$x(\gamma(S)) \leq y(S) - 1$$

definisce una faccetta di P quando

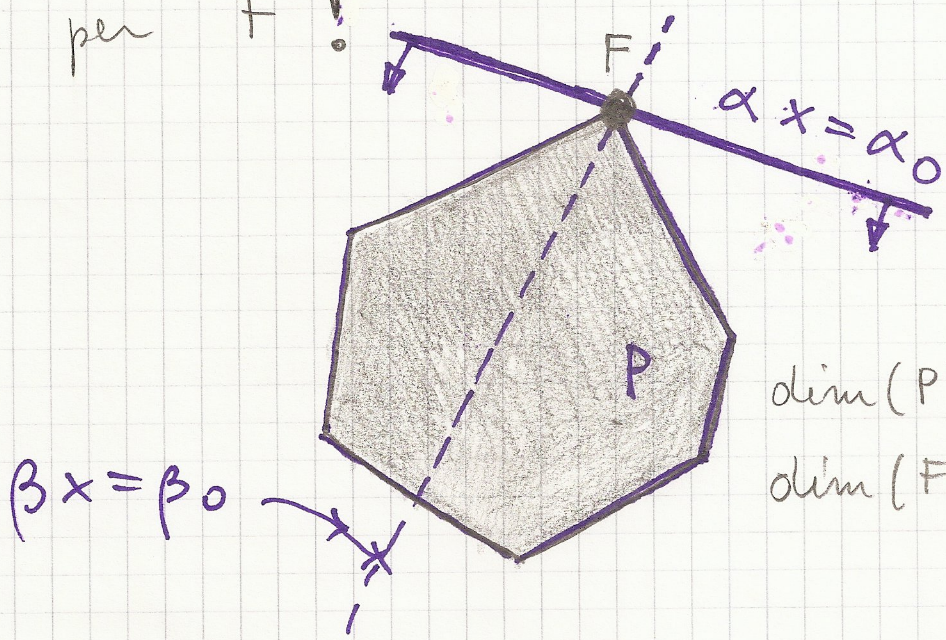
$$n - k \leq |S| \leq n - 1$$

- Analizzare poliedralmente le disugua.

$$x(\delta(i)) \leq k\, y_i$$

LIFTING

- POLIEDRO $P \subset \mathbb{R}^n$
- EQUATION SYSTEM per P: $Ax = b$
- DISUGUAGLIANZA VALIDA per P: $\alpha x \leq \alpha_0$
- FACCIA $F := \{x \in P : \alpha x = \alpha_0\}$
- $\dim(F) < \dim(P) - 1$: F NON È FACCETTA!
- $\exists$ una NUOVA EQUAZIONE (lin. indip. da $Ax = b$, $\alpha x = \alpha_0$) $\beta x = \beta_0$ valida per F!

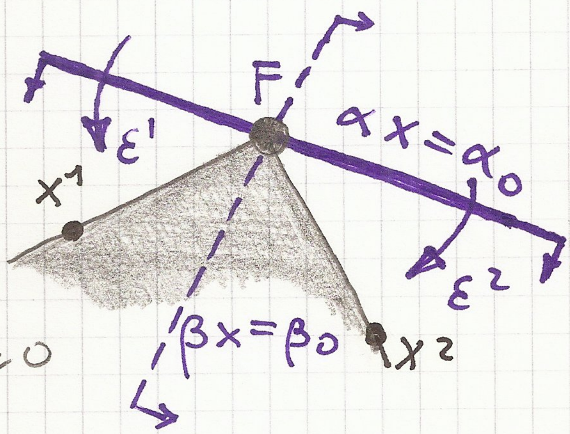


$\dim(P) = 2$
$\dim(F) = 0$

- **LIFTING**: utilizzando $\beta x = \beta_0$, MIGLIORARE $\alpha x \leq \alpha_0$

(→ AUMENTARE la dimensione di F)

- Si costruiscono <u>due</u> disuguaglianze valide, $\alpha^1 x \le \alpha_0^1$ ed $\alpha^2 x \le \alpha_0^2$, ottenute da $\alpha x \le \alpha_0$ facendo "PERNO" su $\beta x = \beta_0$:



$$\begin{cases} \alpha x \le \alpha_0 \\ \beta x = \beta_0 \end{cases}$$

$\varepsilon^1 \geq 0$ / $\varepsilon^2 \geq 0$

$$\underbrace{(\alpha + \varepsilon^1 \beta)}_{\alpha^1} x \le \underbrace{\alpha_0 + \varepsilon^1 \beta_0}_{\alpha_0^1} \qquad \underbrace{(\alpha - \varepsilon^2 \beta)}_{\alpha^2} x \le \underbrace{\alpha_0 - \varepsilon^2 \beta_0}_{\alpha_0^2}$$

- Fissiamo ε^i $(i = 1, 2)$ come MASSIMO VALORE tale che

$$\alpha^i x \le \alpha_0^i \quad \text{VALIDA per } P$$

- Per costruzione, $\exists\ i \in \{1, 2\}$ tale che:

$\rightarrow F \subseteq F^i := \{ x \in P : \alpha^i x = \alpha_0^i \}$

$\rightarrow \exists\ x^i \in F^i : \alpha x^i \neq \alpha_0$

$\Rightarrow \dim(F^i) \geq \dim(F) + 1$!

- CASO IMPORTANTE : $\beta x = -x_j = \beta_0 = 0$

$\Rightarrow$ Imponendo $\alpha x = \alpha_0$ si ha necessariamente $x_j = 0$ per una qualche variabile x_j !

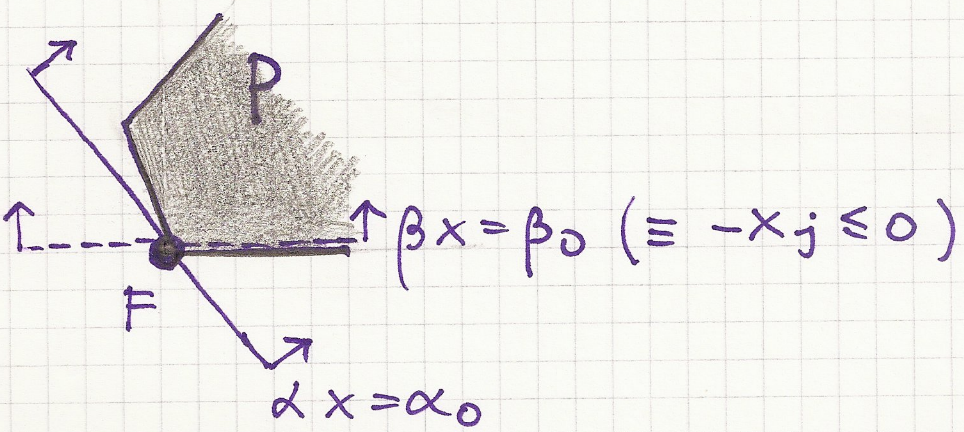
$\Rightarrow \quad \alpha^1 x \leq \alpha_0^1 \equiv \alpha x - \varepsilon^1 x_j \leq \alpha_0$

$\Rightarrow \quad \alpha^2 x \leq \alpha_0^2 \equiv \alpha x + \varepsilon^2 x_j \leq \alpha_0$

Valori critici (supponendo $x_j \in \{0,1\}$):

$\varepsilon^1 := +\infty \rightarrow \alpha^1 x \leq \alpha_0^1$ degenera in $-x_j \leq 0$

$\varepsilon^2 := \alpha_0 - \max\{\alpha x : x \in P, x_j = 1\}$



- LIFTING SEQUENZIALE

$\alpha x = \alpha_0 , x \in P \Rightarrow x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_r} = 0$

$\rightarrow$ lifting per x_{j_1} (imponendo $x_{j_2} = \dots = x_{j_r} = 0$)

$\rightarrow$ lifting per x_{j_2} (" $x_{j_3} = \dots = x_{j_r} = 0$)

...