

**Errata corrige del testo “Ricerca Operativa”
di Lorenzo Brunetta**

Last update: February 22, 2010

2. Modelli di programmazione lineare

- **pag. 11, esercizio 2.6**

Modificare il testo dell'esercizio, specificando che il limite massimo di domanda (seconda e terza riga di pag. 12) è mensile.

- **pag. 16, esercizio 2.10**

Modificare la seconda frase del testo dell'esercizio nel seguente modo:

In un mese, le macchine per verniciare sono complessivamente disponibili per 900 ore.

3. Metodo del simplesso

- pag. 25, esercizio 3.3

- Il coefficiente angolare della funzione obiettivo in figura 3.1 è sbagliato.
- Nel punto b) il vertice D ha coordinate $(0, 11)$

- pag. 32, esercizio 3.9

- I tableau ottenuti tramite l'algoritmo del simplesso (e regola di Bland) sono i seguenti

0	0	0	0	0	$-2/5$	$-2/5$	$9/5$
0	1	0	0	0	$[3/5]$	$-32/5$	$24/5$
0	0	1	0	0	$1/5$	$-9/5$	$3/5$
0	0	0	1	0	$2/5$	$-8/5$	$1/5$
1	0	0	0	1	0	1	0

0	$2/3$	0	0	0	0	$-14/3$	5
0	$5/3$	0	0	0	1	$-32/3$	8
0	$-1/3$	1	0	0	0	$[1/3]$	-1
0	$-2/3$	0	1	0	0	$8/3$	-3
1	0	0	0	1	0	1	0

0	-4	14	0	0	0	0	-9
0	-9	32	0	0	1	0	-24
0	-1	3	0	0	0	1	-3
0	$[2]$	-8	1	0	0	0	5
1	1	-3	0	1	0	0	3

0	0	-2	2	0	0	0	1
0	0	-4	$9/2$	0	1	0	$-3/2$
0	0	-1	$1/2$	0	0	1	$-1/2$
0	1	-4	$1/2$	0	0	0	$5/2$
1	0	$[1]$	$-1/2$	1	0	0	$1/2$

2	0	0	1	2	0	0	2
4	0	0	$5/2$	4	1	0	$1/2$
1	0	0	0	1	0	1	0
4	1	0	$-3/2$	4	0	0	$9/2$
1	0	1	$-1/2$	1	0	0	$1/2$

- La soluzione ottima è $x = (4, 1, 0, 0, 4, 1, 0)$ di valore $z = -2$.

- pag. 33, esercizio 3.10

- Modificare il modello matematico del testo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \min = \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 \geq 17 \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- I tableau ottenuti tramite l'algoritmo del simplesso (senza regola di Bland) sono i seguenti

– 24	– 5	– 3	– 18	1	1	0	0
17	4	2	[13]	– 1	0	1	0
7	1	1	5	0	– 1	0	1

– 6/13	7/13	– 3/13	0	– 5/13	1	18/13	0
17/13	4/13	2/13	1	– 1/13	0	1/13	0
6/13	– 7/13	3/13	0	[5/13]	– 1	– 5/13	1

0	0	0	0	0	0	1	1
7/5	1/5	1/5	1	0	– 1/5	0	1/5
6/5	– 7/5	3/5	0	1	– 13/5	– 1	13/5

Il tableau associato alla fase II è corretto.

4. Dualità nella programmazione lineare

- pag. 45, esercizio 4.5

Nella soluzione del punto c), la terza condizione di ortogonalità deve essere riscritta nel seguente modo:

$$(5u_1 - u_2 + 3)x_1 = 0$$

- pag. 47, esercizio 4.6

– Nella soluzione del punto a), il secondo vincolo del duale deve essere riscritto nel seguente modo:

$$u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 2$$

– I primi due tableau di pag. 48 ed il commento finale sulla fase I vanno sostituiti con in questo modo:

-4	-4	0	2	0	0	4	0
2	[2]	0	-1	0	1	-1	0
4	-1	1	2	0	0	1	0
2	2	0	-1	0	0	-2	1
2	0	0	1	1	0	0	0

0	0	0	0	0	2	2	0
1	1	0	-1/2	0	1/2	-1/2	0
5	0	1	3/2	0	1/2	1/2	0
0	0	0	0	0	-1	-1	1
2	0	0	1	1	0	0	0

Fine della fase I. Si noti che, dopo aver eliminato le ultime 3 colonne (corrispondenti alle variabili artificiali), la matrice A non ha rango 4 (ma ha rango 3), per cui la terza riga del tableau può essere eliminata. Scriviamo il tableau della fase II.

- pag. 49, esercizio 4.7

– Il secondo tableau di pag. 50 deve essere sostituito con il seguente tableau

-5	0	-3/2	-2	0	3/2
5	0	[3/2]	2	1	-1/2
2	1	-1/2	-1	0	1/2

– Nella soluzione del punto c), la seconda condizione di ortogonalità deve essere riscritta nel seguente modo:

$$(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4)u_2 = 0$$

- pag. 51, esercizio 4.8

– Modificare la funzione obiettivo del problema nel seguente modo:

$$\min 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

– Nella soluzione del punto b), il secondo vincolo duale diventa

$$u_1 - 3u_2 \leq 3$$

– Nella soluzione del punto c), la soluzione duale ottima è $u = (\frac{5}{4}, \frac{9}{4})$.

• pag. 53, esercizio 4.10

– Sostituire gli ultimi due tableau di pag. 54 con i seguenti tableau:

– 3	2/5	0	0	0	1/5
– 3	[–7/5]	0	1	0	– 1/5
3	4/5	0	0	1	– 3/5
3	3/5	1	0	0	– 1/5

–27/7	0	0	2/7	0	1/7
15/7	1	0	– 5/7	0	1/7
9/7	0	0	4/7	1	– 5/7
12/7	0	1	3/7	0	– 2/7

– In alternativa, la sequenza dei tableau utilizzando l’algoritmo del simplesso duale (e regola di Bland) è la seguente:

0	1	1	0	0	0
– 6	[–2]	– 1	1	0	0
– 6	– 1	– 3	0	1	0
– 15	– 3	– 5	0	0	1

– 3	0	1/2	1/2	0	0
3	1	1/2	– 1/2	0	0
– 3	0	[–5/2]	– 1/2	1	0
– 6	0	– 7/2	– 3/2	0	1

–18/5	0	0	2/5	1/5	0
12/5	1	0	– 3/5	1/5	0
6/5	0	1	1/5	– 2/5	0
– 9/5	0	0	– 4/5	[–7/5]	1

–27/7	0	0	2/7	0	1/7
15/7	1	0	– 5/7	0	1/7
12/7	0	1	3/7	0	– 2/7
9/7	0	0	4/7	1	– 5/7

• pag. 55, esercizio 4.11

– Nel terzo tableau (pag. 55) non è indicato l’elemento pivot. Modificare in questo modo:

– 9/2	0	0	3	3/2
–1/12	0	1	[–1/6]	1/4
5/24	1	0	–1/12	– 1/8

– La soluzione ottima trovata (prima riga di pag. 56) è $x = (\frac{1}{4}, 0)$.

• **pag. 58, esercizio 4.13**

Nella soluzione del punto b), il secondo vincolo duale deve essere riscritto nel seguente modo:

$$2u_1 + u_2 + 5u_3 \leq 2$$

• **pag. 59, esercizio 4.14**

– Modificare il modello matematico del testo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \max = & 4x_1 + x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

– Nel primo tableau (pag. 59) non è indicato l'elemento pivot. Modificare in questo modo:

0	-4	-1	0	0
6	[3]	1	1	0
15	5	3	0	1

– A pag. 60 la distinzione tra variabili in base e fuori base è sbagliata. Sostituire nel seguente modo:

I coefficienti delle variabili fuori base e in base sono:

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

– Nella soluzione del punto a) (pag. 60) la condizione per la quale la base B rimane ottima è che sia

$$\Delta c_B^T B^{-1} F \leq \overline{c_F^T}$$

– Nella soluzione del punto b) (pag. 61) la condizione per la quale la base B rimane ottima è che sia

$$\begin{bmatrix} \Delta c_2 \\ \Delta c_3 \end{bmatrix} \geq - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta c_2 \geq -\frac{1}{3} \\ \Delta c_3 \geq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

– Nella soluzione del punto c) (pag. 61) la condizione per la quale la base B rimane ottima è che sia

$$B^{-1} \Delta b \geq B^{-1} b$$

ossia che

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix} \geq - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \Delta b_1 & \geq -2 \\ -\frac{5}{3} \Delta b_1 + \Delta b_2 & \geq -5 \end{cases}$$

$-6 \leq \Delta b_1 \leq 3$ quando $\Delta b_2 = 0$.

La base corrente rimane ottima per $-6 \leq \Delta b_1 \leq 3$.

- Modificare la soluzione del punto d) (pag. 61) nel seguente modo:

$$\Delta b_2 \geq -5 \text{ quando } \Delta b_1 = 0.$$

La base corrente rimane ottima per $\Delta b_2 \geq -5$.

- **pag. 63, esercizio 4.16**

- [**Typo**] Manca la domanda a).
- Modificare il commento successivo al tableau di pag. 64 nel seguente modo:

Dal tableau si può notare che esiste la matrice identità, i costi ridotti sono non negativi, così come i termini noti, quindi la soluzione ...

5. Modelli risolti di programmazione lineare

- **pag. 67, esercizio 5.1**

Modificare la seconda frase del testo dell'esercizio nel seguente modo:

In un mese, le macchine per verniciare sono complessivamente disponibili per 900 ore.

- **pag. 68, esercizio 5.2**

- Modificare l'ultimo vincolo del modello matematico completo (con variabili x_1, x_2 e x_3) di pag. 69 nel seguente modo:

$$-x_1 + 0.3 x_3 \leq 0$$

- **[Typo]** Correggere l'ultimo vincolo del modello completo di pag. 69:

$$-0.7 x_1 + 0.3 x_2 \leq 0$$

- Sostituire gli ultimi due tableau (pag. 70) con i seguenti tableau (**nota:** anche l'errata corrige originale è sbagliata).

1830	0	0	-70	0	90	0
15	1	0	1	0	0	0
4	0	0	[1]	1	-1	0
17	0	1	-1	0	1	0
27/5	0	0	1	0	-3/10	1

2110	0	0	0	70	20	0
11	1	0	0	-1	1	0
4	0	0	1	1	-1	0
21	0	1	0	1	0	0
7/5	0	0	0	-1	7/10	1

- Sostituire il commento successivo al quarto tableau con il seguente:

La soluzione ottima è $x = (11, 21, 32)$ di valore $z = 2110$. Infatti dal tableau si legge $x_1 = 11$ e $x_2 = 21$; ricordando che $x_3 = x_1 + x_2$ si ottiene $x_3 = 32$.

È da notare che la terza variabile in base nel tableau ottimo (terza colonna del tableau) rappresenta la variabile slack associata al vincolo $x_1 \leq 15$ e non la variabile x_3 del problema di partenza (=quantità di miscela da produrre ogni giorno).

- **pag. 71, esercizio 5.3**

[Typo] Correggere la seconda riga dopo il terzo tableau a pag. 73:

Fine fase II: i costi ridotti sono tutti positivi. Il valore della funzione obiettivo è 26220, e i valori delle variabili del problema all'ottimo sono $x = (10, 2, 0, 9)$.

- **pag. 73, esercizio 5.4**

- Modificare la domanda e) nel seguente modo:

Si scriva il duale della formulazione del problema trovata al punto a).

- Nella soluzione del punto f) (pag. 75) sostituire le ultime tre righe con le seguenti:

Dalla soluzione ottima del primale so che $x_1 > 0$ per cui il primo vincolo duale $2u_1 + 3u_2 \geq 600$ deve essere tight.

Inoltre il primo vincolo primale $2x_1 + 4x_2 \leq 9$ è lasco in corrispondenza della soluzione ottima, per cui deve essere $u_1 = 0$.

Sostituendo si ottiene $3u_2 = 600 \rightarrow u_2 = 200$.

La soluzione ottima del duale è quindi $u_1 = 0, u_2 = 200$ e $z = 1200$.

6. Metodi per la programmazione lineare intera

- **pag. 81, esercizio 6.2**

Cambiare il testo nel seguente modo:

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare Intera:

$$\begin{aligned}
 \max z = & \quad x_1 + 3x_2 + 5x_4 \\
 & 2x_1 - 3x_2 = 2 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
 & \quad x_2 + x_4 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ (intere)}
 \end{aligned}$$

- **pag. 83, esercizio 6.3**

- Cambiare il testo specificando che il problema da risolvere è di Programmazione Lineare Intera ed aggiungere al modello i vincoli di interezza di x_1, x_2, x_3 .
- Nel primo tableau di pagina 85 le parentesi quadre che indicano l'elemento pivot devono includere il segno -.

73/3	0	0	0	10/3	0
2	0	0	1	1	0
13/3	1	0	0	1/3	0
2/3	0	1	0	-4/3	0
-1/3	0	0	0	[-1/3]	1

- **pag. 85, esercizio 6.4**

- Modificare il testo in questo modo:

È dato il seguente tableau corrispondente alla soluzione ottima di un problema di Programmazione Lineare.

21/4	0	0	3/8	7/8
3/2	1	0	1/4	1/4
9/4	0	1	-1/8	3/8

Risolvere mediante l'algoritmo dei piani di taglio il problema di Programmazione Lineare Intera di minimo associato al problema di Programmazione Lineare dato.

- **[Typo]** Nota: nel tableau del testo, le colonne 1 e 2 sono in corsivo.

- **pag. 91, esercizio 6.7**

Nella figura 6.9 (pag 95) il disegno della regione ammissibile è sbagliato: la regione ammissibile è costituita dal segmento che collega i punti di coordinate (2, 0) e (2, 3).

8. Un problema di programmazione lineare intera

- **[Typo]** Cambiare il nome del capitolo in
Un problema di programmazione lineare intera
- **pag. 144, riga -6**
[Typo] Correggere “meetndo” con “mettendo”.

10. Grafi e alberi

- **pag. 157**

[**Typo**] La definizione di archi paralleli è ripetuta (riga 3 e righe 6-7); lasciare solo la seconda definizione.

- **pag. 157, riga 8**

[**Typo**] Il termine isolato deve essere scritto in corsivo (*isolato*), in quanto si tratta di una definizione.

- **pag. 159, algoritmo di Prim**

[**Typo**] Nella riga 5 cambiare $\{u.v\}$ con $\{u, v\}$.

- **pag. 164-165, esercizio 10.3**

Sostituire il primo paragrafo della soluzione nel seguente modo:

Posso evitare di fare il disegno del grafo completo e lavorare per ispezione sulla matrice di adicenza. Gli archi scelti sono nell'ordine (b, c) di costo 1, (a, e) di costo 2, (a, g) di costo 3, (d, e) di costo 3, (b, e) di costo 4. L'arco (c, e) di costo 4 viene rifiutato perchè formerebbe il ciclo (b, c, e) . L'arco (a, b) di costo 5 viene rifiutato perchè formerebbe il ciclo (a, b, e) .

e modificare di conseguenza le figure 10.9–10.12

11. Cammini di costo minimo

- pag. 170, esercizio 11.1

- Modificare il testo, mettendo in figura 11.1 il costo dell'arco (c, t) pari a 2.
- Modificare la riga -6 a pag. 170 nel seguente modo:

Alla terza iterazione aggiorniamo gli attributi dei nodi raggiungibili da b , cioè dei nodi a, c e d ; d è aggiunto a S . In particolare, ...

- Nella figura 11.3 di pag. 171, l'insieme S dei nodi permanenti al termine della seconda iterazione è $S = \{s, b\}$.

- pag. 174, esercizio 11.3

[Typo] Nella tabella di pag. 175 compaiono dei “.” invece che dei “-”.

- pag. 175, esercizio 11.4

Nella soluzione della tabella di pag. 176 modificare la quarta iterazione.

Nodi	$d(v)$						$Pred(v)$						S Permanenti
	s	a	b	c	d	t	s	a	b	c	d	t	
Iter 1	0	9	3	∞	∞	∞	s	s	s	NIL	NIL	NIL	s,b
Iter 2	0	5	3	10	11	∞	s	b	s	b	b	NIL	s,b,a
Iter 3	0	5	3	6	11	∞	s	b	s	a	b	NIL	s,b,a,c
Iter 4	0	5	3	6	7	19	s	b	s	a	c	c	s,b,a,c,d
Iter 5	0	5	3	6	7	11	s	b	s	a	c	d	s,b,a,c,d,t

- pag. 176, esercizio 11.5

Modificare la soluzione della tabella di pag. 177.

Nodi	$d(v)$							$Pred(v)$							S Permanenti
	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c	d	e	f	g	
Iter 1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	a
Iter 2	-	4	6	5	∞	∞	∞	-	a	a	a	NIL	NIL	NIL	a,b
Iter 3	-	-	5	5	11	∞	∞	-	-	b	a	b	NIL	NIL	a,b,c
Iter 4	-	-	-	5	10	9	∞	-	-	-	a	c	c	NIL	a,b,c,d
Iter 5	-	-	-	-	10	9	∞	-	-	-	-	c	c	NIL	a,b,c,d,f
Iter 6	-	-	-	-	10	-	17	-	-	-	-	c	-	f	a,b,c,d,f,e
Iter 7	-	-	-	-	-	-	16	-	-	-	-	-	-	e	a,b,c,d,f,e,g

- pag. 178, esercizio 11.7

Modificare il testo, scambiando in figura 11.17 il nodo 3 ed il nodo 4.

12. Pianificazione di progetti

- **pag. 186, esercizio 12.2**

- Nella soluzione (ultima tabella di pag. 186) lo slittamento dell'attività H è pari a 14.
- In figura 12.10 l'etichetta del nodo **End** è 21/21.
- A differenza di quanto scritto sotto fig. 12.10, il cammino critico A, C, D, F, I non è evidenziato in figura.

- **pag. 187, esercizio 12.3**

Il cammino critico non è evidenziato in fig. 12.11.

- **pag. 188, esercizio 12.4**

Il cammino critico non è evidenziato in fig. 12.12.

- **pag. 189, esercizio 12.5**

Il cammino critico non è evidenziato in fig. 12.13.

- **pag. 191, esercizio 12.6**

- [**Typo**] Nella costruzione del grafo delle precedenze (fig. 12.15) nessun nodo è stato etichettato con 5 (si potrebbero numerare i nodi da 1 a 11).
- Nella soluzione (tabella di pag. 192) l'etichetta T_{MAX} dell'attività A è pari a 3.

- **pag. 192, esercizio 12.7**

- Nel grafo delle precedenze di fig. 12.16 manca la precedenza $G \prec I$: aggiungere un arco tratteggiato dal nodo 12 al nodo 13.
- Il cammino critico non è evidenziato in fig. 12.16.

13. Reti di flusso

- pag. 197, esercizio 13.1

– Modificare il testo, utilizzando la seguente tabella di capacità.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>t</i>
<i>s</i>	20	15	-	-	-	-	-
<i>a</i>	-	5	8	-	7	9	-
<i>b</i>	-	-	5	17	9	-	-
<i>c</i>	-	-	-	3	-	-	-
<i>d</i>	-	-	-	-	-	-	18
<i>e</i>	-	-	-	1	-	11	-
<i>f</i>	-	-	-	-	-	-	14

– Nella fig. 13.7 a pag. 200 l'etichetta (flusso/capacità) dell'arco (*b, e*) è 1/9.

- pag. 200, esercizio 13.2

Modificare il testo, utilizzando la seguente tabella di capacità.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>t</i>
<i>s</i>	16	15	-	-	-	-	-
<i>a</i>	-	5	8	-	9	-	-
<i>b</i>	-	-	-	17	9	-	-
<i>c</i>	-	-	-	-	7	-	-
<i>d</i>	-	-	-	-	-	-	18
<i>e</i>	-	-	-	1	-	11	-
<i>f</i>	-	-	-	-	-	-	15

- pag. 205, esercizio 13.5

Modificare il testo, utilizzando la seguente tabella di capacità.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	-	3	7	-	-	-
<i>b</i>	1	-	-	6	5	-
<i>c</i>	-	2	-	-	-	-
<i>d</i>	-	-	3	-	4	-
<i>e</i>	-	-	-	-	-	10
<i>f</i>	11	-	-	4	-	-

- pag. 210, esercizio 13.6

Nella figura 13.24 (pag 211), l'etichetta del vertice v_5 è $(1, +v_4)$

- pag. 211, esercizio 13.7

Nella figura 13.30 (pag 213), l'etichetta del vertice v_2 è $(3, -v_4)$ e l'etichetta del vertice v_5 è $(2, +v_6)$.

- **pag. 214, esercizio 13.8**

Nella figura 13.35 (pag 215), l'etichetta del vertice v_4 è $(2, +v_3)$.